

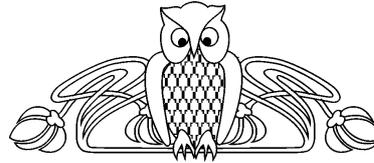


УДК 621.382.029.6

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В МЮОНИИ И МЮОННОМ ВОДОРОДЕ

Н. А. Бойкова, О. А. Бойкова, Ю. Н. Тютхтяев

Саратовский государственный университет
E-mail: boykova_na@mail.ru



Обсуждены варианты квазипотенциального подхода для исследования спектров экзотических атомов мюония и мюонного водорода. Сходство спектров экзотических атомов использовано как средство построения корректной теории возмущений. Исследована зависимость тонких сдвигов от нормировочных множителей.

Ключевые слова: связанное состояние, тонкий сдвиг, сверхтонкий сдвиг, уровень энергии, экзотический атом, мюоний, мюонный водород, квазипотенциальный подход.

Electromagnetic Interaction for Muonium and Muonic Hydrogen

N. A. Boikova, O. A. Boikova, Yu. N. Tyukhtyaev

The quasipotential approach variants for investigation of the exotic atoms spectra for muonium and muonic hydrogen are discussed. Similarity of exotic atoms spectra is used for build-up the correct perturbation theory. Dependence of fine shifts on normalizing multipliers is investigated.

Key words: bound state, fine shift, superfine shift, energy level, exotic atom, muonium, muonic hydrogen, quasipotential approach.

Одним из классов экзотических атомов являются мюонные атомы, в состав которых входят нестабильная частица мюон. При образовании мюонного водорода отрицательный мюон (μ^-), замещая в атоме водорода электрон, образует связанное состояние ($p^+ \mu^-$). Возможен и другой вариант образования мюонного атома. Положительно заряженный мюон (μ^+) может захватить электрон из другого атома и образовать систему ($\mu^+ e^-$) – мюоний [1].

Важным направлением спектроскопии мюонных атомов является изучение интервалов сверхтонкой структуры с высокой точностью. Система из двух фермионов (мюонный водород, мюоний, позитроний, антиводород и т.д.) может находиться в состояниях с одинаково и противоположно направленными спинами. Полный спин системы S является интегралом движения и принимает значения 0 или 1. Для основного состояния в первом случае имеется одна Z -компонента

спина, во втором – три, что соответствует синглетному 1S_0 и триплетному 3S_1 состояниям. Переход атома из одного состояния в другое может быть индуцирован с помощью внешнего магнитного поля, меняющегося вместе с частотой перехода, и доступен экспериментальному исследованию.

Одним из наиболее эффективных теоретических методов исследования сверхтонкой структуры мюонных атомов является квазипотенциальный подход. Основное уравнение квазипотенциального подхода представляется в виде

$$(\hat{G}^+(\vec{p}, \vec{q}, E))^{-1} \Psi_E(\vec{q}) = \tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}, E) \Psi_E(\vec{q}), \quad (1)$$

где E – собственное значение полной энергии, $\Psi_E(\vec{q})$ – описывающая систему волновая функция. Для определения квазипотенциала $\tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}, E)$ вводится оператор

$$\tau_0 = F^{-1} T_0^+ F^{-1}, \quad (2)$$

где $T_0^+ = \overline{G_0 T G_0^+}$. Релятивистская амплитуда рассеяния $T(\vec{p}, \vec{q}, p_0, q_0, E)$ определяется из уравнения Бете–Солпитера

$$G(p_1, p_2, q_1, q_2) = G_0(p_1, p_2, q_1, q_2) + G_0(p_1, p_2, k_1, k_2) T(k_1, k_2, s_1, s_2) G_0(s_1, s_2, q_1, q_2), \quad (3)$$

где

$$G_0(p_1, p_2, q_1, q_2) = i S_1(p_1 - q_1) S_2(p_2 - q_2), \quad (4)$$

S_i – фермионный пропагатор. Выполняя в уравнении (3) интегрирование по относительным энергиям и проектирование на положительно частотные состояния, получим:

$$(\hat{G}^+)^{-1} = F^{-1} - (\hat{G}^+)^{-1} = \tau_0 (1 + F \tau_0)^{-1}. \quad (5)$$

Квазипотенциал для системы двух фермионов определяется выражением



$$V = F^{-1} - (\hat{G}^+)^{-1} = \tau_0(1 + F\tau_0)^{-1}. \quad (6)$$

На массовой поверхности $E = \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p} = \varepsilon_{1q} + \varepsilon_{2q}$, $\varepsilon_{ip} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$, оператор $\tau_0(\vec{p}, \vec{q}, E)$ и физическая амплитуда $T_+(\vec{p}, \vec{q}, E)$ совпадают:

$$T_+(\vec{p}, \vec{q}, E) = \bar{u}_1(\vec{p})\bar{u}_2(-\vec{p}) \times T(p_0 = 0, q_0 = 0, \vec{p}, \vec{q}, E)\bar{u}_1(\vec{q})\bar{u}_2(-\vec{q}). \quad (7)$$

В работе [2] исследования сверхтонкой структуры S уровней мюонного водорода выполнялись на основе квазипотенциального уравнения шредингеровского типа. Однако, значительно раньше получил известность другой подход к решению этой проблемы [3, 4]. Его использование позволяет изучать сверхтонкое расщепление уровней энергии более планомерно и с большей точностью. Содержит ли всю информацию о связанной системе двух частиц способ построения квазипотенциала через амплитуду рассеяния (7) или квазипотенциал должен строиться на основе оператора τ_0 выражения (6)? Действительно ли группа экзотических атомов сохраняет свои спектроскопические свойства как целое в обоих случаях?

Выполняя замену оператора τ_0 амплитудой рассеяния T_+ , используем разложение амплитуды T_+ в ряд по степеням постоянной тонкой структуры α :

$$T_+ = T_+^{(2)} + T_+^{(4)} + \dots \quad (8)$$

Тогда для квазипотенциала получим

$$V = T_+(1 - FT_+ + FT_+FT_+ - \dots). \quad (9)$$

В низших порядках теории возмущений имеем

$$V = V^{(2)} + V^{(4)} = T_+^{(2)} + T_+^{(4)} - T_+^{(2)}FT_+^{(2)}, \quad (10)$$

$$V^{(2)} = T_+^{(2)}, \quad V^{(4)} = T_+^{(4)} - T_+^{(2)}FT_+^{(2)}. \quad (11)$$

Амплитуда рассеяния строится с помощью Фейнмановской диаграммной техники.

Поправки к кулоновским уровням энергии определяем, решая квазипотенциальное уравнение (1) по теории возмущений:

$$\Delta E_n = \langle n | \Delta V^{(2)} + \Delta V^{(4)} + \sum_{n \neq m} \Delta V^{(2)} \frac{|m\rangle\langle m|}{(E_n - E_m)} \Delta V^{(2)} | n \rangle,$$

$$\Delta V^{(2)} = V^{(2)} - v_c, \quad (12)$$

где $|n\rangle$ и $|m\rangle$ – собственные функции нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом v_c , соответствующие значениям энергии E_n и E_m . Волновая функция для главного квантового числа $n = 1$ имеет вид

$$\varphi_{1S} = 8\pi\alpha\mu \varphi_1(0)(p^2 + \alpha^2\mu^2)^{-2},$$

$$|\varphi_1(0)|^2 = \alpha^3\mu^3\pi^{-1}, \quad (13)$$

где μ – приведенная масса.

Квазипотенциал $V(\vec{p}, \vec{q}, E)$ в низшем приближении, соответствующем однофотонному обмену между фермионами, определяется выражением

$$V(\vec{p}, \vec{q}, E) = K^{(1)}(\vec{p}, \vec{q}). \quad (14)$$

Поскольку основным взаимодействием в мюоном водороде ($p^+\mu^-$) является электромагнитное, то при описании связанного состояния протона и мюона удобно использовать кулоновскую калибровку, в которой фотонный пропагатор представляется в виде

$$D^{00}(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2}, \quad D^{0i} = D^{j0} = 0,$$

$$D^{ij}(k) = -\frac{1}{(k_0^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon)} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right), \quad (15)$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Ядру обмена одним фотоном соответствует аналитическое выражение

$$K^{(1)}(k) = e^2 \gamma_{1\mu} \gamma_{2\nu} D^{\mu\nu}(k), \quad (16)$$

в котором можно выделить две части: чисто кулоновскую (K_c), пропорциональную кулоновскому потенциалу $v_c(\vec{k})$,

$$K_c(\vec{k}) = \gamma_{10} \gamma_{20} v_c(\vec{k}), \quad (17)$$

и (K_T), имеющую четырехмерную зависимость:



$$K_T(k) = -e^2(k_0^2 - \vec{k}^2)^{-1} \times (\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 - (\vec{\gamma}_1 \vec{k})(\vec{\gamma}_2 \vec{k})(\vec{k})^{-2}). \quad (18)$$

Взаимодействия, связанные с ядрами (K_c) и (K_T), принято называть обменами кулоновским и поперечным фотонами соответственно.

Выражение для сдвига от однофотонного кулоновского взаимодействия имеет вид

$$\Delta E_c = \langle \varphi_c | (K_c)_+ - v_c | \varphi_c \rangle = \langle \varphi_c | W_1^* W_2^* \left(1 + \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{p})(\vec{\sigma}_1 \vec{q})}{M_{1p} M_{1q}} \right) \times \left(1 + \frac{(\vec{\sigma}_2 \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \vec{q})}{M_{2p} M_{2q}} \right) W_1 W_2 - 1 | v_c | \varphi_c \rangle. \quad (19)$$

Так как источником сверхтонкого расщепления является спин-спиновое взаимодействия частиц в атоме, а спиновые состояния частиц характеризуются с помощью матриц Паули $\vec{\sigma}_i$, то сверхтонкому расщеплению соответствует аналитическое выражение, содержащее характерный множитель $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$. Рационально выделить из матричной структуры (19) часть, пропорциональную $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$, воспользовавшись симметрией подынтегрального выражения:

$$\Delta E_c^{hfs} = \frac{16 \alpha^6 \mu^5}{9 \pi^2} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int_0^\infty dp \frac{N_p p^2}{M_{1p} M_{2p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \int_0^\infty dq \frac{N_q q^2}{M_{1q} M_{2q} (q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \left(p^2 + q^2 + \frac{p^4 + q^4}{2pq} \ln \frac{|p-q|}{(p+q)} - pq \ln \frac{|p-q|}{(p+q)} \right). \quad (20)$$

Логарифмический вклад порядка α^6 обеспечивает так называемый стандартный интеграл:

$$J_{st} = \int_0^\infty \frac{p dp}{\varepsilon_{1p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2) \varepsilon_{2p}} \times \int_0^\infty \frac{q dq}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \ln \frac{|p-q|}{(p+q)}, \quad (21)$$

который выделяется из последнего слагаемого выражения (20) при учете замен

$$N_p N_q \rightarrow 1, \quad \frac{1}{M_{1p} M_{2p}} \rightarrow \frac{1}{4 \varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p}},$$

$$\frac{1}{M_{1q} M_{2q}} \rightarrow \frac{1}{4 m_1 m_2}. \quad (22)$$

Более точный учет зависимости от импульсов нормировочных множителей ($N_p N_q$) и массовых факторов M_{iq} приводит к дополнительным четным степеням импульсов в числителе, что устраняет влияние кулоновских функций $\varphi_c(\vec{p})$ и $\varphi_c(\vec{q})$ и повышает порядок вклада от интеграла типа J_{st} до α^6 .

Поэтому с требуемой точностью имеем

$$\Delta E_c^{hfs} (\alpha^6 \ln \alpha) = \frac{1}{9 \pi^2} \alpha^6 \mu^5 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle J_{st}, \quad J_{st} = \frac{\pi^2}{2 m_1 m_2} \ln \alpha. \quad (23)$$

Таким образом, для сверхтонкого сдвига от однофотонного кулоновского взаимодействия получаем

$$\Delta E_c^{hfs} = \frac{1}{4} E_F \frac{\alpha^2 \mu^2}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}. \quad (24)$$

где E_F – значение сверхтонкого расщепления основного уровня энергии атома в нулевом порядке, которое было получено Ферми и составляет

$$E_F = \frac{2}{3} \frac{\alpha^4 \mu^2}{(m_1 + m_2)} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = \frac{8}{3} \frac{\alpha^4 \mu^3}{m_1 m_2}. \quad (25)$$

Обратимся теперь к обмену одним поперечным фотоном. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид

$$\Delta E_T = \left\langle \varphi_c(\vec{p}) \left| 4 \alpha \pi v_c(\vec{p} - \vec{q}) u_1^*(\vec{p}) u_2^*(-\vec{p}) \times \left(\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - \frac{(\vec{\alpha}_1(\vec{p} - \vec{q}))(\vec{\alpha}_2(\vec{p} - \vec{q}))}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \right) \times u_2(\vec{q}) u_2(-\vec{q}) \right| \varphi_c(\vec{q}) \right\rangle. \quad (26)$$

После вычисления матричной структуры для сверхтонкого расщепления получаем

$$\Delta E_T^{hfs} = \frac{4}{3 \pi^4} \alpha^6 \mu^5 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \times \int d^3 p \frac{N_p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 M_{1p} M_{2p}} \times \int d^3 q \frac{N_q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 M_{1q} M_{2q}} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \left(M_{1p}M_{2q} + M_{1q}M_{2p} - \right. \\ & - \frac{(p^2 - q^2)^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \frac{1}{(\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q})} \times \\ & \left. \times \left(M_{1p}M_{2q} + M_{1q}M_{2p} + \frac{[\vec{p}\vec{q}]^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Примечательной особенностью данного выражения является наличие вклада порядка α^4 , который содержится в первых двух членах и легко выделяется при заменах (22):

$$\begin{aligned} \Delta E_T^{hfs}(\alpha^4) &= \frac{2}{3\pi^4} \frac{1}{m_1 m_2} \alpha^6 \mu^5 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \times \\ & \times \left(\int d^3 p \frac{N_p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \right)^2 = \\ & = \frac{2}{3} \frac{\alpha^4 \mu^3}{m_1 m_2} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = E_F. \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим также присутствие в выражении (26) логарифмического вклада $\alpha^6 \ln \alpha$:

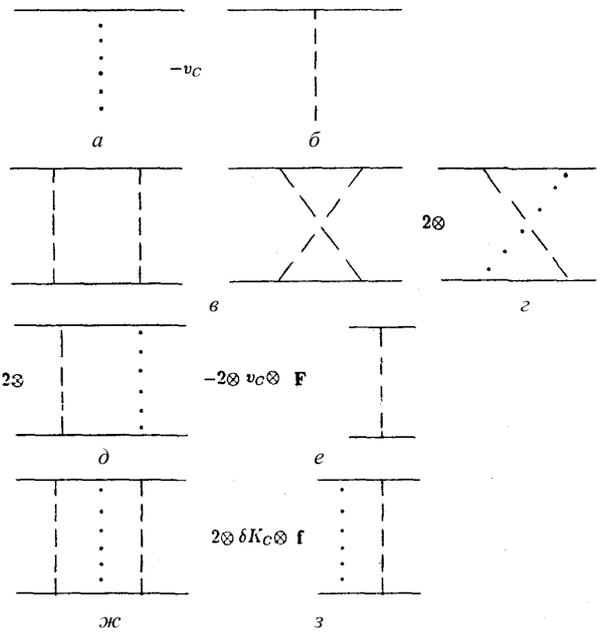
$$\begin{aligned} \Delta E_T^{hfs}(\alpha^6 \ln \alpha) &= \frac{2}{3\pi^4} \frac{1}{m_1 m_2} \alpha^6 \mu^5 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \times \\ & \times \int \frac{d^3 p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\ & \times \left(\frac{1}{M_{1p}^2} + \frac{1}{M_{2p}^2} \right) \frac{p^2 q^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} = \\ & = -\frac{4}{3\pi^2} \frac{1}{m_1 m_2} \alpha^6 \mu^5 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int_0^\infty \frac{p dp}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{q dq}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)} \left(\frac{1}{\varepsilon_{1p}^2} + \frac{1}{\varepsilon_{2p}^2} \right) \ln \frac{|p - q|}{(p + q)} = \\ & = \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} E_F \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) \ln \alpha^{-1}, \end{aligned} \quad (29)$$

что свидетельствует о изменении взгляда на теорию возмущения, которая ранее строилась через целочисленные степени α .

Итак, результат (28) определяет основной вклад в сверхтонкое расщепление от электромагнитного взаимодействия в мюонном водороде при $m_1 = m_\mu$ и $m_2 = m_p$. Однако формула (28) имеет более общий характер и может быть применена к любому экзо-

тическому атому при описании электромагнитного взаимодействия. При этом ее численное значение для различных атомов существенно отличается в силу их массовых характеристик.

Проведем сравнительный анализ логарифмических вкладов порядка $\alpha^6 \ln \alpha$ для мюонного водорода и позитрония на основе таблицы [5]. В этой таблице представлены вклады от диаграмм, приведенных на рисунке, где схематично показаны обмены кулоновскими (точечная линия) и поперечными (пунктирная линия) фотонами.



Диаграммы, дающие вклады порядка $\alpha^6 \ln \alpha$ в СТР атома

Вклады в СТР мюонного водорода и позитрония

Диаграмма	$p^+ \mu^-$		$e^+ e^-$	
	К	L	К	L
a	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	
б	0	M	2	2
в	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	
г	-2	-M	-2	-2
д	0	3M	0	6
е	-4	-2M	-4	-4
ж	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0
з	0	-M	0	-2
Σ	0	0	2	0



Составим таблицу логарифмических вкладов с учетом результата (29) от обмена поперечным фотоном, который представим в виде

$$\Delta E^{hfs} = \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} E_F \ln \alpha^{-1}(K + ML),$$

$$M = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}. \quad (30)$$

В таблице результаты представлены в виде совокупности безмассовых членов (K) и логарифмических вкладов (L), пропорциональных M . Для позитрония разделение вкладов на K и L условно, так как $m_1 = m_2$ и $M = 2$. В части L данная таблица аналогична таблице из работы [5] при замене $m_e \rightarrow m_\mu$ и $m_\mu \rightarrow m_p$. Это свидетельствует о том, что в высших порядках теории возмущений группа экзотических атомов проявляет себя как единое целое. Заметим, что сумма вкладов (L) равна 0 как для позитрония, так и для мюонного водорода. Результаты группы K оказываются различными.

Итак, как следует из данных, приведенных в таблице, в отличие от результатов для сверхтонкого сдвига с точностью α^4 при повышении точности до $\alpha^6 \ln \alpha$ спектроскопия мюонного водорода не переходит в спектроскопию позитрония при соответствующей замене масс в двухчастичной системе. Возникает вопрос: сохраняется ли сходство экзотических атомов при прецизионных вычислениях сверхтонких сдвигов? Сохраняется, но при условии, что определение квазипотенциала через амплитуду рассеяния T_+ (7):

$$V = T_+(1 + FT_+)^{-1}, \quad (31)$$

рассматривается в качестве приближения выражения (6).

Проанализируем выражение для сверхтонкого сдвига от однофотонного обмена на основе определения (6):

$$\Delta \tilde{E}_T = \frac{2}{3\pi^4} \alpha^6 \mu^5 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int \frac{N_p d^3 p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times$$

$$\times \int \frac{N_q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|} \left(\frac{1}{(\varepsilon_{1p} - E_1 - E_2 + \varepsilon_{2q} + |\vec{p} - \vec{q}|)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\varepsilon_{1q} - E_1 - E_2 + \varepsilon_{2p} + |\vec{p} - \vec{q}|)} \right) \times \quad (32)$$

$$\times \left((\vec{p} - \vec{q})^2 \left(\frac{1}{M_{1p} M_{2q}} + \frac{1}{M_{1q} M_{2p}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{(p^2 - q^2)^2}{(\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q})} \left(\frac{1}{M_{2p} M_{2q}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{M_{1p} M_{1q}} + \frac{[\vec{p} - \vec{q}]^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2 M_{1p} M_{1q} M_{2p} M_{2q}} \right) \right) d^3 q.$$

При расчете этой величины с точностью $\alpha^6 \ln \alpha$ можно воспользоваться следующим приближением:

$$(\varepsilon_{1p} - E_1 - E_2 + \varepsilon_{2q} + |\vec{p} - \vec{q}|)^{-1} \cong$$

$$\cong \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|} \left(1 - \frac{\varepsilon_{1p} - E_1 - E_2 + \varepsilon_{2q}}{|\vec{p} - \vec{q}|} + \right. \quad (33)$$

$$\left. + \frac{(\varepsilon_{1p} - E_1 - E_2 + \varepsilon_{2q})^2}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \right).$$

Тогда, выделяя члены, ответственные за логарифмические вклады, получим:

$$\Delta \tilde{E}'_T = \frac{1}{12\pi^4} \frac{1}{m_1 m_2} \alpha^6 \mu^5 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \times$$

$$\times \int \frac{d^3 p}{\varepsilon_{2p} \varepsilon_{1p} (p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \quad (34)$$

$$\times \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \left(1 + \frac{2(\varepsilon_{1p} - m_1)(\varepsilon_{2q} - m_2)}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{p^2 q^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \left(\frac{M_{1q} + M_{1p}}{(\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q})} + \frac{M_{2p} + M_{2q}}{(\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q})} \right) + \right.$$

$$\left. + 2M_{1p} M_{2q} \right\}.$$

Анализ показывает, что первое слагаемое в фигурных скобках вносит вклады в сверхтонкое расщепление, начиная с членов порядка $\alpha^6 \ln \alpha$, а второе – с членов порядка α^4 . Отличие фактора $(\varepsilon_{1p} - E_1 + \varepsilon_{2q} - E_2 + |\vec{p} - \vec{q}|)$ от $|\vec{p} - \vec{q}|$ оказывается существенным для получения логарифмических поправок при наличии в выражении членов, обеспечивающих вклады порядка α^4 . Вклады $\alpha^6 \ln \alpha$ вносят попарные произведения первых и вторых членов в квадратных и фигурных скобках. Используя значение стандартного интеграла, находим окончательно:



$$\begin{aligned} \Delta E_T^{hfs}(\alpha^6 \ln \alpha) = \\ = \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} E_F \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} + 2 \right) \ln \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Учет результата (35) в таблице приводит к изменению коэффициента K в строке b для $(p^+ \mu^-)$, так что суммарные результаты столбцов K для мюонного водорода и позитрония оказываются одинаковыми. Таким образом, восстанавливается общность результатов при исследовании электромагнитного взаимодействия в группе экзотических атомов.

Наличие у частицы механического момента приводит к существованию соответствующего магнитного момента. Поэтому собственный механический и орбитальный моменты обуславливают спиновый магнитный и орбитальный магнитный моменты частиц связанного состояния. Потенциальная энергия, возникающая вследствие спин-орбитального взаимодействия, приводит к появлению тонкой структуры уровней энергии.

Исследуем зависимость тонкой структуры энергетического спектра экзотического атома от константы тонкой структуры. В низшем приближении учитывается только однофотонное взаимодействие. Тогда

$$V = (K_T)_+ + (K_c)_+. \quad (36)$$

Как показано в работе [6], с помощью разложения по степеням величины p^2/m_i^2 из квазипотенциала (62) можно выделить ядро Брейта:

$$V = V_{kin}^{leader} + V_\mu + V_{\rho\mu}, \quad (37)$$

где

$$V_{kin}^{leader} = -(2\pi)^3 \delta^3(p-q) \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{3}{m_1 m_2} \right) \frac{p^4}{8\mu},$$

$$V_\mu = \frac{\pi\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right),$$

$$V_{\rho\mu} = -\frac{4\pi\alpha}{m_1 m_2} \frac{p^2 q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2}{(\vec{p} - \vec{q})^4}.$$

Суммирование этих величин дает тонкую структуру уровней энергии [7] водородоподобного атома с точностью до четвертого порядка по α :

$$\begin{aligned} E_{n,j} \approx m_1 + m_2 - \frac{\mu(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \times \\ \times \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} + \frac{\mu}{4n(m_1+m_2)} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Симметрия по массам позволяет констатировать, что квазипотенциальный подход воспроизводит тонкую структуру уровней энергии экзотических атомов, следующую из точного решения уравнения Дирака с кулоновским потенциалом.

Выражение для тонкого сдвига от кулоновской части однофотонного взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta E_c^{fs} = \langle \varphi_c | v_c N_p N_q \left(1 + \frac{\vec{p}\vec{q}}{M_{1p} M_{1q}} + \right. \\ \left. + \frac{\vec{p}\vec{q}}{M_{2p} M_{2q}} + \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{M_{1p} M_{2p} M_{1q} M_{2q}} \right) - v_c | \varphi_c \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

Для выделения основного вклада можно использовать разложение радикалов ε_{ip} и нормировочных множителей $N_{m,p}$ по степеням \vec{p}^2/m_i^2 ,

$$\begin{aligned} \Delta E_c^{fs}(\alpha^4) = \langle \varphi_c | V_c^{(2)} | \varphi_c \rangle = \\ = \frac{\pi\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left(\frac{8\pi\alpha\mu}{(2\pi)^3} \right)^2 \times \\ \times |\varphi(0)|^2 \left(\int d^3 p \frac{1}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (40)$$

что приводит к результату

$$\Delta E_c^{fs}(\alpha^4) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^4 \mu^3}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right). \quad (41)$$

Логарифмический вклад оказывается следующим:

$$\begin{aligned} \Delta E_c^{fs}(\alpha^6 \ln \alpha) = \langle \varphi_c | V_c^{(4)} | \varphi_c \rangle = \\ = \frac{5}{4} \frac{\alpha^6 \mu^5}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1}{m_2^3} + \frac{m_2}{m_1^3} \right) \ln \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Отметим симметрию полученного результата относительно замены $m_1 \leftrightarrow m_2$, характерную для экзотических атомов.

Обратимся теперь к обмену одним поперечным фотоном:



$$\begin{aligned} \Delta E_T^{fs} = & \frac{32 \alpha^6 \mu^5}{\pi^2 m_1 m_2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\ & \times \int_0^\infty dq \frac{q^2 N_q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \left(1 - \frac{q^2}{M_{1q}^2} + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \times \right. \\ & \times \ln \frac{|p-q|}{(p+q)} - \frac{q^3}{2pM_{1q}^2} \ln \frac{|p-q|}{(p+q)} - \\ & \left. - \frac{pq}{2M_{1q}^2} \ln \frac{|p-q|}{(p+q)} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Логарифмический вклад порядка $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ определяет последний член в фигурных скобках при $N_p = N_q = 1$ и он оказывается следующим:

$$\Delta E_T^{fs}(\alpha^6 \ln \alpha) = 2 \frac{\alpha^6 \mu^5}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}. \quad (44)$$

Однако для получения полного логарифмического вклада необходимо учесть отличие нормировочных факторов от единицы:

$$\begin{aligned} N_p N_q = & \left(1 - \frac{p^2}{2\varepsilon_{1p} M_{1p} (1 + \sqrt{M_{1p}/2\varepsilon_{1p}})} \right) \times \\ & \times \left(1 - \frac{q^2}{2\varepsilon_{1q} M_{1q} (1 + \sqrt{M_{1q}/2\varepsilon_{1q}})} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Дополнительный логарифмический вклад от учета нормировочных множителей оказывается весьма существенным:

$$\Delta E_T^{(2)}(\alpha^6 \ln \alpha) = 2 \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}, \quad (46)$$

увеличивая в два раза предыдущий результат, так что суммарный логарифмический вклад составляет

$$\Delta E_T^{fs}(\alpha^6 \ln \alpha) = 4 \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}. \quad (47)$$

Таким образом, при прецизионных исследованиях сверхтонких расщеплений и тонких сдвигов уровней энергии общность подхода к различным экзотическим атомам сохраняется.

Отметим, что исследование логарифмических вкладов порядка $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ было про-

ведено в работах других авторов [8, 9]. При этом в работе [8] суммарный вклад $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ от взаимодействия в прямом канале позитрония отсутствовал. В то же время для системы частиц с разными массами подобный вклад был обнаружен. С точки зрения сходства экзотических атомов указанные результаты противоречили друг другу. Это противоречие было устранено в совместной работе тех же авторов [10]. Метод квазипотенциала наглядно показывает, что часть логарифмического вклада ΔE_T при $N_p N_q \neq 1$ в работе [9] не была учтена. Для полного учета суммарного вклада $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ нужно разработать корректную теорию возмущений и учесть вклады высших порядков теории возмущений.

Список литературы

1. Пономарев Л. И. Мюонный катализ ядерных реакций синтеза // Природа. 1979. №9. С.8–19.
2. Мартыненко А. П. Сверхтонкая структура S-уровней мюонного водорода // Теоретическая и математическая физика (Самара). 2004. Т. 5. С. 27–45.
3. Тюхтяев Ю. Н. Учет эффектов связанности позитрония // ТМФ. 1978. Т. 36, № 2. С. 264–270.
4. Тюхтяев Ю. Н. Новый метод учета кулоновского взаимодействия в квазипотенциальном подходе Логунова–Тавхелидзе // ТМФ. 1982. Т. 53, № 3. С. 419–428.
5. Двоеглазов В. В., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н. Уровни энергии водородоподобных атомов и фундаментальные константы // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25, вып. 1. С. 144–228.
6. Boikova N. A., Boikova O. A., Kleshchevskaya S. V., Tyukhtyaev Y. N. On the possibility of precise correction calculations to the effect of nuclear motion influence on fine energy shifts of hydrogen-like atoms // SPIE Laser physics and photonics, spectroscopy and molecular modeling. 2006. Vol. 6537. P. 19-1–19-8.
7. Barker W. A., Glover F. N. Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate forms. III // Phys. Rev. 1955. Vol. 99, № 1. P. 317–324.
8. Fell R. N. Single transverse photon correction to the 2S energy levels of positronium. Preprint BUW 01742. 1992. 40 p.
9. Khrplovich I. B., Milstein A. I., Yelkhovskiy A. S. Corrections of $(\alpha^6 \ln \alpha)$ in two-body QED problem // Phys. Lett. B. 1992. Vol. 282. P. 237–242.
10. Fell R. N., Khrplovich I. B., Milstein A. I., Yelkhovskiy A. S. On the recoil corrections in hydrogen // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 181. P. 172–174.