



УДК 517.9

ГЕНЕРАТОР АНИЩЕНКО–АСТАХОВА КАК ОДНА ИЗ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова

Саратовский государственный университет,
Институт нелинейной динамики
E-mail: Wadim@chaos.ssu.runnet.ru

В обзоре формулируются условия возникновения хаотических автоколебаний и дается радиотехническая схема генератора, которая эти условия реализует. Выводятся уравнения генератора Анищенко–Астахова и проводится их анализ. Особое внимание уделяется взаимосвязи уравнений генератора с классическими моделями Теодорчика и Ван дер Поля. Обосновывается фундаментальная причина возникновения хаотических автоколебаний, обусловленная наличием гомоклинической траектории в виде петли сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокуса.

Кратко перечисляются основные приоритетные результаты исследований, которые были получены впервые с использованием генератора Анищенко–Астахова как численно, так и экспериментально.

ANISHCHENKO-ASTAKHOV SELF-SUSTAINED OSCILLATOR AS ONE OF THE BASIC MODELS OF DETERMINISTIC CHAOS

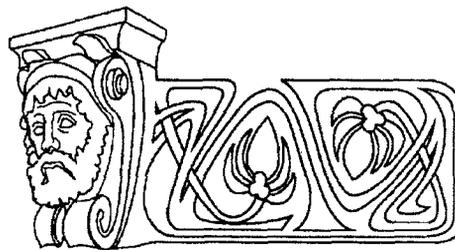
V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, T.E. Vadivasova

In the present review the conditions of appearing chaotic self-sustained oscillations are formulated and a radio-technical scheme of a generator realizing these conditions is given. The equations of Anishchenko–Astakhov's generator are derived and analyzed. A special attention is paid to the interrelation between the generator's equations and Theodorichik and Van der Pole classical models. We justify a fundamental reason of the onset of chaotic self-sustained oscillations, that is related with the presence of a homoclinic trajectory in the form of a saddle-focus separatrix loop.

We briefly describe the major research results that have firstly been obtained numerically and experimentally by using Anishchenko–Astakhov's generator.

ВВЕДЕНИЕ

Открытие феномена детерминированного хаоса в 1963–1971 гг. оказало огромное влияние на развитие современных представлений о картине мира. Эффект «шумоподобного» поведения чисто детерминированных систем казался просто невероятным в рамках сложившихся представлений классической механики и теории динамических систем. Разрушались фундаментальные концепции классической науки о закономерностях эволюционных процессов в природе и обществе, ставилась под сомнение сама суть возможности детерминированного описания, кардинально менялся взгляд на статистическую



теорию. В математическом плане это связано с доказательством возможности существования непериодических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $N \geq 3$. За 300 лет существования математики было известно и не подвергалось сомнению существование только трех типов решений: стационарные (равновесие), периодические и квазипериодические. Непериодические решения представлялись возможными лишь для стохастических систем, т.е. систем, находящихся под действием шума. В этом случае необходимо было использовать статистическую теорию. Открытие эффекта детерминированного хаоса показало, что непериодические (шумоподобные) решения возможны уже в довольно простых обыкновенных дифференциальных уравнениях, описывающих динамику нелинейных диссипативных систем всего с 1,5 степенями свободы! Поверить в это было очень трудно даже специалистам.

За относительно короткий период в 30 лет положение резко изменилось. Сейчас не только аспиранты, но и студенты младших курсов естественным образом воспринимают концепцию детерминированного хаоса, решают разнообразные задачи, изучая этот эффект как с помощью компьютера, так и экспериментально. И это естественно, так как именно молодые исследователи гораздо легче и без внутренних противоречий воспринимают все новое в науке. Однако необходимо отметить, что в этом большая заслуга многих ученых старшего возраста, которые своим самоотверженным трудом обеспечили относительно быстрое и обоснованное понимание этого далеко не тривиального явления.

Не претендуя на общность, постараемся кратко описать те результаты, которые привели нас к пониманию сути эффекта детерминированного хаоса и позволили в итоге разработать и создать одну из базовых моделей для его описания и исследования.

В конце 50-х гг. прошлого века группа ученых из ИРЭ АН СССР, возглавляемая В.Я. Кисловым, обнаружила эффект генера-



ции шумового сигнала относительно большой мощности в лампе бегущей волны (ЛБВ) с положительной обратной связью. Ими было установлено, что эффект шумовой генерации наступает лишь в случае, когда характеристика усилителя (ЛБВ) является принципиально нелинейной и имеет достаточно крутой падающий участок. В 1978–1979 гг. в научной лаборатории кафедры радиофизики физического факультета Саратовского университета В.С. Анищенко и В.В. Астахов (в то время студент) воспроизвели результат группы В.Я. Кислова. Было четко подтверждено, что хаос возникает при условии, что характеристика ЛБВ имеет вид перевернутой параболы и существует критический угол наклона падающего участка, превышение которого приводит к шумовой генерации. Имевшиеся к тому времени теоретические и экспериментальные работы давали основания предполагать, что эффект генерации широкополосного шумоподобного сигнала в ЛБВ с обратной связью есть ни что иное, как режим динамического хаоса.

Весной 1980 г. произошло еще одно важное событие. В Нижнем Новгороде (г. Горький) состоялся 1-й Всесоюзный семинар по стохастическим колебаниям, сыгравший очень важную роль в развитии исследований в области динамического хаоса в России. На семинаре были представлены уже упоминавшиеся пионерские работы по хаосу профессора В.Я. Кислова и его коллег, работы представителей школы А.А. Андропова (Л.П. Шильникова, Ю.И. Неймарка, В.Н. Белых и др.) Безусловно, важным был доклад известного математика, академика Я.Г. Синая, посвященный детальному анализу результатов известной работы М. Фейгенбаума. Я.Г. Синай блестяще объяснил суть работ М. Фейгенбаума по универсальности перехода к хаосу в дискретной одномерной модели типа логистической параболы. В.С. Анищенко был участником этого семинара и выступил с докладом по результатам исследований возникновения хаотической генерации в ЛБВ. После доклада Я.Г. Синая В.С. Анищенко предложил идею создания простого генератора хаоса. Редкий случай, когда идея была быстро воплощена в жизнь и привела к реальному результату. Суть её состояла в следующем. М. Фейгенбаум показал, что простая одномерная дискретная система $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ с увеличением параметра λ демонстрирует универсальный переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода циклов. С другой стороны, в ЛБВ с обратной связью также реализуется переход к хаосу через бифуркации удвоения периода. Более того, характеристика ЛБВ-усилителя

при этом качественно эквивалентна параболе логистического отображения! Если учесть, что ЛБВ – это СВЧ прибор, работающий на высоких частотах, то легко понять, что время задержки в цепи обратной связи составляет большое число периодов колебаний и система на входе как бы «забывает» о том, что было на выходе. И главную роль играет нелинейное преобразование сигнала по закону логистической параболы! Таким образом, если реализовать низкочастотный (как существенно более простой) усилитель с характеристикой типа параболы и ввести положительную обратную связь, то можно ожидать эффекта, идентичного ЛБВ В.Я. Кислова и параболе Фейгенбаума! Эта идея оказалась верной, и в лаборатории кафедры радиофизики В.В. Астаховым был сконструирован первый образец такого генератора. Это событие произошло ровно 25 лет назад. Первые результаты экспериментальных исследований генератора хаотических колебаний были представлены в докладе [1] на IX Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, август 1981).

В последующие годы была доработана математическая модель генератора и проведены численные и экспериментальные исследования его динамики. Результатом явилось открытие ряда фундаментальных эффектов и закономерностей, имеющих принципиальный характер для понимания эффекта детерминированного хаоса. В исследованиях принимали участие многие сотрудники кафедры, среди которых следует отметить М.А. Сафонову, Т.Е. Летчфорд (Вадивасову), В.В. Астахова, Д.Э. Постнова и др. В результате на кафедре появилась исследовательская группа, затем лаборатория нелинейной динамики, преобразованная в настоящее время в международный институт нелинейной динамики.

В данном обзоре дается вывод уравнений генератора, обсуждается фундаментальная роль гомоклиники и приводятся экспериментальные результаты, полученные с использованием разработанной модели генератора. В современной литературе по нелинейной динамике эта модель носит название генератора Анищенко–Астахова.

1. ГЕНЕРАТОР ТЕОДОРЧИКА (ГЕНЕРАТОР С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ)

Как уже упоминалось, вначале на основе идеи о падающем участке характеристики нелинейного усилителя была разработана экспериментальная модель генератора. При теоретическом анализе схемы выяснилось, что мы имеем дело с некоторой модификаци-



ей хорошо известных классических моделей генераторов Теодорчика и Ван дер Поля. Чтобы более детально понять сходство и различия разработанной модели с классическими, целесообразно вначале рассмотреть модель генератора Теодорчика.

В классическом генераторе с инерционной нелинейностью Теодорчика [2] автоколебания обеспечиваются введением в колебательный контур термосопротивления $R(T)$, свойства которого нелинейным образом зависят от протекающего через него тока (рис. 1).

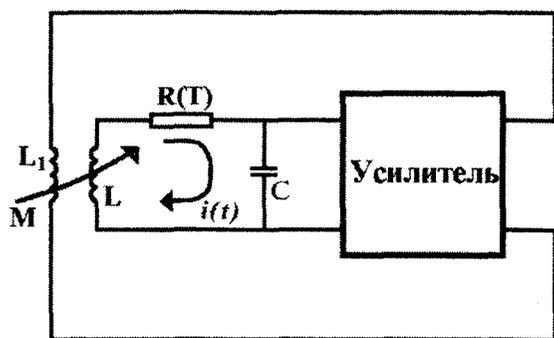


Рис. 1. Классическая схема генератора с инерционной нелинейностью

Уравнения для тока $i(t)$ в контуре имеют вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{R(T)}{L} - \frac{MS_0}{LC} \right] \frac{di}{dt} + \left[\frac{1}{LC} + \frac{1}{L} \frac{\partial R(T)}{\partial T} \frac{dT}{dt} \right] i = 0, \quad (1)$$

где $R(T)$ – сопротивление термистора, зависящее от температуры T ; M – взаимная индуктивность цепи обратной связи; S_0 – крутизна характеристики усилителя, который предполагается линейным; L и C – индуктивность и емкость колебательного контура.

Полагая зависимость $R(T)$ линейной ($R(T) = R_0 + LbT$) и считая, что процесс теплообмена подчиняется закону Ньютона:

$$\rho q \frac{dT}{dt} + kT = R(T) i^2,$$

где ρ – масса нити термистора, а q – ее удельная теплоемкость, получаем замкнутую систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i &= (\mu - bT) \frac{di}{dt} - bi \frac{dT}{dt}, \\ \frac{dT}{dt} + \gamma T &= \alpha(T) i^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$; $\mu = \omega_0^2 S_0 M - R_0/L$; $\gamma = k/\rho q$; $\alpha(T) = \alpha_0 + bLT/\rho q$; $\alpha_0 = R_0/\rho q$. В безразмерных переменных $x = ai$, $\dot{y} = -x$, $z = bT/\omega_0$, $\tau = \omega_0 t$, $a = \sqrt{\alpha b \rho q / \omega_0 k}$ уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gx^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\dot{x} = dx/d\tau$, $m = \mu/\omega_0 = \omega_0 S_0 M - R_0/\omega_0 L$, $g = \gamma/\omega_0$.

В трехмерной двухпараметрической системе (3) параметр m пропорционален разности вносимой и рассеиваемой энергий, g – параметр, характеризующий относительное время релаксации термистора. В дальнейшем m будем называть параметром возбуждения, а g – параметром инерционности генератора.

Как это видно из (3), если время релаксации термистора существенно превышает период колебаний ($g \rightarrow \infty$), уравнения переходят в двумерную модель генератора Ван дер Поля:

$$\dot{x} = mx - x^3 + y, \quad \dot{y} = -x. \quad (4)$$

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГЕНЕРАТОР С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ (ГЕНЕРАТОР АНИЩЕНКО-АСТАХОВА)

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 2. Здесь колебательный контур в отличие от классического случая не содержит нелинейных элементов. Усилитель 1 управляется дополнительной цепью обратной связи, содержащей линейный усилитель 2 и инерционный преобразователь. Дифференциальные уравнения этого генератора можно записать в явном виде, конкретизировав зависимость $S(x, V)$ усилителя 1 и задав уравнения инерционного преобразования $V(x)$.

Аппроксимируем полиномом функцию $S^1(x)$, т.е. крутизну усилителя 1, без учета воздействия дополнительной обратной связи:

$$S^1(x) = S_0 - S_1 x^2, \quad (5)$$

где x – напряжение на входе усилителя 1; S_0 и S_1 – постоянные, положительные коэффициенты. Предположим, что механизм воздействия цепи инерционной обратной связи подчиняется закономерности



$$S = S^1(x) - bV = S_0 - S_1x^2 - bV, \quad (6)$$

где b – параметр; $V=V(x)$ – напряжение на выходе инерционного преобразователя. Пусть инерционное преобразование осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{V} = -\gamma V + \varphi(x). \quad (7)$$

Уравнение для тока в контуре генератора (см. рис. 2)

$$Ldi/dt + Ri + C^{-1} \int (i - MSdi/dt) dt = 0$$

совместно с уравнениями (6) и (7) дает замкнутую систему, сводящуюся в безразмерных переменных к виду

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad (8)$$

$$\dot{z} = -gz + g\Phi(x),$$

где $d = d(S_1)$ – параметр, отвечающий степени влияния нелинейности крутизны характеристики; $\Phi(x)$ – функция, описывающая свойства инерционного преобразователя.

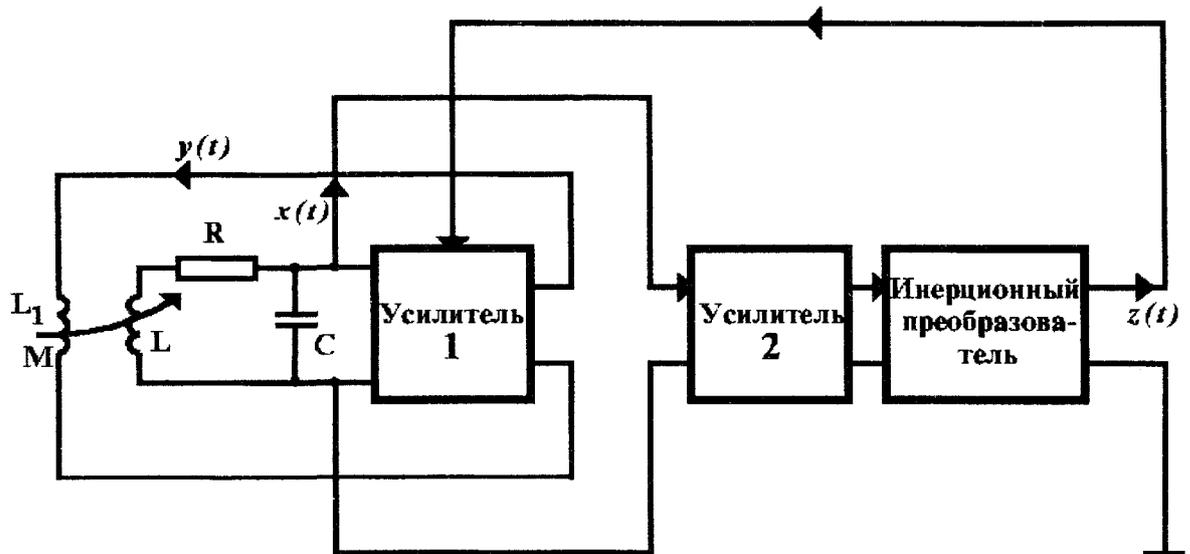


Рис. 2. Модифицированная схема генератора с инерционной нелинейностью

В генераторе действуют два механизма нелинейного ограничения амплитуды колебаний. Первый – безынерционный и связан с нелинейностью характеристики усилителя, второй – инерционный, обусловленный зависимостью крутизны S от напряжения V . Пусть усилитель работает на линейном участке характеристики ($S_1=0$), а инерционный преобразователь собран по схеме двухполупериодного квадратичного детектора с RC -фильтром и описывается уравнением

$$\dot{z} = -gz + gx^2. \quad (9)$$

Параметр инерционности g равен отношению периода колебаний контура T_0 к постоянной времени фильтра $\tau_f = R_f C_f$. При сделанных предположениях, то уравнения (8) переходят в уравнения классического генератора Теодорчика (3). Значит, если усилитель I линейный, а инерционный преобразователь удовлетворяет уравнению (9), то ма-

тематические модели генераторов, схемы которых изображены на рис. 1 и 2, неразличимы. Схема с детектором в экспериментальном отношении более удобна, так как позволяет варьировать инерционные свойства генератора регулировкой постоянной времени фильтра, что практически неосуществимо при использовании термистора.

Вид уравнений (8) не изменится, если в качестве селективного элемента использовать RC -цепочку в виде моста Вина. Для обеспечения условий генерации в этом случае нужно применить два каскада усиления, как это показано на рис. 3. Для симметричного моста Вина управляющие параметры m и g в уравнениях (8) просто и с точки зрения эксперимента удобным образом выражаются через параметры схемы:

$$m = K_0 - 3, g = R_0 C_0 / \tau_f, \quad (10)$$

где K_0 – коэффициент усиления двухкаскадного усилителя; $R_0 C_0$ и τ_f – постоянные вре-



мени моста Вина и фильтра детектора. В физическом эксперименте параметры m и g лег-

ко менять и измерять, варьируя коэффициент усиления и постоянную времени фильтра.

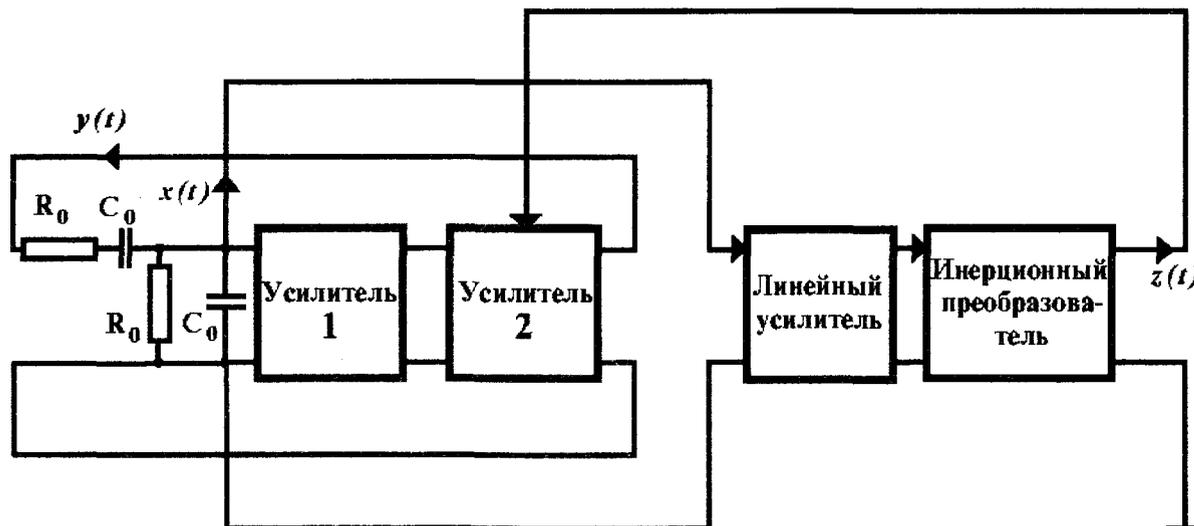


Рис. 3. Схема RC-генератора с инерционной нелинейностью. Именно эта схема была реализована В.В. Астаховым

Как показали исследования, динамика генератора, моделируемого уравнениями (8), принципиальным образом зависит от вида функции $\Phi(x)$, т.е. от свойств инерционного преобразователя. Если $\Phi(x)$ представляет собой симметричную функцию, то уравнения (8) имеют в качестве решения только предельный цикл. Однако, если $\Phi(x)$ не является симметричной (например, $\Phi(x) = \exp(x) - 1$), то модель (8) может иметь как периодические, так и хаотические решения. Более детальные исследования показали, что асимметрия $\Phi(x)$ является необходимым условием для реализации в модели (8) особой траектории типа петли сепаратрисы седло-фокуса. Именно наличие особой траектории является фундаментальной причиной рождения режимов детерминированного хаоса. В качестве примера функции $\Phi(x)$, при которой модель (8) приобретает свойства генератора хаоса, выберем

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

С физической точки зрения это соответствует использованию однополупериодного детектора в схеме инерционного преобразователя.

Определив функцию $\Phi(x)$ в соответствии с (11), из (8) получаем уравнения модифицированного генератора с инерционной

нелинейностью, представляющие собой трехмерную трехпараметрическую нелинейную диссипативную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Исключением переменной y уравнения генератора с инерционной нелинейностью (12) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (m - z - 3dx^2)\dot{x} + [1 - gz + g\Phi(x)]x &= 0, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Автоматически регулируемый нелинейный осциллятор (13) характеризуется инерционной зависимостью диссипации (коэффициент перед \dot{x}) и частоты (коэффициент перед x) от переменной x . В случае сильной инерционности системы ($\tau_f \gg T_0$), когда $g \rightarrow 0$, система вырождается в двумерную:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x &= 0, \\ a = m, \quad b = 3d/m, \end{aligned} \quad (14)$$

и независимо от вида функции $\Phi(x)$ совпадает по форме записи с уравнениями генератора Ван дер Поля.

Другой асимптотический случай – безынерционный генератор, соответствующий росту параметра g до бесконечности. Из третьего уравнения системы при этом условии следует алгебраическая взаимосвязь пе-



ременных x и z , сводящая исходную систему к виду

$$\ddot{x} - [m - \Phi(x) - 3dx^2]\dot{x} + x = 0. \quad (15)$$

Полная аналогия с уравнением Ван дер Поля в этом предельном случае достигается при условии $\Phi(x) = x^2$.

В реальном генераторе с инерционной нелинейностью область значений параметра инерционности g , в которой система ведет себя принципиально как трехмерная, ограничена некоторым интервалом $g_1 \leq g \leq g_2$. За его пределами приближенным описанием могут служить рассмотренные выше асимптотические уравнения на фазовой плоскости.

Математическая модель модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (12) есть нелинейная трехмерная диссипативная система с тремя независимыми параметрами, задающая поток в \mathbf{R}^3 :

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < \infty,$$

где переменная z определена на положительной полуоси, так как с физической точки зрения представляет собой положительное напряжение на выходе фильтра. Дивергенция векторного поля скоростей потока (12) зависит от параметров и фазовых координат:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = m - g - 3dx^2 - z. \quad (16)$$

Исследования в квазилинейном приближении $m < g \ll 1$ свидетельствуют о том, что система глобально диссипативна и что для любых начальных данных всегда справедливо $\langle \operatorname{div} \mathbf{F} \rangle < 0$. В квазилинейном приближении $z \approx m$ и независимо от координаты x дивергенция отрицательна. При $m > g$, где g — конечно (наиболее интересная область генерирования нелинейных колебаний), знак дивергенции зависит от координат. Условием диссипативности является

$$m - g < z + 3dx^2. \quad (17)$$

Для автоколебаний при $d \neq 0$ это условие всегда выполняется. В этом смысле параметр d определяет безынерционную диссипативную нелинейность системы. Если же усилитель работает на линейном участке характеристики и нелинейное ограничение амплитуды за счет инерционной цепи обратной связи наступает раньше, чем значения пере-

менной x выйдут в область нелинейности характеристики $S(x)$, то выражение (17) принимает вид

$$m - g < z(\tau). \quad (18)$$

Последнее неравенство разделяет фазовое пространство системы на две области плоскостью $z = z^0 = m - g$. Для $z > z^0$ система диссипативна, для $z < z^0$ фазовый объем в локальной окрестности любой траектории системы расширяется. Стационарные режимы автоколебаний реализуются в том случае, когда подкачка энергии и ее расход в среднем по времени компенсируются, что возможно при условии

$$m - g < \bar{z}, \quad (19)$$

где \bar{z} — среднее по времени значение переменной $z(\tau)$. Для достаточно больших m неравенство (19) может не выполняться и траектории системы будут уходить в бесконечность, если диссипативная нелинейность отсутствует ($d = 0$).

Система (8) характеризуется единственной особой точкой в начале координат. Если функция $\Phi(x)$ не содержит линейных по x членов, линеаризация системы в особой точке приводит к характеристическому уравнению

$$(g + s)(s^2 - ms + 1) = 0, \quad (20)$$

собственные значения которого есть

$$s_{1,2} = m/2 \pm (i/2)\sqrt{4 - m^2}, \quad s_3 = -g. \quad (21)$$

В области параметров $g > 0, -2 < m < 0$ действительные части всех собственных значений отрицательны и особая точка устойчива. С физической точки зрения параметр g всегда положителен как отношение характерных времен системы: периода колебаний ко времени релаксации фильтра. Параметр m может быть как меньше нуля (генератор недовозбужден), так и больше нуля (в режимах генерации). В области $0 < m < 2$ особая точка есть седло-фокус с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (21). Линия $m = 2$ — бифуркационная и отвечает смене седло-фокуса на седло-узел.

Как следует из (21), в системе (8) имеется уникальная возможность независимого управления свойствами устойчивого и неустойчивого многообразий. В режиме генерации ($m > 0$) состояние равновесия характеризуется двумерным неустойчивым многообра-



зием и одномерным устойчивым, что определяется независимыми параметрами m и g .

Как видно из (21), в бифуркационной точке $m = 0$ собственные значения $s_{1,2}$ пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью:

$$\partial \operatorname{Re} s_{1,2}(m) / \partial m |_{m=0} = 1/2.$$

При этом третье собственное значение $s_3 = -g$ отделено от мнимой оси. Реализуется классическая бифуркация Андронова–Хопфа: бифуркация рождения цикла из седло-фокуса.

3. О НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВАХ УСИЛИТЕЛЬНОГО КАСКАДА ГЕНЕРАТОРА

Вернемся к вопросу, который обсуждался во Введении. Мы конструировали генератор, в котором усилительный каскад должен характеризоваться управляемым падающим участком и иметь характеристику типа перевернутой параболы. Имея уравнения (8) и схему генератора (см. рис. 2), мы можем провести необходимые расчеты. Разорвем цепь в схеме генератора на входе первого усилителя (убрав тем самым обратную связь) и рассчитаем аналитически коэффициент усиления для амплитуды гармонического сигнала резонансной частоты. Получим следующее выражение для амплитуды выходного сигнала:

$$x_{\text{вых}} = \left(1 - \frac{m}{b}\right) \left| 1 - F(g) \frac{x_{\text{вх}}^2}{m+b} \right| x_{\text{вх}}, \quad (22)$$

где b – постоянный коэффициент, зависящий от типа колебательного контура усилителя,

$$F(g) = \frac{1}{4} \frac{(1 + \exp(-\pi g))(1 - \exp(-\pi g))^2}{\pi g(4 + g^2)}.$$

Зависимости $x_{\text{вых}} = \varphi(x_{\text{вх}})$ представлены на рис.4 для нескольких значений m и фиксированного $g = 0.2$. Как видно из рис.4, формула (22) при $g = \text{const}$ описывает однопараметрическое семейство кривых типа параболы, крутизна падающего участка которых увеличивается с ростом m . Другими словами, амплитудная характеристика инерционного усилителя генератора описывается нелинейной функцией, принадлежащей классу отображений Фейгенбаума. Таким образом, введение инерционной обратной связи, управляющей характеристикой усилительного каскада, обеспечивает как наличие падающе-

го участка, так и возможность управления его крутизной.

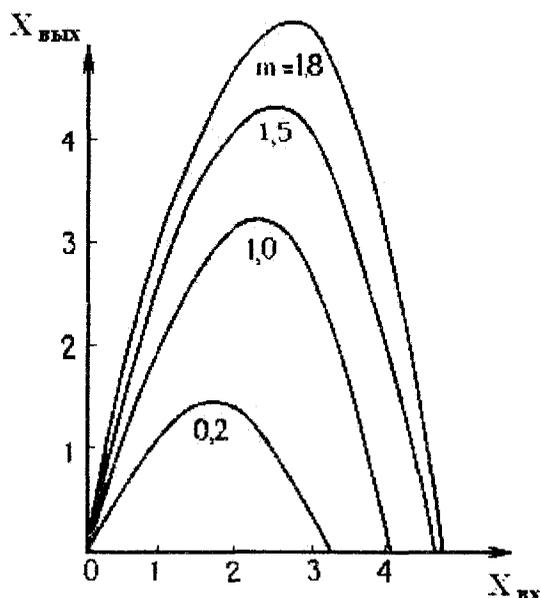


Рис. 4. Зависимости $x_{\text{вых}}$ от $x_{\text{вх}}$ для нескольких значений управляющего параметра m при $g=0.2$ (расчет для схемы см. на рис. 3)

4. ХАОТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР И ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ В ГЕНЕРАТОРЕ

Гомоклинические траектории (точки) как результат грубого пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов (устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых неподвижных точек) со временем открытия и изучения их А. Пуанкаре, Г. Биркгофом и С. Смейлом служат своего рода сигналом бедствия, предвещающим возможность сложного аperiодического движения системы. Из существования гомоклинических траекторий при некоторых дополнительных предположениях следует наличие в их окрестности счетного множества устойчивых и неустойчивых периодических траекторий различных периодов, включая континуум траекторий, устойчивых по Пуассону.

Одним их фундаментальных результатов в теории динамического хаоса является теорема Шильникова о седло-фокусе [3, 4]. Суть теоремы в том, что если в динамической системе существует двояко-асимптотическая траектория в виде петли сепаратрисы седло-фокуса, то в ее окрестности возникает нетривиальное гиперболическое под-



множество траекторий. Это подмножество может оказаться притягивающим, и тогда в эксперименте будет наблюдаться хаотический аттрактор как образ детерминированного хаоса.

Многосторонний экспериментальный анализ механизмов возникновения и топологической структуры хаотических притягивающих множеств в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью обоснованно привел к мысли о существовании в автономной динамической системе гомоклинической траектории типа *петли сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокус*.

Первые попытки найти петлю сепаратрисы в уравнениях генератора (8) к успеху не привели. Более того, выяснилось, что такого решения эти уравнения точно не имеют. Покажем, что это так. Особая точка системы характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Заменим время в (8) на обратное и зададим начальные условия $x(0) = y(0) = 0, z(0) > 0$ на одномерном неустойчивом многообразии. Интегрирование системы подтвердит уход траектории на бесконечность вдоль оси z . Из уравнений (8) следует, что $z(\tau) = z(0) \exp(g\tau)$. Траектория при $\tau \rightarrow \infty$ в особую точку не возвращается!

Возникла гипотеза, которая оказалась весьма успешной. Петля сепаратрисы седло-фокуса существует в некоторой возмущенной системе. Снятие возмущения приводит к исчезновению самой петли, но структура разбиения фазового пространства на траектории остается. Чтобы подтвердить эти соображения, нужно определить вид слабо возмущенной системы, доказать наличие в ней петли сепаратрисы седло-фокуса, выяснить структуру аттракторов и изучить их эволюцию при снятии возмущения. Решение указанной задачи неоднозначно, но в силу свойства грубости конкретный вид малого возмущения не должен иметь принципиального значения.

Добавим во второе уравнение исходной системы (8) постоянный положительный член γ и рассмотрим возмущенную таким способом систему [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \dot{y} = -x + \gamma, \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Особая точка потока (23) по-прежнему единственная, слегка смещена относительно начала координат и представляет собой седло-фокус. Ее координаты: $x^0 = \gamma, y^0 = \gamma(\gamma^2 - m), z^0 = \gamma^2$. Состояние равновесия в возмущенной системе (23) для $m > 0$ характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Для нахождения петли Γ_0^1 в уравнениях системы произведем замену времени на обратное и с начальными условиями на одномерном неустойчивом многообразии решим многократно задачу Коши для фиксированного $g = 0.3$ и различных m и γ . Выбрав малое значение $\gamma = 0.1$, найдем бифуркационную точку $m^* = 1.176\dots$, в которой реализуется однообходная петля седло-фокуса Γ_0^1 . Трехмерное изображение двоякоасимптотической траектории Γ_0^1 приведено на рис. 5, и при отклонении любого из управляющих параметров системы (23) она, естественно, разрушается. Детальные расчеты бифуркационных диаграмм для системы (8) и возмущенной системы (23) подтвердили их полную качественную эквивалентность [5]. На основании этого можно утверждать, что структура и свойства хаоса в системе (8) полностью определяются фактом существования петли сепаратрисы седло-фокуса в системе (23).

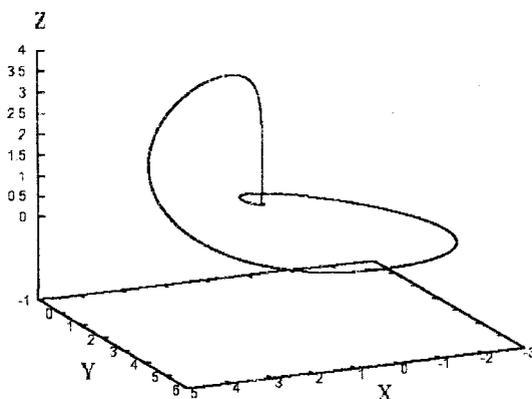


Рис. 5. Петля сепаратрисы седло-фокуса в возмущенной системе (23) для $m = 1.176$ и $g = 0.3$

Экспериментальные и численные исследования убедительно доказали возможность



генерации хаотических автоколебаний различной структуры и взаимосвязь эффекта детерминированного хаоса с петлей сепаратрисы седло-фокуса в системе (8). В качестве примера на рис. 6 приведены проекции хаотических траекторий на плоскость (x, y) , отвечающие так называемому *спиральному типу* аттрактора. Пример *винтового аттрактора* приведен на рис. 7. На этом же рисунке представлена петля сепаратрисы седло-фокуса Γ_0 . Видно, что хаотические траектории спирального аттрактора представляют собой как бы «размытый» двухтактный цикл (рис. 6), а винтового аттрактора – «размытую» петлю сепаратрисы Γ_0 . Указанные результаты были получены численно. Однако все они воспроизводятся в физическом эксперименте. При этом имеет место удивительно хорошее соответствие экспериментальных и численных результатов. В качестве примера на рис. 8 приведены фотографии аттрактора, полученного в эксперименте.

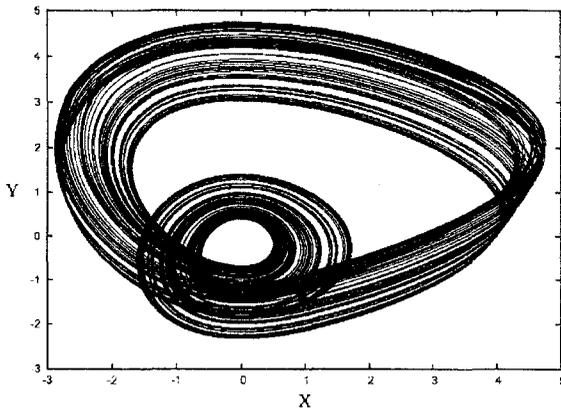


Рис. 6. Проекция хаотического аттрактора спирального типа на плоскость (x, y) в системе (12) при $d = 0, m = 1.563, g = 0.17$

Анализ динамики генератора в режиме хаоса показал, что в отображении Пуанкаре система характеризуется отображением последования, которое близко к одномерной параболе Фейгенбаума. Результаты расчетов представлены на рис. 9.

Можно сделать следующий принципиально важный вывод. Для реализации простейшего типа генератора хаотических автоколебаний необходимо и достаточно:

- создать усилительный каскад с резонансным контуром на входе, обеспечивающий характеристику типа перевернутой параболы с управляемой крутизной падающего участка;

- ввести положительную обратную связь, удовлетворяющую всем условиям возбуждения автоколебаний.

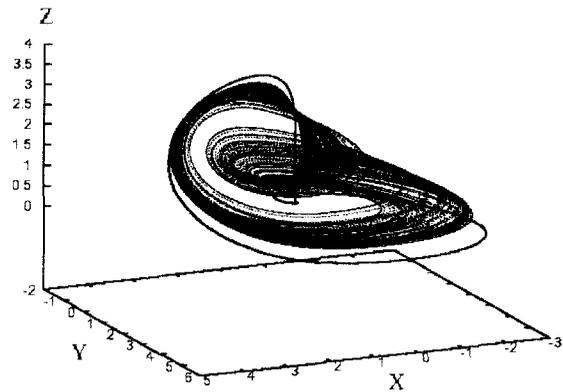


Рис. 7. Хаотический аттрактор винтового типа и петля сепаратрисы седло-фокуса в системе (12) и (23) соответственно

В генераторе Анищенко–Астахова необходимая характеристика усилителя реализована за счет инерционной обратной связи с использованием однополупериодного детектора в качестве нелинейности. Мы уверены, что это далеко не единственный практический способ достижения результата, существуют и другие пути.

В заключение данного параграфа отметим следующий важный факт. Большинство результатов, полученных с использованием генератора, относится к модели (12) с видом нелинейной функции (11) при $d = 0$. С точки зрения физического и численного экспериментов это оправдано. Однако в математическом плане есть некоторая особенность. Функция (11) в нуле терпит разрыв производной, т.е. является негладкой. Это обстоятельство приводит к ряду математических осложнений. Было установлено, что основные свойства генератора слабо зависят от таких математических тонкостей. В частности, генератор демонстрирует весь спектр свойств, если представить функцию $\Phi(x)$ в виде экспоненты

$$\Phi(x) = \exp(x) - 1. \quad (24)$$

Эта функция является гладкой, аналитической и может с успехом быть использована при теоретическом анализе свойств системы (12).

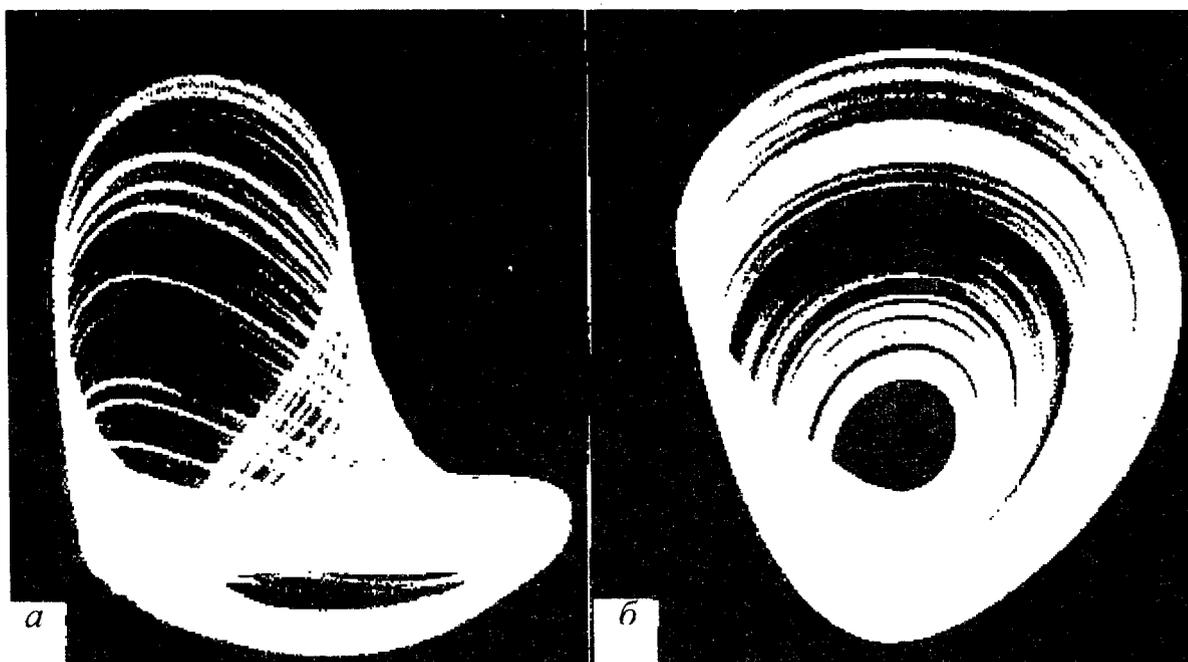


Рис. 8. Проекция фазовой траектории спирального аттрактора на плоскости переменных (x, z) (а) и (x, y) (б) (физический эксперимент, $m = 1.5, g = 0.2$)

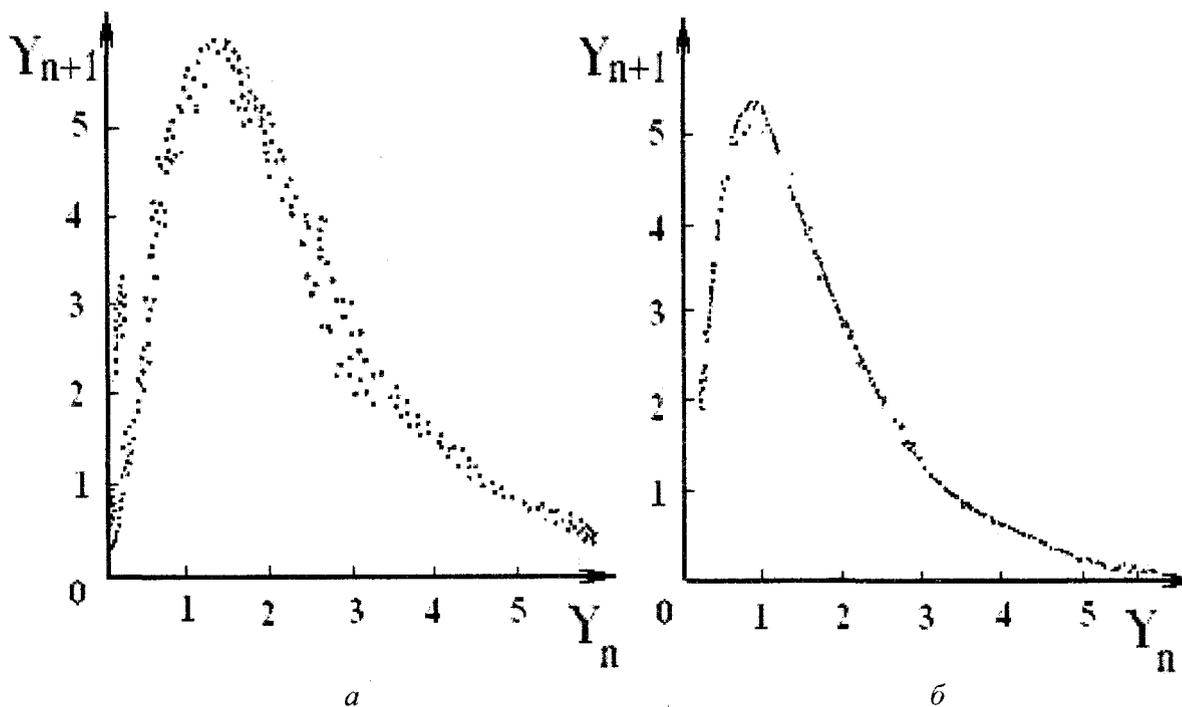


Рис. 9. Одномерные отображения $y_{n+1} = f(y_n)$, построенные численно для $g = 0.097$ (а) и $g = 0.3$ (б) в первой критической зоне странного аттрактора

Исследования, проведенные недавно С. Николаевым, показали, что в возмущенной системе (8) с $\Phi(x) = \exp(x) - 1$ также

реализуется особое решение в виде петли сепаратрисы. Результаты расчетов представлены на рис. 10. Таким образом, генератор



Анищенко–Астахова реализует режим детерминированного хаоса и в случае задания нелинейного детектора в соответствии с (24).

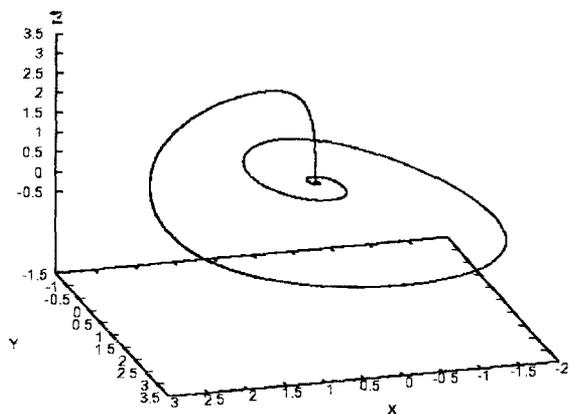


Рис. 10. Петля сепаратрисы седло-фокуса, реализующаяся в возмущенной системе (23) с $\Phi(x) = \exp(x) - 1$

5. ОСНОВНЫЕ ЭФФЕКТЫ И СВОЙСТВА ХАОСА, ВПЕРВЫЕ УСТАНОВЛЕННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕРАТОРА АНИЩЕНКО–АСТАХОВА

Широкий спектр возможностей управления бифуркационными свойствами генератора путем вариации параметров, относительная простота физического эксперимента и скорость получения результатов в реальном времени в сочетании с возможностью адекватного численного моделирования весьма сложных режимов колебаний – все это позволило в относительно короткий период времени получить ряд интересных результатов. Многие среди них были получены впервые и являются приоритетными. В настоящем параграфе мы кратко остановимся на основных результатах и эффектах, которые получили признание международной научной общественности и широко цитируются в литературе.

5.1. Многопараметрический анализ динамики генератора, механизмы развития хаоса, перемежаемость типа «хаос-хаос»

На модели генератора впервые был проведен двухпараметрический бифуркационный анализ динамики как в численном, так и в физическом экспериментах [6–10]. Было установлено, что все известные сценарии переходов к хаосу реализуются в одной системе: сценарий Фейгенбаума, переход через перемежаемость и через разрушение квазиперио-

дических колебаний. Последний сценарий исследовался в неавтономном режиме работы генератора [11–15]. Впервые было показано, что универсальность Фейгенбаума имеет место при изменении любого из трех управляющих параметров генератора m , g и d (см. уравнения (8)) и характеризуется знаменитой константой Фейгенбаума $\delta = 4.669\dots$, измеренной с высокой степенью точности. Анализ структуры спирального хаоса в генераторе подтвердил справедливость всех без исключения фундаментальных закономерностей, полученных для одномерных отображений типа параболы [7, 8, 10]. Более того, был подтвержден один из важных результатов эргодической теории хаоса о взаимосвязи различных размерностей хаотического аттрактора (метрической D_μ , информационной D_I и корреляционной D_C) [16]. Этот результат выражается неравенством

$$D_\mu > D_I > D_C.$$

Анализ размерностей аттрактора в генераторе привел к следующим результатам: $D_\mu = 2.306 \pm 0.015$, $D_I = 2.300 \pm 0.013$, $D_C = 2.277 \pm 0.017$, что впервые дало возможность предполагать выполнение полного равенства

$$D_\mu = D_I = D_C \cong 2.29.$$

Исследования динамики генератора впервые четко и ясно вскрыли суть квазигиперболического хаоса и его отличия от теоретически описанного гиперболического [9]. В частности, впервые был обнаружен эффект кризиса аттракторов с возникновением перемежаемости типа «хаос-хаос» [17]. При разрушении за счет фрактализации бассейнов притяжения двух различных хаотических аттракторов при изменении параметра возникает явление перемежаемости, когда траектория большую часть времени проводит на одном аттракторе и случайным образом переключается на другой и так далее. Эффект подобен перемежаемости «цикл-хаос», но при этом имеет место взаимодействие двух хаотических аттракторов.

Наконец, отметим еще один результат. На модели генератора впервые исследовано влияние внешнего шума. При анализе зависимости старшего показателя Ляпунова от параметра впервые введено предположение о



существовании ляпуновских показателей для зашумленных систем и произведены их расчеты [9]. Отметим, что теоретическое обоснование этому было дано немецким математиком Л. Арнольдом много лет позже.

5.2. Разрушение квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения тора

Одним из типичных механизмов перехода к хаосу являются сценарии Ланду–Хопфа и Рюэля–Такенса, общим для которых служит каскад определенных бифуркаций квазипериодических движений [18–21]. В распределенных системах возникновению хаоса, как правило, предшествуют режимы автомодуляции, усложнение и бифуркации которых и порождают хаотические автоколебания. Генератор Анищенко–Астахова явился очень удобной моделью для исследования таких бифуркаций в «чистом виде», так как он характеризуется минимальной необходимой размерностью фазового пространства для изучения бифуркаций двумерных торов.

С использованием генератора впервые в численном и физическом экспериментах были детально исследованы все бифуркационные механизмы разрушения двумерного резонансного тора, установленные теоретически [12–14]. Были полностью подтверждены основные результаты теоремы Афраймовича–Шильникова для резонансного тора. Более того, получен ряд фундаментальных результатов, поясняющих картину разрушения эргодического тора и перехода к хаосу через потерю тором гладкости. Общность полученных фундаментальных результатов была детально доказана путем сопоставления их с выводами качественной теории, а также использованием в экспериментах различных модельных систем (неавтономный генератор, два связанных генератора, соответствующие отображения).

При исследовании проблемы разрушения квазипериодических колебаний впервые было открыто новое явление – бифуркации удвоения периода двумерного эргодического тора [22]. Математики долгое время не могли поверить в возможность реализации такой бифуркации, так как с их точки зрения она должна характеризоваться бесконечной ко-размерностью, что в эксперименте недостижимо. Однако ряд специально проведенных

экспериментов все-таки доказал реальность наблюдаемой бифуркации удвоения тора, что вскоре было подтверждено и рядом зарубежных исследований [13, 14, 23–24].

5.3. Пространственная бифуркация удвоения периода. Насыщение размерности аттрактора

Одним из способов описания динамики распределенной активной среды является, как известно, рассмотрение свойств цепочки взаимосвязанных генераторов. Опыт исследования подобных систем оказался плодотворным и используется в нелинейной динамике по настоящий день. Одной из первых работ по исследованию сложной динамики цепочки однонаправлено связанных генераторов хаоса явилась статья [25], в которой теоретически и экспериментально исследовалась система из 10 связанных генераторов Анищенко–Астахова. При этом было впервые установлено следующее. Во-первых, при движении вдоль цепочки наблюдается переход к хаосу через каскад пространственных бифуркаций удвоения периода! Дискретный характер системы обуславливает конечное число бифуркаций удвоения при переходе к режиму хаоса. Во-вторых, установлен режим гиперхаоса, который реализуется при малом уровне коэффициента связи и характеризуется наличием 10 положительных показателей Ляпунова (и, соответственно, высокой размерностью $D > 10$). И, наконец, с ростом величины коэффициента связи в системе имеет место уменьшение размерности хаотического аттрактора. В итоге наблюдается эффект насыщения размерности и устанавливается пространственно однородный хаотический режим с относительно малой величиной размерности аттрактора ($D \cong 5-6$) [25–26]. Эффект насыщения (стабилизации) размерности аттрактора в цепочке связанных генераторов был назван режимом хаотической синхронизации. Впоследствии подобные эффекты стали наблюдаться и исследоваться в широком классе различных систем нелинейной динамики, таких, например, как газоразрядная плазма [27].

5.4. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация хаоса

С начала 80-х гг. прошлого века исследователи хаотических колебаний в той или иной мере сталкивались с явлениями, кото-



рые напоминали фундаментальный эффект синхронизации колебаний. Вводились различные определения хаотической синхронизации, основанные на эффектах стабилизации размерности, увеличении степени симметризации типов колебаний, стабилизации характеристик колебаний и др. При этом ученые не замечали одного из фундаментальных явления, а именно эффекта захвата частоты, который составляет основу классического понимания эффекта синхронизации. Впервые такой подход к определению эффекта синхронизации хаотических автоколебаний был предложен в работе [28], где была убедительно показана взаимосвязь явления хаотической синхронизации с классическими представлениями теории колебаний.

В работе [29] и последующих за ней [30, 31] исследовался режим внешней и взаимной синхронизации хаотических колебаний, представляющих собой так называемый спиральный или фазокогерентный аттрактор. Особенностью такого типа хаоса является наличие в спектре колебаний яркого выброса на некоторой базовой частоте и широкополосного шумового пьедестала. Режим спирального хаоса был реализован с использованием генератора Анищенко–Астахова. Внешняя синхронизация изучалась при гармоническом внешнем воздействии, а взаимная – в системе двух симметрично связанных генераторов.

Впервые было показано, что наблюдается эффект захвата базовой частоты внешним сигналом и область захвата частоты на плоскости параметров «амплитуда воздействия – частота сигнала» имеет вид «клюва Арнольда», характерного для классического случая внешней синхронизации периодических автоколебаний. На границах области синхронизации имеет место жесткая бифуркация, отвечающая переходу «несинхронный хаос – синхронный хаос», качественно эквивалентная седло-узловой бифуркации в классическом случае. Аналогичная картина наблюдается и для случая взаимной синхронизации. Полученные в работе [29] результаты были подтверждены более тонкими численными экспериментами [30–31] и легли в основу построения теории синхронизации хаотических автоколебаний на базе использования классической теории колебаний. Отметим,

что описанный в этом параграфе эффект синхронизации путем захвата базовой частоты спирального хаоса был «переоткрыт» авторами работы [32] при использовании синхронизации спирального аттрактора в системе Ресслера много лет спустя.

5.5. Спектрально-корреляционный анализ спирального хаоса

Описанные выше результаты в основном были получены в 1980-х гг. и их можно отнести к истории первых исследований детерминированного хаоса. Как показывает опыт, базовые модели теории колебаний с годами не теряют своей значимости и помогают в решении возникающих современных задач. В качестве примера приведем результаты исследований статистических свойств спиральных аттракторов, которые были проведены относительно недавно с использованием модели генератора Анищенко–Астахова [33, 34].

Спектр мощности спирального хаоса характеризуется ярко выраженным пиком на некоторой основной частоте и сплошным шумовым пьедесталом. Он напоминает качественно спектр колебаний зашумленного предельного цикла в генераторе Ван дер Поля. Однако принципиальным отличием является то, что спиральный аттрактор описывается динамической системой, а зашумленный предельный цикл – стохастической! Исследования показали, что основные теоретические результаты описания спектрально-корреляционных характеристик зашумленного предельного цикла в генераторе Ван дер Поля применимы к модели спирального хаоса. В частности, численно и экспериментально было установлено, что скорость спада автокорреляций на больших временах подчиняется экспоненциальному закону с показателем затухания, определяемым эффективным коэффициентом диффузии мгновенной фазы B_{eff} [33]:

$$\Psi(\tau) = \Psi(0) \exp[-B_{eff} \tau]. \quad (25)$$

На малых временах скорость спада $\Psi(\tau)$ зависит от статистики флуктуаций мгновенной амплитуды. Спектр мощности включает выброс на основной частоте, который является лоренцианом с шириной, определяемой B_{eff} .



$$S(\omega) = C \frac{B_{eff}}{B_{eff}^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad C = \text{const.} \quad (26)$$

Впервые было показано, что скорость перемешивания в режиме спирального хаоса в основном определяется диффузией фазы, а не положительным показателем Ляпунова, как принято было считать. А это означает, что энтропия Колмогорова как фундаментальная характеристика степени перемешивания также зависит здесь в первую очередь от коэффициента диффузии фазы.

Фундаментальность указанных результатов определяется еще и тем, что они впервые в деталях показывают применимость статистического описания к режимам автоколебаний в детерминированной системе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре приведена история создания генератора Анищенко-Астахова, описана его модель и перечислен ряд важных, с точки зрения авторов статьи, научных результатов, полученных с применением этой модели. Есть все основания надеяться, что описанная модель генератора хаоса как одна из базовых моделей современной теории нелинейных колебаний будет и в дальнейшем полезна в исследованиях и послужит основой для открытия новых эффектов.

В заключение мы хотели бы выразить благодарность Г.И. Стрелковой, А.В. Клишину и С.М. Николаеву за большую работу по подготовке обзора к печати.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант НОЦ REC-006) и РФФИ (грант 04-02-16283).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анищенко В.С. К вопросу о стохастических колебаниях радиосистем с обратной связью // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1981. Т. 3. С. 341–343.
2. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // ЖТФ. 1946. Т. 16, вып.7. С. 845–854.
3. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Мат. сб. 1963. Т. 61, №104. С. 443–466.
4. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седлофокуса // Мат. сб. 1970. Т. 81, №123. С. 92–103.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М., 1990.
6. Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е. Многочастотные и стохастические автоколебания в генераторе с

инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, №10. С. 1972–1978.

7. Анищенко В.С., Астахов В.В. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1109–1115.
8. Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. О бифуркациях в трехмерной двухпараметрической системе со странным аттрактором // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 2. С. 169–176.
9. Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. К вопросу о структуре квазигиперболической стохастичности в инерционном генераторе // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1983. Т. 26, №7. С. 832–842.
10. Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е. Экспериментальное исследование структуры странного аттрактора в модели генератора с инерционной нелинейностью // ЖТФ. 1983. Т. 53, № 1. С. 152–154.
11. Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. Разрушение квазипериодического движения за счет удвоенной и стохастичность в системе связанных генераторов // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 5. С. 565–575.
12. Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. Двупараметрический анализ динамики неавтономной трехмерной системы со странным аттрактором // X Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. София, 1985. С. 243–246.
13. Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 9. С. 1112–1125.
14. Анищенко В.С. Разрушение квазипериодических колебаний и хаос в диссипативных системах // ЖТФ. 1986. Т. 56, № 2. С. 225–237.
15. Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сонечкин Д.М. Универсальные закономерности мягкого перехода к хаосу через режим двухчастотных колебаний // ЖТФ. 1988. Т. 58, вып.5. С. 849–858.
16. Анищенко В.С., Сафонова М.А. Сравнительный анализ различных размерностей хаотического аттрактора // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 12. С. 41–46.
17. Анищенко В.С. Взаимодействие странных аттракторов. Пережимаемость «хаос-хаос» // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, вып.10. С. 629–633.
18. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339–342.
19. Hopf E.A. A mathematical example displaying the features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. V.1. P. 303–322.
20. Newhouse S. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1974. V. 12. P. 8–18.
21. Newhouse S.E. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphism // IHES Publ. Math. 1979. V.50. P. 101–157.
22. Анищенко В.С. Индуцированные внешним воздействием фазовые переходы в радиофизической системе со странным аттрактором // Флуктуационные явления в физических системах. Тез. докл. III Всесоюз. конф. Вильнюс, 1983. С. 24–26.
23. Franceschini V. Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations // Physica D. 1983. V. 6, № 3. P. 285–304.



24. Kaneko K. Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. Singapore: World Scientific, 1986.

25. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Докл. АН СССР. 1986. Т. 28, № 5. С. 1120–1124.

26. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 12, вып.24. С. 1505–1509.

27. Анищенко В.С., Мелехин Г.В., Степанов В.А., Чуркин М.В. Механизмы возникновения и эволюция хаоса в стратифицированном положительном столбе газового разряда // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 8. С. 903–912.

28. Анищенко В.С. Биения, синхронизация и хаос в системах типа связанных нелинейных осцилляторов // X Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. София, 1985. С. 48–51.

29. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация

странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып.6. С. 569–573.

30. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 2. С. 338–351.

31. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safoнова M.A. Synchronization of chaos // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2, № 3. P. 633–644.

32. Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillations // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, № 11. P. 1804–1807.

33. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kurths J. et al. Auto-correlation function and spectral linewidth of spiral chaos in a physical experiment // Phys. Rev. E. 2004. V. 69, 036215 (1-4)

34. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Okrokovskhov G.A. Statistical properties of dynamical chaos // Math. Biosciences and Engineering. 2004. V. 1, № 1. P. 161–184.

УДК 621.371

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТКРЫТЫХ СТРУКТУР

М.В. Давидович

Саратовский государственный университет,
кафедра радиотехники и электродинамики
E-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

Получены нестационарные электродинамические уравнения возбуждения открытых резонаторов и волноводных трансформаторов, основанные на методе функций Грина. Для открытого резонатора получены также аналогичные формулы, основанные на спектральном подходе. В общем виде задача о возбуждении сводится к интегральным уравнениям в пространственно-временной области. Полученные уравнения можно использовать для решения задач о возбуждении, распространении и дифракции импульсов в неоднородных диэлектрических волноводах, открытых волноводах других типов, открытых резонаторах и других открытых структурах.

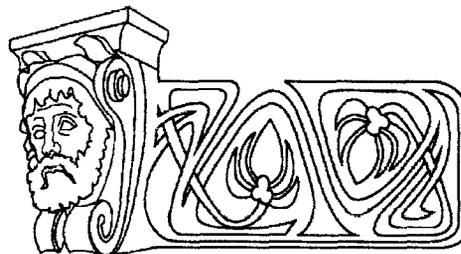
NONSTATIONARY EXCITATION OF OPEN STRUCTURES

M.V. Davidovich

The nonstationary theory of excitation for open resonators, waveguides and waveguide transformers has been developed. The open structures which are contained dielectric, magnetic and metallic bodies have been considered.

ВВЕДЕНИЕ

Теория возбуждения структур заданными (сторонними) источниками является важной частью прикладной электродинамики. Стационарная теория возбуждения закрытых



волноводов и резонаторов Л.А. Вайнштейна [1, 2], дающая решение задач о возбуждении данных структур в общем виде, широко используется в электродинамике (в теории антенн и в других ее разделах), а также в технике и электронике СВЧ. Для квазистационарного возбуждения резонаторов эта теория обобщена в [2], однако в этом случае она носит приближенный характер и справедлива лишь для медленно меняющихся амплитуд (огibaющих), т.е. для процессов с узким спектром. Часто стационарную теорию возбуждения структур с координатными границами строят, непосредственно используя тензорные функции Грина (ФГ) или соответствующие неоднородные решения волновых уравнений для электродинамических потенциалов в соответствующих системах координат [3–5].

Строгое решение для нестационарного возбуждения закрытых волноводов и резонаторов получено в работах [6–7], где определены в общем виде соответствующие четырехмерные тензорные ФГ, удовлетворяющие