



24. Kaneko K. Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. Singapore: World Scientific, 1986.
25. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Докл. АН СССР. 1986. Т. 28, № 5. С. 1120–1124.
26. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 12, вып.24. С. 1505–1509.
27. Анищенко В.С., Мелехин Г.В., Степанов В.А., Чуркин М.В. Механизмы возникновения и эволюция хаоса в стратифицированном положительном столбе газового разряда // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 8. С. 903–912.
28. Анищенко В.С. Биения, синхронизация и хаос в системах типа связанных нелинейных осцилляторов // X Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. София, 1985. С. 48–51.
29. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып.6. С. 569–573.
30. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 2. С. 338–351.
31. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safoнова M.A. Synchronization of chaos // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2, № 3. P. 633–644.
32. Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillations // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, № 11. P. 1804–1807.
33. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kurths J. et al. Auto-correlation function and spectral linewidth of spiral chaos in a physical experiment // Phys. Rev. E. 2004. V. 69, 036215 (1–4)
34. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Okrokovtshkhov G.A. Statistical properties of dynamical chaos // Math. Biosciences and Engineering. 2004. V. 1, № 1. P. 161–184.

УДК 621.371

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТКРЫТЫХ СТРУКТУР

М.В. Давидович

Саратовский государственный университет,
кафедра радиотехники и электродинамики
E-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

Получены нестационарные электродинамические уравнения возбуждения открытых резонаторов и волноводных трансформаторов, основанные на методе функций Грина. Для открытого резонатора получены также аналогичные формулы, основанные на спектральном подходе. В общем виде задача о возбуждении сводится к интегральным уравнениям в пространственно-временной области. Полученные уравнения можно использовать для решения задач о возбуждении, распространении и дифракции импульсов в неоднородных диэлектрических волноводах, открытых волноводах других типов, открытых резонаторах и других открытых структурах.

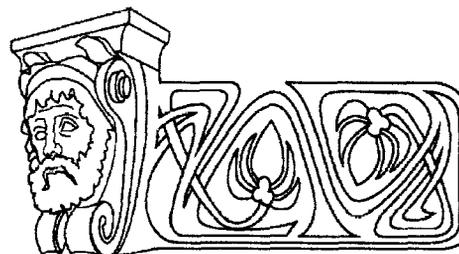
NONSTATIONARY EXCITATION OF OPEN STRUCTURES

M.V. Davidovich

The nonstationary theory of excitation for open resonators, waveguides and waveguide transformers has been developed. The open structures which are contained dielectric, magnetic and metallic bodies have been considered.

ВВЕДЕНИЕ

Теория возбуждения структур заданными (сторонними) источниками является важной частью прикладной электродинамики. Стационарная теория возбуждения закрытых



волноводов и резонаторов Л.А. Вайнштейна [1, 2], дающая решение задач о возбуждении данных структур в общем виде, широко используется в электродинамике (в теории антенн и в других ее разделах), а также в технике и электронике СВЧ. Для квазистационарного возбуждения резонаторов эта теория обобщена в [2], однако в этом случае она носит приближенный характер и справедлива лишь для медленно меняющихся амплитуд (огibaющих), т.е. для процессов с узким спектром. Часто стационарную теорию возбуждения структур с координатными границами строят, непосредственно используя тензорные функции Грина (ФГ) или соответствующие неоднородные решения волновых уравнений для электродинамических потенциалов в соответствующих системах координат [3–5].

Строгое решение для нестационарного возбуждения закрытых волноводов и резонаторов получено в работах [6–7], где определены в общем виде соответствующие четырехмерные тензорные ФГ, удовлетворяющие



принципу причинности и релятивистской инвариантности. Возбуждение таких структур с включением диэлектриков и магнетиков (в том числе и нелинейных), а также импедансных тел, может быть сведено к нестационарным интегродифференциальным уравнениям (ИДУ) [6–7]. Стационарное возбуждение структур, состоящих из резонаторов, состыкованных с полубесконечными волноводами (которые обычно называются волноводными трансформаторами (ВТ)), также достаточно подробно рассмотрено в литературе и обычно сводятся к иммитансным (импедансным и адмитансным) поверхностным интегральным уравнениям (ИУ) или ИДУ [8], определенным в областях стыков. Стационарное возбуждение открытых структур может быть сведено к ИУ или ИДУ на поверхности металлических тел и в объеме диэлектрика [9]. Стационарная теория возбуждения замедляющих систем (периодических волноводов) рассматривалась в работах Л.А. Вайнштейна [10], В.А. Солнцева [11], А.Б. Маненкова [12] и других авторов. Стационарная же теория возбуждения открытых диэлектрических волноводов (ДВ) развивалась в работах А.Б. Маненкова и Л.А. Вайнштейна [12–15].

При возбуждении открытых электродинамических или оптических структур импульсными источниками или при распространении сверхкоротких импульсов в таких структурах необходимо использовать нестационарную теорию возбуждения. Однако в общем виде указанные задачи возбуждения до сих пор в литературе не рассматривались. Имеется лишь незначительное число публикаций по нестационарным задачам (например, [16–17]), которые носят в основном частный характер. Формально нестационарную теорию возбуждения можно строить на основе Фурье-обращения формул спектральной теории [17–18]. Однако аналитически такое обращение для структур невозможно (за исключением ФГ открытого пространства), а численное обращение интегралов Фурье сопряжено с непреодолимыми вычислительными трудностями. Часто и решение спектральных задач необходимо получать численно, что еще более усложняет такой подход. Поэтому удобнее искать решения задач о возбуждении непосредственно в простран-

ственно-временной области. Открытые задачи имеют дополнительные трудности, связанные с введением полных систем базисных функций.

Целью настоящей работы является построение теории возбуждения открытых структур в общем виде. С точки зрения постановки задач о возбуждении в открытых структурах уменьшается различие между такими задачами для волноводов и волноводных трансформаторов. Естественно считать, что возбуждение открытого волновода (например, ДВ) есть частный случай возбуждения ВТ, когда два полубесконечных одинаковых ДВ состыкованы непосредственно. Поэтому имеет смысл строить сразу теорию возбуждения ВТ, частным случаем которых будут являться открытые волноводы и резонаторы (для последних полубесконечные волноводы отсутствуют).

1. ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ГРИНА

В этом случае постановка задачи особенно проста. Пусть имеется открытый резонатор, образованный конечными прозрачными телами, занимающими объем V , и телами с импедансной поверхностью S_σ . Под прозрачным телом будем понимать магнитодиэлектрическое тело с проницаемостями ϵ , μ , а под импедансным телом – тело, на поверхности которого выполнено некое импедансное условие. Обычно рассматриваются либо идеально проводящие металлические тела, либо аналогичные тела с импедансным условием Леонтовича [1]. Рассмотрим металлические тела с замкнутыми (для тел конечной толщины) или разомкнутыми (для бесконечно тонких экранов) поверхностями S_i . В первом случае поле внутри тел не рассматривается. В общем случае проницаемости могут являться тензорными интегральными операторами, зависящими от координат, а S – представлять совокупность указанных поверхностей, точно так же как V являться совокупностью объемов V_i прозрачных тел с различными свойствами, что отражено функциональными зависимостями $\epsilon(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$. Будем для простоты считать, что пространственной дисперсии нет, т.е. что эти функции зависят только от текущей пространственной координаты. Тогда простейшие материальные



уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Эти материальные уравнения соответствуют отсутствию также и временной (частотной) дисперсии. Теория возбуждения для таких вакуумоподобных сред строится наиболее простым образом. Однако реально использовать указанные соотношения можно лишь для достаточно медленно меняющихся возбуждающих токов (и соответственно полей). Если в соотношениях (1) проницаемости для какого-то из тел явно зависят от времени, то соответственно можно говорить о параметрическом возбуждении структуры. В общем случае мы будем предполагать, что материальные уравнения заданы в виде соотношений

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_{-\infty}^t \chi(\vec{r}, t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \right\} = \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \varepsilon(\vec{r}, t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt', \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \left\{ \vec{H}(\vec{r}, t) + \int_{-\infty}^t \kappa(\vec{r}, t-t') \vec{H}(\vec{r}, t') dt' \right\} = \\ &= \mu_0 \int_{-\infty}^t \mu(\vec{r}, t-t') \vec{H}(\vec{r}, t') dt', \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon(\vec{r}, t) = \delta(t) + \chi(\vec{r}, t) = 0$ и $\mu(\vec{r}, t) = \delta(t) + \kappa(\vec{r}, t) = 0$ при $t < 0$. Эти соотношения удовлетворяют принципу причинности. Преобразования Фурье от соотношений (2), (3) позволяют ввести спектральные проницаемости

$$\varepsilon(\vec{r}, \omega) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt = 1 + \chi(\vec{r}, \omega), \quad (4)$$

$$\mu(\vec{r}, \omega) = \int_0^{\infty} \mu(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt = 1 + \kappa(\vec{r}, \omega).$$

Указанные проницаемости комплексные, поэтому соотношения (2)–(3) фактически для гармонических процессов вводят потери, связанные с временной дисперсией (запаздыванием отклика) [19]. Можно также ввести явные потери, связанные с токами проводимости в указанных радиопрозрачных телах.

Будем использовать для этого наиболее простые материальные соотношения, имеющие вид

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\sigma}^e(\vec{r}, t) &= \sigma^e(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \\ \vec{J}_{\sigma}^m(\vec{r}, t) &= \sigma^m(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Временной дисперсией здесь мы также пренебрегаем. Естественно, введение потерь ограничивает прозрачность тел. Нестационарное возбуждение приводит к наличию в спектре всех частот, включая бесконечно высокие. Для очень больших частот проницаемости (4) стремятся к единице, и все тела становятся полностью прозрачными (включая и импедансные, поля внутри которых обычно не рассматриваются). Поэтому для конкретного построения модели структуры существенно, какие источники ее возбуждают. Чтобы импедансное тело можно было считать металлическим на некой граничной частоте ω_{\max} , возбуждающие токи должны быть достаточно медленными и такими, чтобы большая часть их спектра лежала ниже указанной частоты. Тогда отношение спектральных мощностей выше и ниже указанной частоты будет определять погрешность моделирования. Обычно в качестве такой граничной частоты берут частоту, на которой плотности тока проводимости и смещения совпадают. Следует заметить, что в нестационарной теории вводится текущее (мгновенное) время t , поэтому спектры следует понимать как мгновенные, зависящие от времени [6–7]. Для мгновенного спектра векторной функции $\vec{F}(\vec{r}, t)$ соотношения Фурье определяются в виде (нижний индекс t означает зависимость спектра от текущего времени)

$$\vec{F}(\vec{r}, \omega)_t = \int_{-\infty}^t \vec{F}(\vec{r}, t') e^{-j\omega t'} dt',$$

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega} \vec{F}(\vec{r}, \omega)_t e^{j\omega t} d\omega.$$

Пусть указанная структура возбуждается объемными электрическими и магнитными токами $\vec{J}_{in}^e(\vec{r}, t)$, $\vec{J}_{in}^m(\vec{r}, t)$, занимающими некоторый объем V_0 . Будем считать, что токи возникают в момент $t = t_0$, а при $t < t_0$



электромагнитное поле отсутствовало. Можно отнести момент начала действия токов к бесконечно удаленному прошлому $t_0 = -\infty$. Тогда для определения полей, например, при $t > 0$, необходимо знать их распределение при $t = 0$ (начальные условия). В случае поверхностных и линейных токов возбуждения эти объемные плотности должны иметь сингулярности в виде дельта-функций, приводящие соответственно к поверхностным и линейным интегралам. Часто рассматривается возбуждение структур точечными диполями, плотность тока которых пропорциональна объемным дельта-функциям. В этом случае интегралы не возникают, а первичные поля пропорциональны соответствующим ФГ, умноженным на временные законы изменения дипольных токов.

При возбуждении поле распространяется от источников и в момент достижения тел возбуждает в них токи поляризации и/или поверхностные токи, которые, в свою очередь, становятся источниками поля. Пусть $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ – полные поля для решения указанной задачи возбуждения, а $\Gamma^{\alpha\beta}(\vec{r}, t)$, $\alpha = e, m$, $\beta = e, m$ – тензорные ФГ свободного пространства [20]. Указанные ФГ выражаются через скалярную ФГ свободного пространства, определяемую формулой (31) приведенной в работе [20]. Они удовлетворяют принципу причинности и определяют электромагнитные поля, возбуждаемые распределенными в объеме V_j токами $\vec{J}^{(e,m)}$, в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{V_j} d\vec{r}' \left\{ \Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}^e(\vec{r}', t') + \Gamma^{em}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}^m(\vec{r}', t') \right\}, \quad (6)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{V_j} d\vec{r}' \left\{ \Gamma^{me}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}^e(\vec{r}', t') + \Gamma^{mm}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}^m(\vec{r}', t') \right\}. \quad (7)$$

Тензорные ФГ, представленные формулами (30б), (32а), (32б) в работе [20], отличаются от введенных в (6)–(7) знаком. Воз-

буждение структуры кроме заданных сторонних токов определяется также токами поляризации в радиопрозрачных телах и поверхностными токами на импедансных поверхностях. Поэтому можно считать, что электромагнитное поле задается соотношениями (6)–(7), в которых

$$\vec{J}^e(\vec{r}, t) = \vec{J}_m^e(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) + \vec{J}_\sigma^e(\vec{r}, t) + \vec{J}_s^e(\vec{r}, t), \quad (8)$$

$$\vec{J}^m(\vec{r}, t) = \vec{J}_m^m(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^m(\vec{r}, t) + \vec{J}_\sigma^m(\vec{r}, t) + \vec{J}_s^m(\vec{r}, t), \quad (9)$$

где индексами *in* обозначены первичные источники поля, а вторичные источники подчиняются материальным уравнениям

$$\vec{J}_p^e(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{D}(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \right], \quad (10)$$

$$\vec{J}_p^m(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{B}(\vec{r}, t) - \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t) \right],$$

$$\vec{J}_s^e(\vec{r}, t) = \delta(x_\nu - x'_\nu) \Sigma^e(\vec{r}_\tau) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (11)$$

$$\vec{J}_s^m(\vec{r}, t) = \delta(x_\nu - x'_\nu) \Sigma^m(\vec{r}_\tau) \vec{H}(\vec{r}, t).$$

Здесь \vec{r}_τ – проекция радиус-вектора \vec{r} на касательную к поверхности плоскость, а x_ν – нормальная к ней координата. Таким образом, решение задачи о возбуждении формально имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \int_{V_0} \left[\Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_m^e(\vec{r}', t') + \Gamma^{em}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_m^m(\vec{r}', t') \right] d\vec{r}' + \int_{\vec{r}} \left[\Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_p^e(\vec{r}', t') + \Gamma^{em}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_p^m(\vec{r}', t') \right] d\vec{r}' + \int_V \left[\Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \sigma^e(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}', t') + \Gamma^{em}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \sigma^m(\vec{r}') \vec{H}(\vec{r}', t') \right] d\vec{r}' + \int_S \left[\Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}'_\tau, t - t') \Sigma^e(\vec{r}'_\tau) \vec{E}(\vec{r}', t') + \Gamma^{em}(\vec{r} - \vec{r}'_\tau, t - t') \Sigma^m(\vec{r}'_\tau) \vec{H}(\vec{r}', t') \right] d\vec{r}'_\tau \right\}, \quad (12)$$



$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}, t) = & \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \iint_{V_0} [\Gamma^{me}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_m^e(\vec{r}', t') + \right. \\ & + [\Gamma^{mm}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_m^m(\vec{r}', t')] d\vec{r}' + \\ & + \iint_V [\Gamma^{me}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_p^e(\vec{r}', t') + \\ & + \Gamma^{mm}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_p^m(\vec{r}', t')] d\vec{r}' + \\ & + \iint_V [\Gamma^{me}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \sigma^e(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}', t') + \\ & + \Gamma^{mm}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \sigma^m(\vec{r}') \vec{H}(\vec{r}', t')] d\vec{r}' + \\ & + \iint_S [\Gamma^{me}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \Sigma^e(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}', t') + \\ & \left. + \Gamma^{mm}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \Sigma^m(\vec{r}') \vec{H}(\vec{r}', t')] d\vec{r}' \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь для удобства $d\vec{r}$ означает элемент объема dV , а $d\vec{r}'$ – элемент поверхности dS . Везде в соотношениях (11)–(13) адмитансные функции явно от времени не зависят. Введение такой зависимости будет означать параметрическое возбуждение. Если выполняются соотношения (1), то

$$\begin{aligned} \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 [\varepsilon(\vec{r}) - 1] \partial \vec{E}(\vec{r}, t) / \partial t, \\ \vec{J}_p^m(\vec{r}, t) &= \mu_0 [\mu(\vec{r}) - 1] \partial \vec{H}(\vec{r}, t) / \partial t, \end{aligned} \quad (14)$$

и уравнения возбуждения имеют вид интегродифференциальных уравнений. Если же имеют место соотношения (2)–(3), то возбуждение описывается интегральными уравнениями в четырехмерном пространстве-времени. Именно с учетом (2) второй интеграл в (12) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \iint_V [\Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \left(\chi(\vec{r}, 0) \vec{E}(\vec{r}, t') + \right. \\ & + \left. \int_{-\infty}^{t'} \chi'(\vec{r}, t' - t'') \vec{E}(\vec{r}, t'') dt'' \right) + \\ & + \Gamma^{em}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \left(\kappa(\vec{r}, 0) \vec{H}(\vec{r}, t') + \right. \\ & + \left. \int_{-\infty}^{t'} \kappa'(\vec{r}, t' - t'') \vec{H}(\vec{r}, t'') dt'' \right)] d\vec{r}'. \end{aligned}$$

Здесь штрих у восприимчивостей означает производную по времени. Аналогично преобразуется второй интеграл и в соотношении (13). Таким образом, производные от полей в уравнения не входят, и уравнения

становятся интегральными с более сложными, чем в (6)–(7) ядрами. Используя формулы (12)–(13), можно дать другую формулировку задачи о возбуждении резонатора. Оставив в поверхностных интегралах поверхностные плотности токов, подчиним поля в левых частях (12)–(13) иммитансным условиям: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Sigma^{e-1}(\vec{r}) \vec{J}_s^e(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \Sigma^{m-1}(\vec{r}) \vec{J}_s^m(\vec{r}, t)$, $\vec{r} \in S$. Тогда эти соотношения превращаются в комбинированные поверхностно-объемные интегральные или интегродифференциальные уравнения относительно поверхностных плотностей токов и полей. При получении формул возбуждения (12)–(13) были использованы модельные представления. В частности, поверхность S разбивалась на части с электрическим и магнитным поверхностными токами. Магнитный поверхностный ток иногда удобно вводить и использовать при расчете полей. Например, пусть одним из рассматриваемых тел является короткозамкнутый с одного конца отрезок волновода. Поля внутри этого отрезка при любой частоте определяются элементарно в виде стоячих волн, в результате касательное электрическое поле на апертуре можно связать с магнитным посредством импеданса, зависящего от частоты. Далее это электрическое поле можно рассматривать как магнитный ток. Правда, временная связь этого тока с магнитным полем будет носить интегральный характер подобно соотношениям (2)–(3).

Необходимо отметить, что в силу условий причинности, которым удовлетворяют ФГ в свободном пространстве, все возмущения от первичных источников распространяются со скоростью света. Поэтому вторичные источники возникают в те моменты, когда возмущение успевает до них дойти. Это существенно усложняет решение интегральных уравнений по сравнению со стационарным случаем, поскольку необходима временная дискретизация и анализ пространственной локализации вторичных источников в каждый момент времени.

2. ФОРМУЛЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАТОРА НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим другой метод решения задачи о возбуждении открытого резонатора, ос-



нованный на спектральном подходе. Спектральный подход предполагает известными решения соответствующей однородной спектральной задачи для открытого резонатора [21]. Однородная задача характеризуется отсутствием возбуждающих токов. Решения такой задачи ищутся для временной зависимости вида $\exp(j\omega t)$, где $\omega = \omega' + j\omega''$ – комплексная частота. Открытым структурам соответствуют несамосопряженные операторы, спектр которых комплексный и наряду с дискретными значениями может содержать непрерывную часть. Для сферического диэлектрического резонатора (ДР) известно аналитическое дисперсионное уравнение, из которого получается дискретный спектр, имеющий точку сгущения на бесконечности. С ростом номера моды ее добротность падает, а расстояние между частотами уменьшается, что позволяет считать спектр при больших частотах непрерывным [21]. Будем считать, что спектр резонатора состоит из непрерывной и дискретной частей, причем дискретная часть спектра определяется изолированными комплексными частотами $\omega_n = \omega'_n + j\omega''_n$, $\omega''_n > 0$, $n=1,2,\dots$, а непрерывная часть спектра $\omega = \omega' + j\omega''(\omega')$ распределена на некотором интервале $\Omega_1 < \omega' < \Omega_2$ причем может быть $\Omega_2 = \infty$. Рассмотрим для простоты резонатор, состоящий из металлических и диэлектрических тел. Тогда спектральную задачу можно поставить следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = & \frac{\nabla \nabla \cdot + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0}{4\pi} \times \\ & \times \left\{ \int_S \frac{\exp(-j\omega|\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{j\omega\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}_S(\vec{r}', \omega) d\vec{r}' + \right. \\ & \left. + \int_V \frac{\exp(-j\omega|\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\epsilon(\vec{r}') - 1) \vec{E}(\vec{r}', \omega) d\vec{r}' \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

К упрощению задачи в данном случае приводит отсутствие магнитных поверхностных токов и токов поляризации. Из (15) для действительных частот видно, что при действии оператора $\nabla \nabla \cdot = \text{grad} \cdot \text{div}$ возникает часть поля, достаточно быстро убывающая на бесконечности, но есть и медленно убывающая как $1/|\vec{r}|$ часть поля. Спектральная

задача (15) имеет решения в виде комплексных частот и соответствующих им мод. Комплексные частоты приводят к экспоненциальному возрастанию плотности энергии при больших $r = |\vec{r}|$, поскольку поля возрастают по закону $\exp(\omega'' r / c) / r$. Указанное свойство отмечено в [21] и связано с экспоненциальным убыванием поля во времени, в соответствии с которым плотность энергии на расстоянии r обусловлена более ранним моментом $t - r/c$, в который энергия резонатора в окрестности начала координат была больше. Интеграл от плотности энергии поля по всему пространству расходится, что соответствует бесконечно большой энергии, необходимой для возбуждения бесконечно большой амплитуды колебаний резонатора в бесконечно удаленном прошлом.

Теория возбуждения экранированных резонаторов строится на основе разложения полей по их собственным модам. Использовать для этого непосредственно собственные моды открытого резонатора невозможно, поскольку эти моды не ортогональны. Кроме того, поля этих мод даже для идеальных тел экспоненциально убывают во времени (имеют конечную радиационную добротность), что неудобно для построения нестационарных уравнений. Для представления полей при возбуждении резонатора необходимо иметь полную систему ортогональных базисных функций. Для этого рассмотрим вспомогательный экранированный резонатор, образованный из исходного введением сферической идеально проводящей поверхности Σ большого радиуса r_Σ . Моды указанного резонатора условно можно разбить на две группы: моды дискретного спектра и моды непрерывного спектра. Первые характеризуются тем, что их энергия локализована главным образом внутри прозрачных тел и/или внутри частично экранированных областей, образованных металлическими телами, а ее просачивание во внешнюю область между экраном и телами незначительно. Моды непрерывного спектра соответствуют модам закрытого сферического резонатора большого радиуса r_Σ с идеальной внешней оболочкой, в центре которого находятся тела рассматриваемого открытого резонатора. Их



энергия локализована главным образом в области $r_0 < r < r_\Sigma$, где r_0 – максимальное удаление тел резонатора от начала координат. Соответствующие моды имеют вид стоячих сферических волн, возмущаемых этими малыми телами в центре. При увеличении радиуса сферы этот спектр сгущается и переходит в непрерывный. При $r_\Sigma \rightarrow \infty$ пространственный интеграл от плотности энергии этих мод расходится. При выполнении указанного предела используем принцип предельного поглощения, т.е. предположим наличие бесконечно малых потерь в области $r_0 < r < r_\Sigma$. Это соответствует определению проницаемостей в данной области в виде $\varepsilon(\vec{r}, \omega) = 1 - j\delta/2$, $\mu(\vec{r}, \omega) = 1 - j\delta/2$, что эквивалентно замене $k_0 \rightarrow k_0 - j\delta$. В окончательных результатах после перехода к пределу $r_\Sigma \rightarrow \infty$ положим $\delta = 0$. Введение бесконечно малых потерь во внешней области слабо изменит собственные частоты дискретного спектра, но приведет к отсутствию отраженной волны от сферы бесконечно большого радиуса, что равносильно выполнению на ней импедансного условия полного согласования. Моды непрерывного спектра приобретут радиационное затухание, и их частоты станут комплексными с $\omega'' = \delta/(2c)$. При этом полные энергии соответствующих колебаний будут бесконечными, что связано с медленным пространственным убыванием полей и возрастанием их амплитуд в прошлом. Заметим, что для диполя в стационарном случае бесконечная энергия в пространстве связана с бесконечным временем его излучения. Кроме этого для точечного диполя имеет место расходимость энергии поля в начале координат, обусловленная расходимостью электростатической энергии поля точечных зарядов.

Будем решать задачу о возбуждении при конечном r_Σ , а к пределам $r_\Sigma \rightarrow \infty$ и затем $\delta \rightarrow 0$ перейдем в окончательных формулах. Поскольку поток вектора Пойтинга через поверхность Σ отсутствует, для собственных колебаний выполняются соотношения ортогональности [1–2, 6–7]:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \int \varepsilon(\vec{r}, \omega'_n) \mathbf{E}_n(\vec{r}, \omega_n) \mathbf{E}_k^*(\vec{r}, \omega_k) dV = \\ & = \mu_0 \int \mu(\vec{r}, \omega'_n) \mathbf{H}_n(\vec{r}, \omega_n) \mathbf{H}_k^*(\vec{r}, \omega_k) dV = \\ & = N_n \delta_{nk}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \int \varepsilon(\vec{r}, \omega'_n) \mathbf{E}_n(\vec{r}, \omega_n) \mathbf{E}_k(\vec{r}, \omega_k) dV = \\ & = -\mu_0 \int \mu(\vec{r}, \omega'_n) \mathbf{H}_n(\vec{r}, \omega_n) \mathbf{H}_k(\vec{r}, \omega_k) dV = \\ & = \tilde{N}_n \delta_{nk}, \end{aligned} \quad (17)$$

где жирным шрифтом обозначены комплексные спектральные векторы поля, а все нормы, вообще говоря, комплексные в силу комплексности проницаемостей. В этих соотношениях интегрирование распространяется на область $r < r_\Sigma$. Для непрерывного спектра аналогичные условия ортогональности в предельном случае должны иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_0}{N(\omega')} \int \varepsilon(\vec{r}, \omega') \mathbf{E}_\omega(\vec{r}, \omega) \mathbf{E}_\varpi^*(\vec{r}, \varpi) dV = \\ & = \frac{\mu_0}{N(\omega')} \int \mu(\vec{r}, \omega') \mathbf{H}_\omega(\vec{r}, \omega) \mathbf{H}_\varpi^*(\vec{r}, \varpi) dV = \\ & = \delta(\omega - \varpi), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_0}{\tilde{N}(\omega')} \int \varepsilon(\vec{r}, \omega') \mathbf{E}_\omega(\vec{r}, \omega) \mathbf{E}_\varpi(\vec{r}, \varpi) dV = \\ & = -\frac{\mu_0}{\tilde{N}(\omega')} \int \mu(\vec{r}, \omega') \mathbf{H}_\omega(\vec{r}, \omega) \mathbf{H}_\varpi(\vec{r}, \varpi) dV = \\ & = \delta(\omega - \varpi). \end{aligned} \quad (19)$$

При предельном переходе $r_\Sigma \rightarrow \infty$ интегрирование осуществлено по всему пространству. Моды непрерывного спектра ортогональны также модам дискретного спектра, поскольку до выполнения предельного перехода им соответствуют различные дискретные частоты. Левые части соотношений (18)–(19) следует понимать как конечные пределы отношений расходящихся интегралов. Указанные спектральные амплитуды удовлетворяют уравнениям Максвелла в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H}_n(\vec{r}, \omega_n) &= j\omega_n \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}, \omega'_n) \mathbf{E}_n(\vec{r}, \omega_n), \\ \text{rot} \mathbf{E}_n(\vec{r}, \omega_n) &= -j\omega_n \mu_0 \mu(\vec{r}, \omega'_n) \mathbf{H}_n(\vec{r}, \omega_n), \end{aligned}$$



$$\text{rot} \mathbf{H}_\omega(\vec{r}, \omega) = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}, \omega') \mathbf{E}_\omega(\vec{r}, \omega),$$

$$\text{rot} \mathbf{E}_\omega(\vec{r}, \omega) = -j\omega \mu_0 \mu(\vec{r}, \omega') \mathbf{H}_\omega(\vec{r}, \omega_n),$$

а также условиям излучения. Будем считать, что эти решения невырожденные, а если это было не так, то выполнена дополнительная ортогонализация функций. Рассмотрим приближение, когда дисперсией проницаемостей прозрачных тел, заполняющих резонатор, можно пренебречь. Это соответствует временным функциональным зависимостям для источников, спектр которых достаточно ограничен, причем в полосе этого спектра дисперсия слабая. Тогда можно полагать, что проницаемости не зависят от собственных частот, и ввести действительные функции:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_n(\vec{r}) &= (\sqrt{\varepsilon(\vec{r})} \mathbf{E}_n(\vec{r}, \omega_n) + \sqrt{\varepsilon^*(\vec{r})} \times \\ &\times \mathbf{E}_n^*(\vec{r}, \omega_n^*)) / 2, \\ \bar{\mathbf{H}}_n(\vec{r}) &= (\sqrt{\mu(\vec{r})} \mathbf{H}_n(\vec{r}, \omega_n) + \sqrt{\mu^*(\vec{r})} \mathbf{H}_n^* \times \\ &\times (\vec{r}, \omega_n^*)) / 2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_\omega(\vec{r}) &= (\sqrt{\varepsilon(\vec{r})} \mathbf{E}_\omega(\vec{r}, \omega) + \sqrt{\varepsilon^*(\vec{r})} \times \\ &\times \mathbf{E}_\omega^*(\vec{r}, \omega_n^*)) / 2, \\ \bar{\mathbf{H}}_\omega(\vec{r}) &= (\sqrt{\mu(\vec{r})} \mathbf{H}_\omega(\vec{r}, \omega) + \sqrt{\mu^*(\vec{r})} \mathbf{H}_\omega^* \times \\ &\times (\vec{r}, \omega_n^*)) / 2, \end{aligned} \quad (21)$$

которые в соответствии с (16)–(19) удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \int \bar{\mathbf{E}}_n(\vec{r}) \bar{\mathbf{E}}_k(\vec{r}) dV &= \\ = \{N_n + N_n^* + \tilde{N}_n + \tilde{N}_n^*\} \delta_{nk} / 4 = \\ = \delta_{nk} \text{Re} \{N_n + \tilde{N}_n\} / 2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \int \bar{\mathbf{H}}_n(\vec{r}) \bar{\mathbf{H}}_k(\vec{r}) dV &= \\ = \{N_n + N_n^* - \tilde{N}_n - \tilde{N}_n^*\} \delta_{nk} / 4 = \\ = \delta_{nk} \text{Re} \{N_n - \tilde{N}_n\} / 2. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае наличия дисперсии указанные соотношения не выполняются. Поэтому введем другие функции:

$$\bar{\mathbf{E}}_n(\vec{r}) = (\mathbf{E}_n(\vec{r}, \omega_n) + \mathbf{E}_n^*(\vec{r}, \omega_n^*)) / 2, \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_n(\vec{r}) = (\mathbf{H}_n(\vec{r}, \omega_n) + \mathbf{H}_n^*(\vec{r}, \omega_n^*)) / 2,$$

$$\bar{\mathbf{E}}_\omega(\vec{r}) = (\mathbf{E}_\omega(\vec{r}, \omega) + \mathbf{E}_\omega^*(\vec{r}, \omega_n^*)) / 2,$$

$$\bar{\mathbf{H}}_\omega(\vec{r}) = (\mathbf{H}_\omega(\vec{r}, \omega) + \mathbf{H}_\omega^*(\vec{r}, \omega_n^*)) / 2, \quad (25)$$

которые ортогональны с весами $\varepsilon(\vec{r}, \omega'_n)$, $\mu(\vec{r}, \omega'_n)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \int \varepsilon(\vec{r}, \omega'_n) \bar{\mathbf{E}}_n(\vec{r}) \bar{\mathbf{E}}_k(\vec{r}) dV &= \\ = \{N_n + \tilde{N}_n\} \delta_{nk} / 2, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \int \mu(\vec{r}, \omega'_n) \bar{\mathbf{H}}_n(\vec{r}) \bar{\mathbf{H}}_k(\vec{r}) dV &= \\ = \{N_n - \tilde{N}_n\} \delta_{nk} / 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что соотношения (26)–(27) комплексные, тогда как (22)–(23) – действительные. Далее будем использовать разложение по функциям (24)–(25), поскольку использование функций (20)–(21) приводит к громоздким построениям.

В работе [6] возбуждение экранированного резонатора строилось с использованием собственных функций резонатора, не заполненного средой, а далее влияние среды учитывалось с помощью интегро-дифференциальных уравнений. Для открытого случая также можно рассмотреть возбуждение заданными токами незаполненного сферического резонатора с идеальной оболочкой и перейти к пределу при стремлении его радиуса к бесконечности. При этом дискретный спектр резонатора превратится в непрерывный, а введение бесконечно малых потерь в объеме резонатора устранил сходящиеся сферические волны, тем самым превратив ФГ возбуждения резонатора дипольными токами в центре в использованные выше ФГ свободного пространства, удовлетворяющие принципу причинности.

Решение нестационарных уравнений Максвелла ищем теперь в форме



$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \vec{E}_n(\vec{r}) + \\ & + \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \alpha(\omega, t) \vec{E}_\omega(\vec{r}) d\omega - \text{grad} \Phi(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \vec{H}_n(\vec{r}) + \\ & + \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \beta(\omega, t) \vec{H}_\omega(\vec{r}) d\omega - \text{grad} \Psi(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (29)$$

Для удовлетворения уравнениям Максвелла (28)–(29) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты разложений были решениями системы обыкновенных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_n(t) + \frac{1}{N_n^-} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ B_{nm} \frac{\partial}{\partial t} b_m(t) + D_{nm} b_m(t) \right\} + \\ + \frac{1}{N_n^-} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \left\{ B_n(\omega) \frac{\partial}{\partial t} \beta(\omega, t) + D_n(\omega) \beta(\omega, t) d\omega \right\} + \\ + \frac{1}{N_n^-} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t K_{nm}(t-t') b_m(t') dt' + \\ + \frac{1}{N_n^-} \int_{-\infty, \Omega_1}^t \int_{\Omega_2} K_n(\omega, t-t') \beta(\omega, t') dt' d\omega - \\ - \frac{\mu_0}{N_n^-} \int d\vec{r} \vec{H}_n(\vec{r}) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Psi(\vec{r}, t) - \kappa(\vec{r}, 0) \nabla \Psi(\vec{r}, t) \right\} - \\ - \frac{\mu_0}{N_n^-} \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r} \vec{H}_n(\vec{r}) \kappa'(\vec{r}, t-t') \nabla \Psi(\vec{r}, t') = \\ = - \frac{1}{N_n^-} \int_{V_0} \vec{J}_n^m(\vec{r}, t) \vec{H}_n(\vec{r}) d\vec{r}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} b_n(t) - \frac{1}{N_n^+} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{nm} \frac{\partial}{\partial t} a_m(t) + C_{nm} a_m(t) \right\} - \\ - \frac{1}{N_n^+} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \left\{ A_n(\omega) \frac{\partial}{\partial t} \alpha(\omega, t) + C_n(\omega) \alpha(\omega, t) d\omega \right\} - \\ - \frac{1}{N_n^+} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t X_{nm}(t-t') a_m(t') dt' - \\ - \frac{1}{N_n^+} \int_{-\infty, \Omega_1}^t \int_{\Omega_2} X_n(\omega, t-t') \alpha(\omega, t') dt' d\omega + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{\varepsilon_0}{N_n^+} \int d\vec{r} \vec{E}_n(\vec{r}) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi(\vec{r}, t) - \chi(\vec{r}, 0) \nabla \Phi(\vec{r}, t) \right\} + \\ + \frac{\varepsilon_0}{N_n^+} \int_{-\infty}^t dt' \int dr \vec{E}_n(\vec{r}) \chi'(\vec{r}, t-t') \nabla \Phi(\vec{r}, t') = \\ = \frac{1}{N_n^+} \int_{V_0} \vec{J}_{in}^e(\vec{r}, t) \vec{E}_n(\vec{r}) d\vec{r}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, t) + \frac{1}{N_\omega^-} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ B_{nm} \frac{\partial}{\partial t} b_m(t) + D_{nm} b_m(t) \right\} + \\ + \frac{1}{N_\omega^-} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \left\{ B_n(\omega) \frac{\partial}{\partial t} \beta(\omega, t) + D_n(\omega) \beta(\omega, t) d\omega \right\} + \\ + \frac{1}{N_\omega^-} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t K_{nm}(t-t') b_m(t') dt' + \\ + \frac{1}{N_\omega^-} \int_{-\infty, \Omega_1}^t \int_{\Omega_2} K_n(\omega, t-t') \beta(\omega, t') dt' d\omega - \\ - \frac{\mu_0}{N_\omega^-} \int d\vec{r} \vec{H}_\omega(\vec{r}) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Psi(\vec{r}, t) - \kappa(\vec{r}, 0) \nabla \Psi(\vec{r}, t) \right\} - \\ - \frac{\mu_0}{N_\omega^-} \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r} \vec{H}_\omega(\vec{r}) \kappa'(\vec{r}, t-t') \nabla \Psi(\vec{r}, t') = \\ = - \frac{1}{N_\omega^-} \int_{V_0} \vec{J}_m^m(\vec{r}, t) \vec{H}_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \beta(\omega, t) - \frac{1}{N_\omega^+} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{nm} \frac{\partial}{\partial t} a_m(t) + C_{nm} a_m(t) \right\} - \\ - \frac{1}{N_\omega^+} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \left\{ A_n(\omega) \frac{\partial}{\partial t} \alpha(\omega, t) + C_n(\omega) \alpha(\omega, t) d\omega \right\} - \\ - \frac{1}{N_\omega^+} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t X_{nm}(t-t') a_m(t') dt' - \\ - \frac{1}{N_\omega^+} \int_{-\infty, \Omega_1}^t \int_{\Omega_2} X_n(\omega, t-t') \alpha(\omega, t') dt' d\omega + \\ + \frac{\varepsilon_0}{N_\omega^+} \int d\vec{r} \vec{E}_\omega(\vec{r}) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi(\vec{r}, t) - \chi(\vec{r}, 0) \nabla \Phi(\vec{r}, t) \right\} + \\ + \frac{\varepsilon_0}{N_\omega^+} \int_{-\infty}^t dt' \int dr \vec{E}_\omega(\vec{r}) \chi'(\vec{r}, t-t') \nabla \Phi(\vec{r}, t') = \\ = \frac{1}{N_\omega^+} \int_{V_0} \vec{J}_m^e(\vec{r}, t) \vec{E}_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \end{aligned} \quad (33)$$



где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 N_n^+ &= \operatorname{Re} \left(-j\omega_n (N_n + \tilde{N}_n) / 2 \right) = \\
 &= \operatorname{Im} \left(\omega_n (N_n + \tilde{N}_n) / 2 \right), \\
 N_\omega^+ &= \operatorname{Re} \left(-j\omega (N(\omega) + \tilde{N}(\omega)) / 2 \right) = \\
 &= \operatorname{Im} \left(\omega (N(\omega) + \tilde{N}(\omega)) / 2 \right), \\
 N_n^- &= \operatorname{Re} \left(-j\omega_n (N_n - \tilde{N}_n) / 2 \right) = \\
 &= \operatorname{Im} \left(\omega_n (N_n - \tilde{N}_n) / 2 \right), \\
 N_\omega^- &= \operatorname{Re} \left(-j\omega (N(\omega) - \tilde{N}(\omega)) / 2 \right) = \\
 &= \operatorname{Im} \left(\omega (N(\omega) - \tilde{N}(\omega)) / 2 \right), \\
 A_{nm} &= \varepsilon_0 \int \vec{E}_m(\vec{r}) \vec{E}_n(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 A_n(\omega) &= \varepsilon_0 \int \vec{E}_n(\vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 A(\omega, \varpi) &= \varepsilon_0 \int \vec{E}_\omega(\vec{r}) \vec{E}_\varpi(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 C_{nm} &= \varepsilon_0 \int \chi(\vec{r}, 0) \vec{E}_m(\vec{r}) \vec{E}_n(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 C_n(\omega) &= \varepsilon_0 \int \chi(\vec{r}, 0) \vec{E}_n(\vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 C(\omega, \varpi) &= \varepsilon_0 \int \chi(\vec{r}, 0) \vec{E}_\omega(\vec{r}) \vec{E}_\varpi(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 B_{nm} &= \mu_0 \int H_m(\vec{r}) H_n(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 B_n(\omega) &= \mu_0 \int H_m(\vec{r}) H_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 B(\omega, \varpi) &= \mu_0 \int H_\omega(\vec{r}) H_\varpi(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 D_{nm} &= \mu_0 \int \kappa(\vec{r}, 0) H_m(\vec{r}) H_n(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 D_n(\omega) &= \mu_0 \int \kappa(\vec{r}, 0) H_n(\vec{r}) H_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 D(\omega, \varpi) &= \mu_0 \int \kappa(\vec{r}, 0) H_\omega(\vec{r}) H_\varpi(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 K_{nm}(t) &= \mu_0 \int \kappa'(\vec{r}, t) \vec{H}_m(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 K_n(\omega, t) &= \mu_0 \int \kappa'(\vec{r}, t) \vec{H}_n(\vec{r}) \vec{H}_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 K(\omega, \varpi, t) &= \mu_0 \int \kappa'(\vec{r}, t) \vec{H}_\omega(\vec{r}) \vec{H}_\varpi(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 X_{nm}(t) &= \varepsilon_0 \int \chi'(\vec{r}, t) \vec{E}_m(\vec{r}) \vec{E}_n(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 X_n(t) &= \varepsilon_0 \int \chi'(\vec{r}, t) \vec{E}_n(\vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) d\vec{r}, \\
 X(\omega, \varpi, t) &= \varepsilon_0 \int \chi'(\vec{r}, t) \vec{E}_\omega(\vec{r}) \vec{E}_\varpi(\vec{r}) d\vec{r}.
 \end{aligned}$$

При этом потенциалы должны удовлетворять обобщенным уравнениям Пуассона

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_{in}^e(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \operatorname{div} \vec{J}_{in}^e(\vec{r}, t') dt', \quad (34)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = \rho_{in}^m(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \operatorname{div} \vec{J}_{in}^m(\vec{r}, t') dt'. \quad (35)$$

Для неоднородного заполнения резонатора левые части уравнений (34)–(35) приобретают достаточно сложный вид. Например,

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \left\{ \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_{-\infty}^t \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t') \nabla \chi(\vec{r}, t') + \chi(\vec{r}, t') \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t') \right\} dt' \right\}, \quad (36)$$

где

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \operatorname{Re} \left[\frac{\nabla(\varepsilon^{-1}(\vec{r}, \omega'_n))}{j\omega_n \varepsilon_0} \right] + \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \alpha(\omega', t) \operatorname{Re} \left[\frac{\nabla(\varepsilon^{-1}(\vec{r}, \omega'))}{j\omega \varepsilon_0} \right] d\omega' - \nabla^2 \Phi(\vec{r}, t), \quad (37)$$

Подстановка соотношений типа (36)–(37) и (28)–(29) в (34)–(35) приводит к связанным уравнениям для коэффициентов разложения и потенциалов (30)–(35), которые необходимо решать в пространственно-временной области. Заметим, что эти уравнения сильно упрощаются, если возбуждающие токи соленоидальны, а магнитоэлектрические тела отсутствуют. В этом случае необходимо искать только решения для коэффициентов разложения во временной области. Уравнения для коэффициентов содержат в знаменателях нормировочные множители, пропорциональные энергиям колебаний. При выполнении предельных переходов со снятием потерь во внешнем пространстве матричные элементы в соотношениях (30)–(33) могут возрастать, однако все слагаемые в них остаются конечными.

3. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

Для постановки задачи о возбуждении ВТ необходимо сформулировать задачу о собственных волнах открытого волновода. Такая система волн исследована в работе [15], в которой для нее получены соотношения ортогональности. Нестационарную теорию возбуждения открытых волноводов можно строить аналогично методу, использованному в [15] с учетом указанных соот-



ношений, окружив волновод идеальным цилиндром большого радиуса и выполняя предельный переход. В данной работе мы используем другой подход, применимый также и для открытых ВТ. Пусть такой металлодиэлектрический волновод состоит из диэлектрической области поперечного сечения S с проницаемостью $\varepsilon(\vec{r}_\perp, \omega)$ и металлической поверхности, контур которой в плоскости поперечного сечения обозначим L_M . Здесь \vec{r}_\perp – поперечные координаты, а вдоль продольной координаты z система однородна. В силу этого решение задачи ищем в виде $\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}(\vec{r}_\perp, \omega) e^{-j\gamma(\omega)z}$, где $\gamma(\omega) = \sqrt{k_0^2 - \chi^2}$, а χ – поперечное волновое число. Задача о собственных волнах формулируется в поперечных координатах как задача о собственных значениях параметра χ , которые могут быть дискретными χ_n и непрерывными χ . Постоянные распространения собственных волн дискретного спектра будем обозначать $\gamma_n(\omega)$, а непрерывного – $\gamma_\chi(\omega)$. Собственные волны могут быть медленными (поверхностными) и быстрыми (пространственными). При определенных условиях медленные поверхностные волны могут превращаться в быстрые вытекающие моды. Кроме того, в регулярном волноводе могут существовать комплексные волны [15]. Указанная классификация относится к открытому волноводу с диэлектриком без потерь (рис. 1). Однако наличие дисперсии диэлектрической проницаемости означает присутствие потерь, поэтому, вообще говоря, все постоянные распространения следует считать комплексными. Задачу на собственные значения для волновода поставим в виде

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, \omega) e^{-j\gamma(\omega)z} = \frac{\nabla \nabla \cdot + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{j\omega \varepsilon_0} e^{-j\gamma(\omega)z} \times \left\{ \int_{L_M} G(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp, \chi) \vec{J}_S(\vec{r}'_\perp, \omega) dl' + \int_S G(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp, \chi) (\varepsilon(\vec{r}'_\perp) - 1) \vec{E}(\vec{r}'_\perp, \omega) d\vec{r}'_\perp \right\} = 0, \quad \vec{r}_\perp \in L_M. \quad (38)$$

Здесь $G(\vec{r}_\perp, k_0) = \frac{-j}{4} H_0^2(k_0 | \vec{r}_\perp |)$ – двумерная ФГ свободного пространства [3], выраженная через функцию Ганкеля второго рода. Экспоненциальный множитель в (38) сокращается, однако он оставлен для указания того, что дифференцирование по z эквивалентно умножению на $-j\gamma$.

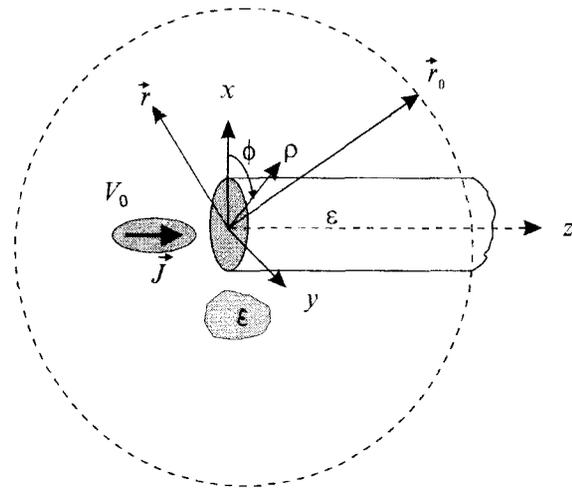


Рис. 1. Конфигурация волнового трансформатора, состоящего из диэлектрического резонатора и полубесконечного диэлектрического волновода, возбуждаемых током, распределенным в объеме V_0

В общем случае ВТ имеет несколько полубесконечных открытых волноводов и нерегулярную часть в виде некоторых тел, расположенных в конечной области. Пусть источники также локализованы в этой области (для упрощения рассмотрим возбуждение только электрическим током). Выберем начало координат вблизи локализованных источников и неоднородностей. Проведем сферу большого радиуса r_0 из начала координат (см. рис. 1). Сфера пересечет волноводы по сечениям S_k , которые можно считать плоскими. Введем локальные цилиндрические системы координат с осями z_k , начинающиеся в точках пересечения осей волноводов со сферой и отсчитываемые во внешнюю область. Если ВТ возбуждается только сторонними токами, то вне сферы по волноводам от источников будут распространяться импульсы, состоящие из собственных мод и содержащие определенные частотные спектры, поэтому из-за дисперсии их форма будет изменяться во времени. Кроме этого от источни-



ков, тел и участков волноводов, находящихся вблизи них, будут расходиться объемные сферические волны. Целью решения задачи о возбуждении является определение формы этих импульсов. Однако возможно и возбуждение ВТ по любому из каналов импульсом, приходящим из бесконечности, который представляет собой суперпозицию всевозможных собственных волн из некоторого частотного диапазона. В силу дисперсии и возможных потерь при движении импульс изменяет форму. Будем для удобства считать, что ВТ возбуждается импульсом, приходящим по первому волноводу. После решения данной задачи можно учесть любое возбуждение, используя принцип суперпозиции. Кроме этого рассмотрим для простоты ВТ, содержащий только диэлектрические тела и ДВ. Полный объем всех диэлектрических тел внутри сферы (включая и отрезки ДВ) обозначим V_D . Учет далее металлических тел и металлодиэлектрических волноводов производится добавлением соответствующих интегралов от поверхностных электрических токов.

Формально решение задачи о возбуждении ВТ имеет тот же вид, что и для резонатора, а именно решение дается формулами (12)–(13). Отличие состоит в том, что вместо конечного объема V следует рассматривать бесконечный объем, состоящий из уходящих в бесконечность полубесконечных волноводов. Решение задачи о возбуждении ВТ будет заключаться в преобразовании указанных интегралов в интегралы по конечной области внутри сферы. Результат решения должен содержать амплитуды мод, из которых состоят расходящиеся по волноводам от источников импульсы. Естественно, просто отбросить внешнюю бесконечную область нельзя. Необходимо найти реакцию в виде добавочного поля внутри сферы на отбрасываемую часть структуры.

Для получения решения рассмотрим сначала спектральную постановку задачи. В этом случае структура возбуждается током

$$\vec{J}_{in}^e(\vec{r}, \omega)_t = \int_{-\infty}^t \vec{J}_{in}^e(\vec{r}, t') e^{-j\omega t'} dt'. \quad (39)$$

Этот ток наводит в диэлектрических телах и полубесконечных ДВ электрическое

поле, которое можно рассматривать как электрический ток поляризации и выразить, используя скалярную ФГ свободного пространства [3]:

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\alpha(x-x') - j\beta(y-y') - j\gamma(z-z')}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k_0^2} d\alpha d\beta d\gamma. \quad (40)$$

В результате получим

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = j\omega\epsilon_0 \iiint \Gamma(\vec{r} - \vec{r}', \omega) [\epsilon(\vec{r}', \omega) - 1] \times \times \vec{E}(\vec{r}', \omega) d\vec{r}' + \int_{V_0} \Gamma(\vec{r} - \vec{r}', \omega) \vec{J}_{in}^e(\vec{r}', \omega) d\vec{r}'. \quad (41)$$

Здесь первый интеграл взят по всему бесконечному объему, занятому диэлектриком, а величина

$$\Gamma(\vec{r}, \omega) = \frac{\nabla \otimes \nabla + k_0^2 I}{j\omega\epsilon_0} G(\vec{r}, \omega)$$

представляет одну из четырех тензорных ФГ свободного пространства, для представления которой использован единичный тензор I и диадное произведение операторов ∇ . Поле внутри каждого из волноводов можно выразить в виде

$$\vec{E}(\vec{r}_{k\perp}, z_k, \omega) = \vec{E}_0(\vec{r}, \omega) + \sum_{n=1}^N b_{kn}(\omega) \vec{E}_{kn}(\vec{r}_{k\perp}, \omega) \exp(-j\gamma_{kn}(\omega) z_k), \quad (42)$$

где $\vec{E}_n(\vec{r}_{k\perp}, \omega)$ – собственные функции, а γ_{kn} – постоянные распространения N поверхностных мод, которые на данной частоте могут распространяться без радиационных потерь, а $\vec{E}_0(\vec{r}, \omega)$ – оставшаяся часть поля, включающая в себя поле излучения тока, поля диэлектрических тел, излучаемые пространственные моды, вытекающие моды волноводов. Это поле убывает как $1/r$ и на поверхности сферы будет достаточно малым. Будем считать, что радиус r_0 выбран таким, что вне сферы все возбужденные в ДВ пространственные и вытекающие моды высветились. Таким полем $\vec{E}_0(\vec{r}, \omega)$ внутри участков ДВ, расположенных вне сферы, мы пренебрегаем. Тогда задача сводится к отысканию амплитуд расходящихся волн b_{kn} и внутреннего поля излучения $\vec{E}_0(\vec{r}, \omega)$. Заметим, что



для открытых волноводов, содержащих металлические многопроводные линии (микрополосковые линии, двухпроводная линия и т.п.) в разложение (42) необходимо включать Т-моды и квази-Т-моды. В общем случае в выражении (42) необходимо выделять все моды, локализованные около волноводов. Преобразуем интеграл по полубесконечным частям ДВ, расположенным вне сферы, используя явный вид ФГ. Выделяя явно продольную часть интеграла, получим:

$$I_{kn}(z_k, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{\chi^2 + \gamma^2 - k_0^2} \int_0^{\infty} e^{-j\gamma(z_k - z'_k)} e^{-j\gamma_{kn}z'_k} dz'_k = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{e^{-j\gamma z_k}}{(\gamma - \gamma_{kn})(\chi^2 + \gamma^2 - k_0^2)}. \quad (43)$$

Здесь мы предположили наличие малых потерь в ДВ и ввели поперечное волновое число χ . В представлении ФГ в декартовых координатах $\chi^2 = \alpha^2 + \beta^2$. В представлении ФГ в цилиндрических координатах по нему выполняется интегрирование с дополнительным суммированием по азимутальному индексу [3]. Для модели идеального диэлектрика достаточно предположить наличие бесконечно малых потерь. Вычисляя спектральный интеграл методом теории вычетов, при $z_k < 0$ получим:

$$I_{kn}(z_k, \chi) = \frac{-e^{j\sqrt{k_0^2 - \chi^2}z_k}}{2\sqrt{k_0^2 - \chi^2}(\sqrt{k_0^2 - \chi^2} + \gamma_{kn})}. \quad (44)$$

Аналогично при $z_k > 0$

$$I_{kn}(z_k, \chi) = \frac{e^{-j\gamma_{kn}z_k}}{\chi^2 + \gamma_{kn}^2 - k_0^2} + \frac{e^{-j\sqrt{k_0^2 - \chi^2}z_k}}{2\sqrt{k_0^2 - \chi^2}(\sqrt{k_0^2 - \chi^2} - \gamma_{kn})}. \quad (45)$$

Первый член здесь соответствует уходящей моде, а второй – модам непрерывного спектра, обусловленным нерегулярностью (полубесконечностью) ДВ. Эти моды вытекают под углом $\theta = \arctan(\chi / \sqrt{k_0^2 - \chi^2})$, а при $k_0^2 < \chi^2$ излучаются в поперечном на-

правлении, экспоненциально затухая вдоль оси. При решении задачи этот член в значительной мере компенсируется влиянием внутреннего поля. Для интегралов (44)–(45) выполняется условие непрерывности: $I_{kn}(+0, \chi) = I_{kn}(-0, \chi)$. При $\chi^2 > k_0^2$ полюсы у ФГ расположены в верхней и нижней полуплоскостях на мнимой оси. При $\chi^2 < k_0^2$ необходимо предположить наличие бесконечно малых потерь в свободном пространстве. При этом полюсы расположены в точках $\gamma = \pm(\sqrt{k_0^2 - \chi^2} - j\delta)$. В первом случае контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости, а во втором – в нижней.

Рассмотрим теперь возбуждение ВТ импульсом, приходящим из бесконечности. Пусть для простоты он содержит только одну моду. Такой импульс можно представить в виде

$$\vec{E}_m(\vec{r}_{\perp}, z_1, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{11}(\omega) \vec{E}_{11}(\vec{r}_{\perp}, \omega) \times \exp(j\omega t + j\gamma_{11}(\omega)z_1) d\omega. \quad (46)$$

Здесь первый индекс означает номер ДВ, а второй – номер моды (поэтому учет многих мод сводится к суммированию). На сфере в точке $z_1 = 0$ будем иметь $\vec{E}_m(\vec{r}_{\perp}, 0, t) = f(t) \vec{E}_m(\vec{r}_{\perp})$, где $f(t)$ – временной закон задания возбуждения, а $\vec{E}_m(\vec{r}_{\perp})$ – поверхностное распределение возбуждения на части сферы, пересекающей ДВ. Будем считать, что спектральная амплитуда $a_{11}(\omega)$ задана, и тем самым временной закон возбуждения определен. Для вычисления вклада в первый интеграл в (41) от поля $\vec{E}_m(\vec{r}_{\perp}, z_1, \omega)$ преобразуем спектральный интеграл и интеграл по продольной оси z_1 в области $z_1 < 0$ следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma e^{-j\gamma z_1}}{\chi^2 + \gamma^2 - k_0^2} \int_0^{\infty} e^{j(\gamma_{11} + \gamma)z'_1} dz'_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma e^{-j\gamma z_1}}{\chi^2 + \gamma^2 - k_0^2} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\gamma_{11} + \gamma)z_1'} dz_1' - \int_{-\infty}^0 e^{j(\gamma_{11} + \gamma)z_1'} dz_1' \right\} = \\ & = \frac{e^{j\gamma_{11}z_1}}{\chi^2 + \gamma_{11}^2 - k_0^2} + \\ & + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{e^{-j\gamma z_1}}{(\gamma_{11} + \gamma)(\chi^2 + \gamma^2 - k_0^2)} = \\ & = \frac{-e^{j\sqrt{k_0^2 - \chi^2}z_1}}{2\sqrt{k_0^2 - \chi^2}(\sqrt{k_0^2 - \chi^2} - \gamma_{11})}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь также использовано вычисление спектрального интеграла методом вычетов при замыкании контура в верхней полуплоскости комплексной плоскости γ .

Окончательно спектральные уравнения возбуждения в диэлектрических областях внутри сферы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = & \vec{E}_m(\vec{r}, \omega) + \vec{E}_{df}(\vec{r}, \omega) + \\ & + j\omega\epsilon_0 \int_{V_s} \Gamma(\vec{r} - \vec{r}', \omega) [\epsilon(\vec{r}', \omega) - 1] \vec{E}_0(\vec{r}', \omega) d\vec{r}' + \\ & + \int_{V_0} \Gamma(\vec{r} - \vec{r}', \omega) \vec{J}_m^e(\vec{r}', \omega) d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(\vec{r}, \omega) = & a_{11}(\omega) (\nabla \nabla \cdot + k_0^2) \times \\ & \times \int_{S_1} G(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}, -\gamma_{11}, \omega) [\epsilon(\vec{r}'_{\perp}, \omega) - 1] \vec{E}_{11}(\vec{r}'_{\perp}, \omega) d\vec{r}'_{\perp}, \\ G(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}, \gamma, \omega) = & -\frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\alpha(x_1 - x_1') - j\beta(y_1 - y_1') + j\sqrt{k_0^2 - \chi^2}z_1}}{2\sqrt{k_0^2 - \chi^2}(\sqrt{k_0^2 - \chi^2} + \gamma)} d\alpha d\beta + \\ & + \sum_{n=1}^N b_{kn}(\omega) (\nabla \nabla \cdot + k_0^2) \times \\ & \times \int_{S_{k1}} G(\vec{r}_{k\perp} - \vec{r}'_{k\perp}, \gamma_{kn}, \omega) [\epsilon(\vec{r}'_{k\perp}, \omega) - 1] \vec{E}_{kn}(\vec{r}'_{k\perp}, \omega) d\vec{r}'_{k\perp}. \end{aligned}$$

Первая сумма в последнем выражении есть разложение по модам волноводов внутри сферы, а вторая сумма дает реакцию от поля излучения в полубесконечных частях волноводов вне сферы в область внутри нее. Уравнения возбуждения (48) являются инте-

гральными и позволяют определить поле \vec{E}_0 и амплитуды b_{kn} . Указанное поле можно искать в виде разложения по некоторому базису, например в виде конечных элементов. Дополнительными базисными функциями могут служить собственные волны ДВ. Существенным при решении этих уравнений является то, что они сформулированы в конечной области.

Получение нестационарных уравнений возбуждения теперь возможно путем Фурье-обращения соотношения (48). При этом следует учесть, что

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} G(\vec{r}, \omega) d\omega = \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t - jk_0|\vec{r}|)}{4\pi|\vec{r}|} d\omega = \frac{\delta(t - |\vec{r}|/c)}{4\pi|\vec{r}|}, \end{aligned}$$

а при обращении $\Gamma(\vec{r}, \omega)$ получается $\Gamma^{ee}(\vec{r}, t)$. Поэтому уравнение возбуждения примет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = & \vec{E}_m(\vec{r}, t) + \vec{E}_{df}(\vec{r}, t) + \\ & + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t d\vec{r}' \int_{V_D} \Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \frac{\partial}{\partial t'} \int_{-\infty}^t \chi(\vec{r}, t'') \vec{E}_0(\vec{r}'', t'') d\vec{r}'' + \\ & + \int_{-\infty}^t d\vec{r}' \int_{V_D} \Gamma^{ee}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{J}_m^e(\vec{r}', t') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (49)$$

Оно является интегральным, поскольку дифференцирование можно выполнить явно, и оператор дифференцирования на поле не действует. Это уравнение позволяет определить поле дифракции, а именно амплитуды расходящихся волн $b_{kn}(\omega)$, а также внутреннее поле $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$, соответствующее пространственным волнам. Это уравнение является приближенным. Первое приближение связано с конечностью введенной сферы. Второе приближение связано с конечным числом членов, удерживаемых в выражении (42), а также в возбуждающем импульсе (если есть внешнее возбуждение). На самом деле любое финитное во времени возбуждение



приведет к бесконечному спектру возбуждающего тока. Поэтому необходимо рассматривать бесконечное число мод. Однако если указанный спектр сосредоточен в низкочастотной области, всегда можно взять N конечным.

На рис. 2, 3 приведены полученные на основе соотношений, приведенных в параграфе 2, результаты моделирования излучения синусоидального точечного дипольного

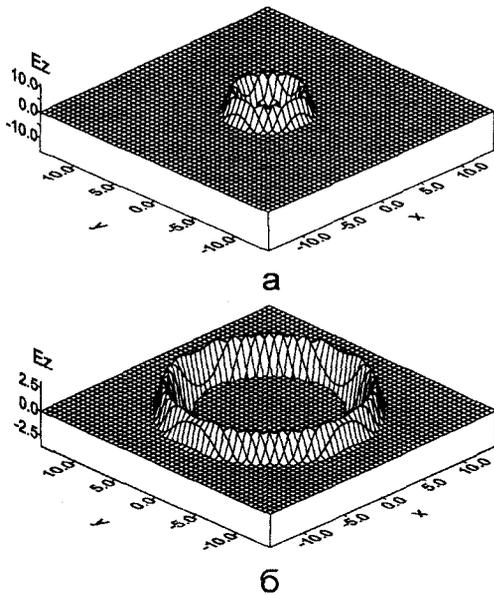


Рис. 2. Компонента E_z в плоскости $z=0$ для диполя в диэлектрическом кубе с размером $a\omega_0/c = 10.0$ в моменты $\omega_0 t = 8.0$ (а) и $\omega_0 t = 20.0$ (б)

тока, расположенного в центре диэлектрического куба с постоянной проницаемостью $\epsilon = 4$ и действовавшего один период. Используются прямоугольные объемные конечные элементы, а результаты представлены в безразмерных координатах. Для устранения расходимости, связанной с точечным источником, последний был «размазан» по конечному элементу в начале координат, т.е. плотность тока в виде дельта-функции заменена на соответствующую кусочно-постоянную величину. От центра возбуждения расходится сферическая волна (см. рис. 2), которая при достижении границы раздела (см. рис. 2, б) создает отраженные волны, при этом сферический характер нарушается (см. рис. 3). До момента прихода волны к угловым точкам ДР (см. рис. 3, б) в

плоскости $z=0$ для E_z можно рассматривать скалярную задачу, соответствующую ориентации тока вдоль оси z . После переотражений от граней задача принципиально становится векторной.

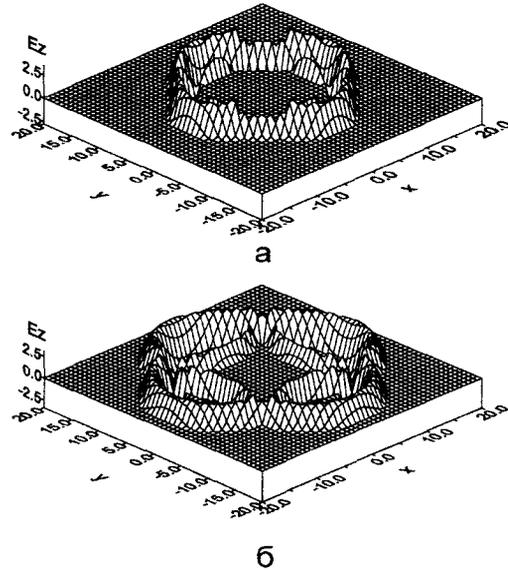


Рис. 3. Компонента E_z в плоскости $z=0$ для диполя в диэлектрическом кубе с размером $a\omega_0/c = 10.0$ в моменты $\omega_0 t = 24.0$ (а) и $\omega_0 t = 28.0$ (б)

ВЫВОДЫ

Получены уравнения возбуждения открытых резонаторов и волноводных трансформаторов, основанные на методе функций Грина. Используются функции Грина свободного пространства, при этом формулы возбуждения записаны в виде ИУ в пространственно-временной области. Кроме того, для резонатора приведены формулы возбуждения, основанные на спектральном подходе. В этом случае получают обыкновенные ИДУ для коэффициентов разложения по координатным собственным функциям, которые можно решить, например методом Рунге–Кутты. Указанные соотношения можно переформулировать в виде пространственно-временных тензорных функций Грина [6, 7]. Процесс возбуждения сводится к распространению, трансформации и дифракции импульсов (нестационарных волн). Динамика процессов может быть очень сложной, особенно при наличии разных возбуждений, возникающих в разное время в разных обла-



тях. В частности, возможно возбуждение внешним импульсом, соответствующим плоской пространственной волне. Тогда указанное поле необходимо включить в \vec{E}_m . Наличие диэлектрических областей и дисперсии в них приводит к эффекту трансформации формы импульсов, который действует наряду с аналогичным влиянием дифракции. Полученные соотношения удовлетворяют принципу причинности, согласно которому возбуждение в некоторой точке появляется лишь в момент прихода его со скоростью света из ближайших возбужденных точек. Указанное возбуждение распространяется по прямой с максимальной скоростью, равной скорости света, включая и диэлектрические области. В них ему соответствуют бесконечно большие частоты, для которых дисперсия отсутствует, а амплитуда пренебрежимо мала. Соответственно плотность энергии такого возбуждения, прошедшего через диспергирующую среду, в момент прихода будет бесконечно малой. Большая часть энергии в диэлектрических телах естественно распространяется со скоростью меньшей, чем скорость света.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М., 1988.
2. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М., 1973.
3. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М., 1983.
4. Марков Г.Т., Панченко Б.А. Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов // Изв. вузов. Радиотехника. 1964. Т. 7, № 1. С. 34–41.
5. Панченко Б.А., Нефедов Е.И. Микрополосковые антенны. М., 1986.
6. Давидович М.В. К нестационарной теории возбуждения резонаторов // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 10. С. 1198–1205.
7. Давидович М.В. К нестационарной теории возбуждения волноводов // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 11. С. 1285–1292.
8. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ / Под ред. В.В.Никольского. М., 1982.
9. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
10. Вайнштейн Л.А. Электронные волны в периодических структурах // ЖТФ. 1957. Т. 27, вып. 10. С. 2340–2352.
11. Солнцев В.А. Возбуждение однородных и периодических волноводов сторонними токами // ЖТФ. 1968. Т. 38, вып. 1. С. 101–108.
12. Маненков А.Б. Возбуждение открытых периодических волноводов // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 2. С. 263.
13. Маненков А.Б. Возбуждение открытых однородных волноводов // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 5. С. 739.
14. Маненков А.Б. Возбуждение быстрых волн в открытом волноводе с диэлектрической стенкой // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 7. С. 1025.
15. Вайнштейн Л.А., Маненков А.Б. Возбуждение открытых волноводов // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике: 7-я зимняя школа-семинар инженеров. Саратов, 1986. Ч.1 С. 143–197.
16. Борисов В.В. Неустановившиеся поля в волноводах. Л., 1991.
17. Михайлов В.Н., Корроза В.И., Голиков М.Н. Исследование метода нестационарных волноводных уравнений для расчета импульсных процессов в нерегулярных линиях передачи // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 4. С. 1–8.
18. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М., 1977.
19. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
20. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: В 2 т. М., Т. 1, 1978.
21. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М., 1966.