



### Заключение

Предложена схема учета ангармонического смещения частот, основанная на использовании результатов модельных неэмпирических квантовых расчетов параметров адиабатического потенциала. Схема позволяет оценить влияние слагаемых ангармонических констант на величину сдвига колебательных полос в спектрах ИК и КР. Хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных по структуре и спектрам в мономерах и димерах карбоновых кислот дает основание утверждать, что рассмотренная математическая модель молекулярных колебаний и описанная методика оценки ангармонического сдвига полос в спектрах ИК и КР могут быть использованы в предсказательных расчетах колебательных состояний димеров с водородной связью.

### Список литературы

1. Flakus H. T., Tyl A. Polarized IR spectra of hydrogen bond in acetic acid crystals // *Chemical Physics*. 2007. Vol. 336. P. 36–50.
2. Matanovic L., Doslic N. Theoretical modeling of the formic acid dimer infrared spectrum. Shaping the O–H stretch bond // *Chemical Physics*. 2007. Vol. 338. P. 121–126.
3. Olbert-Majrat A., Ahokas J., Lundell J., Pettersson M. Raman spectroscopy of formic acid and its dimers isolated in low temperature argon matrices // *Chemical Physics Lett*. 2009. Vol. 468. P. 176–183.
4. Durlak P., Latajka Z. Cal-Parinello molecular dynamics and density functional Theory simulation of infrared spectra for acetic acid monomers and cyclic dimers // *Chemical Physics Lett*. 2009. Vol. 477. P. 249–264.
5. Элькин Л. М., Лихтер А. М., Гречухина О. Н. Моделирование межмолекулярного взаимодействия в димерах карбоновых кислот // *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии*. 2009. № 1 (5). С. 52–58.

6. Элькин М. Д., Шальнова Т. А., Колесникова О. В. Моделирование адиабатических потенциалов карбоновых кислот // *Вестн. СГТУ*. 2009. № 1 (35), вып. 1. С. 76–81.
7. Гречухина О. Н. Моделирование молекулярной динамики в димерах карбоновых кислот: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Астрахань, 2009. 156 с.
8. Эрман Е. А., Элькин П. М., Гречухина О. Н. Информационная технология «Gaussian» и структурно-динамические модели кислородосодержащих соединений // *Вестн. СГТУ*. 2009. № 2 (39), вып. 2. С. 108–114.
9. Элькин П. М., Шальнова Т. А., Гречухина О. Н. Моделирование структуры и колебательных спектров кислородосодержащих соединений // *Изв. Сарат. ун-та. Новая сер.* 2009. Т. 9. Сер. Физика, вып. 1. С. 24–30.
10. Frisch M. J., Trucks G. W., Schlegel H. B. et al. Gaussian 03. Revision B.03. 2003. Pittsburg PA : Gaussian Inc., Pittsburg PA, 2003.
11. Краснощечков С. В., Степанов Н. Ф. Масштабирующие множители как эффективные параметры для коррекции неэмпирического силового поля // *Журн. физ. химии*. 2007. Т. 81, № 4. С. 680–689.
12. Павлючко А. И., Грибов Л. А. Соотношение решений ангармонических колебательных задач в криволинейных и линейных колебательных координатах // *Опт. и спектр*. 1985. Т. 58, № 6. С. 1247–1251.
13. Nielsen H. H. The vibration-rotation energies of molecules and their spectra in the infrared // *Handbook der Physik*. 1953. Vol. 37, № 1. P. 173–313.
14. Элькин М. Д. Ангармонический анализ колебательных спектров многоатомных молекул // *Опт. и спектр*. 1983. Т. 54, вып. 4, С. 895–898.
15. Элькин М. Д. Ангармонический анализ интенсивностей в ИК колебательных спектрах многоатомных молекул // *Опт. и спектр*. 1984. Т. 57, вып. 3. С. 561–564.
16. Герцберг Г. Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул. М. : Изд-во иностр. лит., 1949. 647 с.
17. Свердлов Л. М., Ковнер М. А., Крайнов Е. П. Колебательные спектры многоатомных молекул. М. : Наука, 1970. 550 с.
18. Benmalti M., Chamma D., Blaise P., Heri-Rousseau O. Theoretical interpretation of infrared lineshape of gaseous propynoic and acrylic acid dimers // *J. Mol. Struct*. 2006. Vol. 785. P. 27–31.

УДК. 537.8; 539.186.2

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА. II

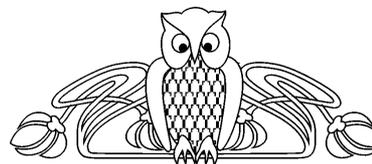
Ю. Н. Зайко

Поволжская академия государственной службы им. П. А. Столыпина, Саратов  
E-mail: zurnick@rambler.ru

Данная статья является продолжением работы автора [1]. В ней подробно рассматривается вопрос выбора метрики, а также другие возможные метрики, как, например, обобщение метрики Шварцшильда за счет учета излучения массивным телом электромагнитного излучения. Рассмотрена проблема понижения симметрии изначально сферически-симметричной задачи до

аксиальной на уровне решения уравнений Эйнштейна–Максвелла (или Максвелла) за счет фиксации направления оси z системы координат и восстановления этой симметрии нулевыми модами. Рассмотрены локализованные решения уравнений Эйнштейна–Максвелла – геоны.

**Ключевые слова:** метрика, нулевая мода, геон, излучение.





**Explicit Solutions of the Maxwell–Einstein Equations. II**

**Yu. N. Zayko**

This article is a continuation of the previous author's article on the same problem [1]. Here choice of metrics discusses in detail, so as another possible metrics, like generalization of the Schwarzschild metric of massive body due to radiation of electromagnetic wave. A problem of lowering the initially spherical symmetry to axial one in solution's level for Einstein–Maxwell (or Maxwell) equations due to fixation of z-axis of coordinate system and its recovery with the help of zero-modes is discussed. Localized solutions of the Einstein–Maxwell equations (geons) are discussed, too.

**Key words:** metric, zero mode, geon, radiation.

**Введение**

Настоящая статья является продолжением работы автора [1], посвященной рассмотрению особенностей распространения сферических электромагнитных волн (ЭМВ) во Вселенной с учетом влияния их собственного гравитационного поля с помощью уравнений Максвелла–Эйнштейна. Основное внимание в ней уделяется не обсуждению полученных в [1] результатов, а разбору некоторых тонких вопросов, касающихся методов решения задачи и др. В основном это следующие вопросы:

- использованная метрика и другие возможные метрики;
- локализованные сгустки электромагнитной и гравитационной энергии – геоны [2] и др.

Также обсуждается вопрос угловой зависимости ЭМВ в случае сферической симметрии.

**1. Использованная метрика**

Напомним постановку задачи [1]. В качестве исходных уравнений в [1] выбраны уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения электромагнитного поля в вакууме (уравнения Максвелла без источников), связанные друг с другом [3]:

$$\begin{aligned}
 R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R &= \frac{8\pi K}{c^4}T_{ik}; F_{,k}^{ik} + \Gamma_{kl}^l F^{ik} = 0; \\
 R_{ik} &= \Gamma_{ik,l}^l - \Gamma_{il,k}^l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l; \\
 T_{ik} &= \frac{1}{4\pi} \left( -F_{il}F_k^l + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь  $R$  – след тензора Риччи  $R_k^i$ :  $R = R_i^i$ ,  $g_{ik}$  – метрический тензор;  $T_{ik}$  и  $F^{ik}$  – тензор энергии-импульса и электромагнитный тензор;

$\Gamma_{kl}^i$  – символы Кристоффеля;  $c$  – скорость света в вакууме,  $K$  – постоянная тяготения; индексы  $i, k, l$  пробегает значения 0, 1, 2, 3; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; запятая означает обычную, т.е. нековариантную производную [3]. Исследовались решения (1), соответствующие наличию на бесконечности сферической ЭМВ. Для этого, следуя [3], зададим вид интервала

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - \\
 &- r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $v = v(t, r, \theta)$ ,  $\lambda = \lambda(t, r, \theta)$ ;  $x^0 = ct$ ,  $t$  – время;  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$  – сферические координаты. Вид метрики продиктован тем, что компоненты поля ЭМВ (E- и M-типа) зависят от полярного угла  $\theta$ <sup>1</sup>.

Для разделения переменных в [1] использовано дополнительное условие:  $\lambda = \alpha(r, t) + \beta(\theta)$ ,  $v = -\alpha(r, t) + \beta(\theta)$ . После разделения переменных система (1) решалась обычным образом, т.е. тензор энергии-импульса  $T_{ik}$  выражался через тензор Риччи и в конечном счете через метрический тензор, а с другой стороны, – через компоненты тензора электромагнитного поля  $F_{ik}$ . Строгое следование этой традиционной процедуре с метрикой (2) приводит к противоречию – левая и правая части полученных уравнений обладают разной зависимостью от угла  $\theta$ . Это противоречие частично снимается после усреднения  $T_{ik}$  по интервалу времени, значительно превышающему период волны. Далее ход рассуждений в [1] напоминал процедуру, с помощью которой устраняются противоречия в квантовой электродинамике, связанные с появлением бессмысленных расходящихся выражений. Выражения для компонент тензора энергии-импульса бессмысленны по причине, указанной выше. Однако их разности приводят к выражениям, свободным от указанного недостатка.

После выполнения описанных операций с тензором  $T_{ik}$  в уравнениях (1) и их решения было получено окончательное выражение для коэффициентов (2):

<sup>1</sup> Система координат, как и в [1], выбрана так, что проекция полного момента ЭМВ на ось  $z$  равна нулю. Этим исключается зависимость решения от угла  $\varphi$ .



$$e^{\alpha} = \exp\left(\frac{r_c}{r}\right), \quad r_c = \frac{l(l+1)c}{\omega}, \quad \beta = 0. \quad (3)$$

Здесь  $l$  – целое неотрицательное число, определяющее орбитальный угловой момент ЭМВ,  $\omega$  – частота волны на бесконечности.

## 2. Нулевые моды

Использованные в работе [1] решения уравнений Максвелла обладают одной особенностью<sup>2</sup> – они не учитывают бесконечнократного вырождения, связанного с произволом выбора оси  $z$ , на которую проецируется полный момент сферической волны. Фиксация оси  $z$  влечет понижение симметрии исходной задачи на уровне решения. Как показано в квантовой теории поля<sup>3</sup> [4], при попытке выполнить квазиклассическое квантование вблизи таких решений возникают так называемые нулевые моды, описывающие переходы между вырожденными состояниями. Нулевые моды возникают всегда, когда квантуется зависящее от координаты статическое решение теории, имеющей группу симметрии, например обладающей трансляционной инвариантностью [4, с.154].

Нулевая мода в нашей задаче связана с вырождением по направлению оси  $z$  – все решения, отличающиеся лишь ее направлением, допустимы и имеют одинаковую энергию. Чтобы избавиться от нее, надо явно учесть возможность перехода между этими состояниями. Проще всего это сделать в рам-

ках квантовомеханического рассмотрения. Задача облегчается тем, что угловая зависимость волновой функции фотона такая же как и классической ЭМВ. Вычислим вероятность перехода из состояния с орбитальным моментом  $l$ , угловая зависимость которого описывается  $P_l(\cos(\theta))$  в системе координат с осью  $z$ , в состояние с таким же моментом, но в системе координат, ось  $z'$  которой составляет с осью  $z$  некоторый угол  $\Delta\theta$ . В этой системе угловая зависимость волновой функции будет описываться  $P_l(\cos(\theta+\Delta\theta))$ . Представим  $P_l(\cos(\theta+\Delta\theta))$  в виде разложения по полиномам Лежандра  $P_l^k(\cos(\theta))$ :

$$P_l(\cos(\theta + \Delta\theta)) = \sum_{k=-l}^l I_k(\Delta\theta) P_l^k(\cos(\theta)). \quad (4)$$

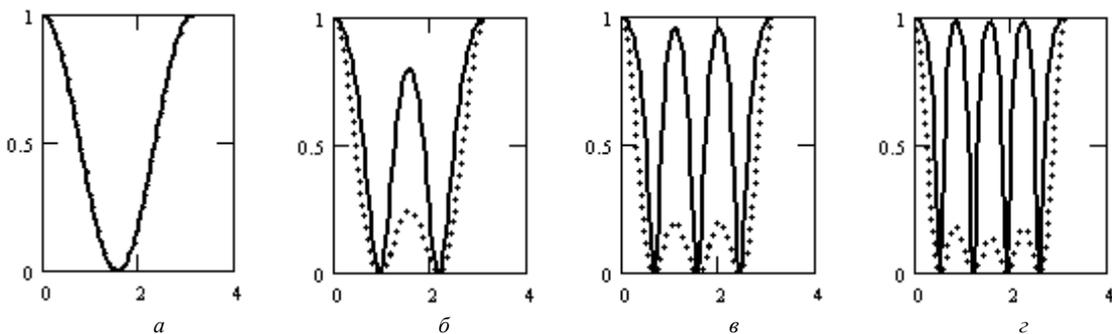
Амплитуду вероятности перехода  $I_k(\Delta\theta)$  можно найти с помощью известной теоремы сложения для сферических функций [6]:

$$P_l(\cos(\theta + \Delta\theta)) = P_l(\cos(\theta))P_l(\cos(\Delta\theta)) + 2 \sum_{k=1}^l \frac{(l-k)!}{(l+k)!} P_l^k(\cos(\theta))P_l^k(\cos(\Delta\theta)). \quad (5)$$

Используя условие ортогональности для присоединенных полиномов Лежандра [6], получим:

$$I_k(\Delta\theta) = P_k(\cos(\Delta\theta)) \cdot \delta_{k0} + 2 \frac{(l-k)!}{(l+k)!} P_l^k(\cos(\Delta\theta)), \quad (6)$$

где  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера. Интересующие нас вероятности вычисляются по формуле



Зависимость вероятности  $w_l(\Delta\theta)$  присутствия  $P_l(\cos(\theta+\Delta\theta))$  в  $P_l(\cos(\theta))$  с учетом нормировки. По оси ординат отложены: точки –  $(P_l(\cos(\theta)))^2$ , сплошная кривая –  $w_l(\Delta\theta)$ ; по оси абсцисс отложены углы  $\theta$  и  $\Delta\theta$  от 0 до  $\pi$ ;  $a - l = 1$  (кривые слились),  $b - l = 2$ ,  $v - l = 3$ ,  $z - l = 4$

<sup>2</sup> Как и все встречающиеся в литературе (см., например, [5]). Поэтому, например, распределение полей в сферическом резонаторе имеет аксиальную симметрию.

<sup>3</sup> В классической электродинамике (и механике) при построении последовательной теории возмущений сталкиваются с тем же явлением.



$$w_l = \frac{[P_l(\cos(\Delta\theta))]^2}{\sum_{k=0}^l [I_k(\cos(\Delta\theta))]^2}. \quad (7)$$

Знаменатель в (7) связан с тем, что присоединенные полиномы Лежандра – ортогональная, но неортонормированная система. Величина  $w_l$  представляет «долю» функции  $P_l(\cos(\theta+\Delta\theta))$  в исходной функции  $P_l(\cos(\theta))$ . На рисунке представлены результаты расчета вероятности  $w_l(\Delta\theta)$  для различных гармоник.

Полученные результаты говорят о том, что область углов  $\Delta\theta_c$ , в которой присутствие «смещенной» гармоники  $P_l(\cos(\theta+\Delta\theta))$  в «основной»  $P_l(\cos(\theta))$  значительно, сравнима по величине с масштабом угловой зависимости  $\theta_c$  основной гармоники, определяемой, как известно, величиной порядка  $1/l$ . Этот эффект можно приписать действию нулевой моды, поскольку обе упомянутые гармоники обладают одинаковой энергией. Разумеется, он исчезает, когда направление оси  $z$  фиксировано физически, например задается внешним полем<sup>4</sup>.

### 3. Другие метрики

Приведенная выше метрика получена в основном с использованием уравнений Максвелла. Роль уравнений Эйнштейна свелась к тому, что  $R_0^0 = R_1^1$ , причем сами значения тензора Риччи не важны. Это соответствует поставленной задаче – найти метрику пространства-времени, искривленного присутствием только ЭМВ, но не каких-либо массивных тел. Поэтому результат не зависит от амплитуды волны. Зависимость от амплитуды возникает в другой задаче, связанной с определением метрики, создаваемой массивным излучающим телом, т.е., по сути дела, поправок к шварцшильдовской метрике. Покажем, что постановка задачи в [1] позволяет сделать это, изменив ход вычислений.

Приравняем выражения для  $T_0^0$ , выраженные через элементы метрики с помощью

<sup>4</sup> Полученный результат представляет и самостоятельный интерес, поскольку позволяет объяснить или, скорее, по-новому взглянуть на результаты классической электродинамики. Например, можно задать вопрос: почему распределение полей в сферическом резонаторе имеет аксиальную симметрию, как утверждается в учебниках (см., например, [5]), если направление оси  $z$  не фиксировано?

уравнений Эйнштейна, опуская члены, содержащие зависимость от угла  $\theta$ <sup>5</sup>, и явно через решения уравнений Максвелла для сферических ЭМВ E-типа:

$$\frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 = -e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (8)$$

$$\frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 = \frac{K}{c^4} \left\{ e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \times \left[ \frac{1}{r^2} e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + r^2 e^{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2,$$

где компонента электромагнитного тензора  $F_{01} = \Psi(r, t) \cdot \Phi(\theta)$ . Последнее выражение можно упростить, вводя функцию  $f(r, t)$ , уравнение для которой имеет вид [1]

$$f'' - \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \dot{f} \mp \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{f'}{f} f = 0; \quad (9)$$

$$f = r^2 \Psi \sim r^2 E_r,$$

где знаки  $\pm$  соответствуют сходящейся и расходящейся волне,  $E_r$  – радиальная составляющая электрического поля ЭМВ. Представляя  $f(z, t) = G(z) e^{\pm i\omega t}$ ,  $|z| = \omega r/c$ ,  $\omega$  – частота, для  $G(z)$  получим уравнение в плоскости комплексного  $z$

$$GG'' - (G')^2 + i \frac{l(l+1)}{z^2} GG' = 0; \quad G' = \frac{dG}{dz}, \quad (10)$$

которое мы используем ниже. В результате мы приходим к уравнению, определяющему метрику:

$$-e^{-\alpha} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{K}{c^4} \left[ 1 - \frac{2r^2}{r_c^2} e^\alpha \right] \cdot \left( \frac{f}{r^2} \right)^2 \Phi^2(\theta). \quad (11)$$

При этом мы опять столкнулись с отмеченным выше противоречием, которое уже не устраняется процедурой вычитания, примененной в [1]. Однако, учитывая результат, полученный в параграфе 1, мы при усреднении тензора энергии-импульса ЭМВ наряду с усреднением по времени вправе выполнить усреднение и по углу  $\theta$ . В результате, учитывая нормировку шаровых функций, мы приходим к уравнению, отличающемуся от (11)

<sup>5</sup> Эти члены выражаются через производные функции  $\beta(\theta)$ , которые, как показано в [1], равны нулю.



лишь отсутствием  $\Phi^2(\theta)$  в правой части. Решения этого уравнения определяют искомую метрику, отличающуюся от полученной в [1].

Приведем вид уравнений, следующих из (11), после усреднения по  $\theta$ :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \left[ y - 1 + \left( t - \frac{2}{yt} \right) \right] \cdot |\Omega|^2, \quad (12)$$

$$\Omega = \Omega_0 \exp \left[ il(l+1) \int_t^{t_R} e^{iu} \frac{du}{u^2} \right].$$

Здесь  $y = e^{-\alpha}$ ,  $t = 1/x = r_c / r$ ,  $\Omega = G \cdot (\Gamma)^{1/2}$ ,  $\Gamma = 4K/c^4 r_c^2$ ,  $t_R = r_c / R$ ,  $R$  – радиус фотосферы. Граничным условием для (12) является  $y(t=0) = 1$ , т.е. метрика на бесконечности ( $x \rightarrow \infty$ ) является плоской. В (12) также использовано решение (10) [1]:

$$\ln G = i \int \exp \left[ \frac{il(l+1)}{z} \right] dz,$$

соответствующее сферической волне на бесконечности. Уравнения (12) окончательно приводятся к виду

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \left\{ y - 1 + \left[ t^2 - \frac{2}{y} \right] \cdot |\Omega_0|^2 \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ -2l(l+1) \int_t^{t_R} \frac{\text{Sin}(u)}{u^2} du \right] \right\}. \quad (13)$$

При отсутствии ЭМВ (13) имеет известное решение в виде шварцшильдвской метрики

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad r_g = \frac{2Km}{c^2},$$

где  $m$  – масса тела, создающего гравитационное поле. В уравнении (13) можно опустить  $t^2 \ll 2/y$  на больших расстояниях  $r \gg r_c$ .

Оценим порядок величины  $|\Omega_0|^2$ , связанной с плотностью потока энергии ЭМВ излучаемой телом. Заметим, что на больших расстояниях поле излучения звезды, рассматриваемой как сферический излучатель, можно заменить полем элементарного электрического диполя [7]. Учитывая это, можно связать поле  $E_r$  ЭМВ и светимость излучающего тела (звезды)  $L$  и найти выражение для  $|\Omega_0|^2$ :

$$|\Omega_0|^2 = G(R) \sqrt{\Gamma} = R^4 E_r^2(R) \cdot \frac{4K}{c^4 r_c^2} = \\ = \frac{3}{\pi [l(l+1)]^2} \cdot \frac{LK}{c^5}, \quad (14)$$

где  $R$  – радиус излучающей поверхности (фотосферы) звезды. Подстановка в (14) значений для  $L = 4 \cdot (10^{32} \div 10^{35})$  Дж/с<sup>6</sup> (в видимой и рентгеновской частях спектра) приводит к значению для  $|\Omega_0|^2 \approx (10^{-20} \div 10^{-17}) / [l(l+1)]^2$ . Беря  $R = 30R_c^7$ , где  $R_c = 6.96 \cdot 10^{-8}$  м – радиус Солнца, получим значение  $t_R \approx 7.63 l(l+1) \cdot (10^{-19} \div 10^{-22})$  в зависимости от спектрального диапазона.

Учитывая такой разброс по величине разных членов в уравнении (13), трудно рассчитывать получить сколько-нибудь значимые количественные результаты. Однако можно исследовать асимптотику (1) в пределе  $t \ll 1$  ( $r \gg r_c$ ). Разлагая подынтегральное выражение по  $u$ , можно привести уравнение к известному виду [9, с.306]. Приведем окончательное выражение для метрики:

$$y = e^{-\alpha} = 1 - \frac{r_g}{r} - \frac{2|\Omega_0|^2}{2l(l+1)-1} \left( \frac{r_c}{r} \right)^{2l(l+1)}. \quad (15)$$

Из (1) видно, что поправки к шварцшильдвской метрике, описываемой первыми двумя слагаемыми в (15), за счет излучения массивным телом в пределах известной Вселенной чрезвычайно малы. Тем не менее, полученный результат представляет принципиальный интерес<sup>8</sup>. Чтобы получить метрику пространства-времени в окрестности массивного дипольного (в общем случае мультипольного) излучателя надо в (14) заменить светимость звезды  $L$  на интенсивность  $I$  дипольного (мультипольного) излучения [3].

#### 4. Геоны

Уравнения Эйнштейна–Максвелла предсказывают возможность существования геонов, описываемых как «метастабильное объединение энергии электромагнитных или гравитационных волн, сдерживаемое воедино своим собственным гравитационным притяжением» [2, с.543].

Геон – существенно нелинейный объект, обязанный своим происхождением нелинейности уравнений Эйнштейна, или, точнее,

<sup>6</sup> Для звезд главной последовательности  $L = 10^6 L_c$ ,  $L_c = 4 \cdot 10^{26}$  Дж/с – светимость Солнца. Для сверхновых  $L = 10^9 L_c$  [8].

<sup>7</sup> Для звезд главной последовательности с  $L = 10^6 L_c$ .

<sup>8</sup> Как, например, метрика Нордстрёма–Рёсслера.



Эйнштейна–Максвелла. Используемая в [1] процедура усреднения  $T_{ik}$ , устраняя дополнительную нелинейность уравнений (1), связанную с нелинейностью  $T_{ik}$ , не влияет на исходную нелинейность уравнений Эйнштейна. Поэтому среди решений уравнений (1) есть решения описываемого типа. Чтобы получить их явный вид, напомним некоторые результаты [1].

Решение уравнения (1) для волны  $E$ -типа в комплексной плоскости  $z$  имеет вид<sup>9</sup>  $f(z, t) = G(z)e^{\pm i\omega t}$ ,  $|z| = \omega r/c$ ,  $\omega$  – частота;  $f = r^2\Psi(r, t)$ ,  $F_{01} = \Psi(r, t) \cdot \Phi(\theta)$ ,  $\Phi(\theta)$  характеризует угловую зависимость решения. Поведение  $G(z)$  описывается уравнением (10). Точное решение для  $G$  с граничным условием на бесконечности  $G \sim e^{iz}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \ln G &= C_1 \int e^{\frac{il(l+1)}{z}} dz = \\ &= C_1 \left[ ze^{\frac{il(l+1)}{z}} - il(l+1) \cdot Ei\left(i \frac{l(l+1)}{z}\right) + C_2 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $Ei(x)$  – интегральная показательная функция,  $C_1 = i$  и  $C_2$  – постоянные.

Для описания локализованных решений уравнений (1) надо в (16) выбрать константу  $C_1 < 0$ . Тогда асимптотика полученного решения будет иметь вид

$$f \sim \exp(-i\omega t + C_1 \rho), \quad \rho = \frac{\omega}{c} r. \quad (17)$$

Выражение для метрики, полученное с помощью решения (17), совпадает с выражением (3) для метрики, полученным в [1] для решений волнового типа. Из выражения (17) следует, что заряд геона равен нулю.

#### Заключение

В настоящее время найдено множество точных решений уравнений Эйнштейна и число новых публикаций растет<sup>10</sup>. Составлены каталоги таких решений [10]. Отыскать неизвестное решение – задача весьма проблематичная. Тем не менее, стоит привести замечание из [10], где цитируются слова Киннерсли [11]: «Большинство известных точных решений<sup>11</sup> описывает ситуации от-

кровенно нефизические, и существует тенденция меньше всего внимания уделять самым полезным решениям. Однако вина за такое положение частично лежит и на нас – тех, кто работает в этой области. Мы углубляемся в изотропные токи, макроскопические поля нейтрино и теорию тахионов в погоне за большей «общностью». Нам как будто доставляет удовольствие придумывать уводящие в сторону и противоположные интуиции понятия. А сделав это, мы оставляем нашу новорожденную метрику хромать на разъезжающейся во все стороны тетраде без малейшей надежды на истолкование»<sup>12</sup>.

В настоящей работе принят противоположный, физический подход. Решения, не поддающиеся физической интерпретации, вряд ли стоит исследовать вообще – не потому что они ошибочны, а по причине их бессмысленности. Так, решения типа Райнича [12], скорее всего, не реализуются по причинам, на которые указал Виттен [13]<sup>13</sup>.

Методы, использованные в работе, также отличаются по строгости от используемых, например, в [10]. Однако это не повод для того, чтобы их отвергнуть. Аналогичные методы неплохо зарекомендовали себя в других областях физики. Можно надеяться, что дальнейшая разработка проблем, затронутых в настоящей работе, приведет и к усовершенствованию используемых методов.

В работе приведены результаты, которые позволяют заполнить пробелы в области приложений ОТО, как, например, поправки к шварцшильдовской метрике за счет излучения массивного тела, а также пролить свет на некоторые принципиальные вопросы классической электродинамики, как, например, на вопрос об угловой зависимости полей в сферически симметричных задачах. Показано, что процедуру усреднения тензора энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна–Максвелла можно обосновать, если серьезно отнестись к ограничениям, накладываемым на эти уравнения.

<sup>12</sup> Несмотря на то, что это сказано в 1975 г., ситуация вряд ли изменилась, поскольку она проистекает из свойств человеческой природы, мало меняющейся на протяжении тысячелетий.

<sup>13</sup> Другой причиной нереализуемости решения Райнича является то, что в уравнениях Эйнштейна гравитационное поле само себя не создает [14].

<sup>9</sup> Уравнение (9) для  $f(z, t)$  приведено выше.

<sup>10</sup> Со скоростью примерно 100 в год [10].

<sup>11</sup> Уравнений Эйнштейна.



Вопрос о применимости полученных результатов в космологии, затронутый в [1], требует использования более реалистичных нестационарных моделей Вселенной и составляет предмет самостоятельного исследования.

*Автор благодарит М. В. Давидовича за обсуждение некоторых результатов работы.*

#### Список литературы

1. Зайко Ю. Н. Точные решения уравнений Максвелла–Эйнштейна // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. 2010. Т. 10. Сер. Физика, вып. 1. С. 50–58.
2. Мизнер Ч., Уилер Дж. Классическая физика как геометрия // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М. : Мир, 1979. 592 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М. : Наука, 1967. 460 с.
4. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / пер. с англ. ; под ред. О. А. Хрусталова. М. : Мир, 1985. 414 с.
5. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М. : Наука, 1989. 544 с.
6. Арфкен Г. Математические методы в физике / сокр. пер. с англ. В. В. Чепкунова. М. : Атомиздат, 1970. 712 с.
7. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М. ; Л. : Энергия, 1967. 371 с.
8. Тутуков А. В. Звезды // Физическая энциклопедия : в 5 т. М. : Сов. энцикл., 1980. Т.2. С.68–69.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / пер. с нем. С. В. Фомина. М. : Наука, 1971. 576 с.
10. Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна / под ред. Э. Шмунтцера ; пер. с англ. М. : Энергоиздат, 1982. 416 с.
11. Kinnersley W. Recent progress in exact solutions // General Relativity and Gravitation : proc. of GR7 / ed. G. Shaviv, J. Rosen. N. Y. ; L. : Wiley, 1975.
12. Rainich G. Y. Electrodynamics in the General Relativity Theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1925. Vol. 27. P. 106–136.
13. Witten L. Initial Value Problem of the Einstein–Maxwell Field // Phys. Rev. 1960. Vol. 120, № 2. P. 635–640.
14. Вебер Дж. Гравитация и свет // Гравитация и относительность / пер. с англ. ; под ред. А. З. Петрова. М. : Мир, 1965. 544 с.