



УДК 535.14; 538.56

## КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ДИНАМИКА МОДЫ В СРЕДЕ С КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А.С. Барсов, А.В. Горохов

Самарский государственный университет  
E-mail: barsoff\_andrey\_s@mail.ru



Динамика трех фотонных мод в теории параметрического усилителя в среде с учетом керровской нелинейности может быть исследована с использованием динамической группы  $WSp(6, R)$ . Для вырожденного параметрического усилителя с классической накачкой описание сводится к динамике когерентных состояний группы  $SU(1,1)$ . Рассчитаны временные зависимости средних чисел фотонов и сжатия. Показано, что «включение» керровской нелинейности приводит к подавлению параметрического усиления.

**Ключевые слова:** когерентные состояния, эффект Керра, параметрическое усиление, сжатие.

### Coherent States and Mode Dynamics in Kerr Nonlinear Medium

A.S. Barsov, A.V. Gorokhov

Dynamics of three photonic modes in the theory of parametric amplifier in the medium, taking into account the Kerr nonlinearity, can be studied using the dynamical group  $WSp(6, R)$ . For a degenerate parametric amplification with classical pump the description is reduced to the dynamics of coherent states of  $SU(1,1)$  group. The time dependence of average numbers of photons and squeezing are calculated. It is shown that the «switching-on» of the Kerr nonlinearity leads to suppression of the parametric amplification.

**Key words:** coherent states, Kerr effect, parametric amplification, squeezing.

### Введение

Хотя квантовая оптика направлена на изучение явлений, в которых проявляются квантовые свойства света [1], использование упрощенного полуклассического подхода является достаточно популярным. Именно на основе такого подхода, сохраняющего аппарат классической физики – уравнения Максвелла, дополненные уравнениями для среднего значения поляризации среды, были изучены многочисленные нелинейные и когерентные явления в оптике [2–4].

С другой стороны, метод, основанный на использовании когерентных состояний (КС), стал сейчас одним из наиболее используемых в современной квантовой оптике [1, 2, 4]. Это объясняется тем, что этот метод является наглядным и универсальным. С его помощью находятся квазиклассические асимптотики квантовых величин, а также получаются результаты, справедливые за пределами

применимости теории возмущений. КС являются квантовыми состояниями, наиболее близкими к классическим. Движение в фазовом пространстве точки, соответствующей КС, подчиняется классическим уравнениям движения, поэтому квантовую задачу можно свести к классической задаче.

В данной работе когерентные состояния использованы для исследования квазиклассической динамики одной модели квантовой оптики – вырожденного параметрического усилителя в среде с керровской нелинейностью. Выведены уравнения движения в представлении КС, исследована их временная динамика и выполнены расчеты временных эволюций среднего числа фотонов и параметра сжатия фотонной моды в зависимости от параметров модели.

### 1. Гамильтониан эволюции моды в среде с керровской нелинейностью

Рассмотрим ячейку Керра – кристалл с коэффициентом преломления, зависящим от напряженности внешнего (переменного) электрического поля  $E$  по закону [3]:

$$n(E) = n_0 + \alpha E^2.$$

Пусть на этот кристалл падает лазерный пучок с частотой, примерно равной удвоенной частоте собственных колебаний электромагнитного поля в кристалле ( $\omega_l \approx \omega + \omega$ ). (рис. 1).

Будем предполагать интенсивность падающего пучка настолько большой, что его можно считать классическим. Тогда в кристалле может наблюдаться вырожденный параметрический резонанс. Наряду с параметрическим резонансом из-за предполагаемой большой интенсивности электрического поля в кристалле будет также наблюдаться эффект Керра.

Такая система может быть описана гамильтонианом [1, 2]:



$$H(t) = \hbar \omega_0 a^+ a + \hbar \Lambda \left( (a^+)^2 e^{-2i\omega t} + a^2 e^{2i\omega t} \right) + \hbar \kappa(t) (a^+ a)^2, \quad (1)$$

( $\Lambda$  – параметр, определяемый интенсивностью поля накачки и нелинейной восприимчивостью среды для процесса  $\omega_L \rightarrow \omega + \omega$ ,  $\kappa(t)$  – параметр керровской нелинейности). Первое слагаемое в гамильтониане описывает собственное свободное электромагнитное поле в ячейке Керра. Второе слагаемое отвечает за вырожденный параметрический резонанс. Третье слагаемое описывает эффект Керра – сдвиг фазы выходящих пучков в зависимости от интенсивности поля накачки.

Так как рассматривается вырожденное параметрическое усиление, то все сводится к описанию эволюции одной моды. Будем описывать ее динамику при помощи когерентных состояний группы  $SU(1,1)$ .

Такое описание возможно, поскольку гамильтониан (1) выражается через генераторы алгебры Ли группы  $SU(1,1)$ :

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_-, K_+] = 2K_0, \quad (2)$$

где

$$K_+ = \frac{1}{2} a^+ a^+, \quad K_- = \frac{1}{2} a a, \quad K_0 = \frac{1}{2} \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (3)$$

Тогда гамильтониан (1) представится в виде

$$H = 2\hbar \omega_0 K_0 - 1 + 2\hbar \Lambda \left( K_+ e^{-2i\omega t} + K_- e^{2i\omega t} \right) + 4\hbar \kappa(t) K_+ K_-. \quad (4)$$

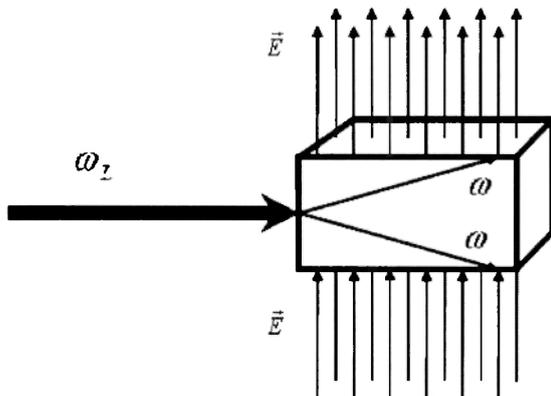


Рис. 1. Схематическое изображение рассматриваемой модели

Построим систему КС по схеме Переломова [5, 6]:

$$|z\rangle = (1 - z\bar{z})^k \exp(zK_+) |k, 0\rangle,$$

где  $k$  – квантовое число, задающее унитарное неприводимое представление группы  $SU(1,1)$ ,  $z \in |z| < 1$ , а вектор  $|k, 0\rangle$  является вакуумным для оператора  $K_-$ , и будем искать эволюцию КС по следующей схеме [6].

Найдем диагональный матричный элемент оператора Гамильтона в представлении КС:

$$H = \langle z | H(t) | z \rangle = H(z, \bar{z}; t), \quad (5)$$

где  $\bar{z}$  – обозначение для  $z$  – комплексно сопряженной переменной.

Далее будем искать решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = -\frac{i}{\hbar} \{z, H(z, \bar{z}; t)\}, \quad (6)$$

где символом  $\{z, H\}$  обозначена скобка Пуассона:

$$\{F, R\} = \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial R}{\partial z^\alpha} \right), \quad (7)$$

а величина  $g_{\alpha\beta}$  вычисляется по формуле

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \quad (8)$$

где  $K(z, \bar{w}) = \frac{\langle z | w \rangle}{\langle z | 0 \rangle \langle 0 | w \rangle}$  – воспроизводящееся

ядро, выполняющее в пространстве голоморфных функций, соответствующих векторам состояний в представлении КС, роль, аналогичную  $\delta$ -функции Дирака.

## 2. Построение эволюции системы с помощью КС группы $SU(1,1)$

Воспользуемся приведенной схемой для решения нашей задачи в представлении КС группы  $SU(1,1)$ . Найдем явный вид диагонального матричного элемента оператора Гамильтона в представлении КС группы  $SU(1,1)$ :



$$H(z, \bar{z}; t) = \langle z | H(t) | z \rangle = 2\hbar\omega_0 \langle z | K_0 | z \rangle - 1 + 2\hbar\Lambda \left( \langle z | K_+ | z \rangle e^{-2i\omega t} + \langle z | K_- | z \rangle e^{2i\omega t} \right) + 4\hbar\kappa(t) \langle z | K_+ K_- | z \rangle.$$

Используя формулы для средних значений операторов  $K_0, K_+, K_-$  [6], найдем, что:

$$H(z, \bar{z}; t) = 2\hbar\omega_0 k \frac{1+z\bar{z}}{1-z\bar{z}} + \frac{2\hbar\Lambda k}{1-z\bar{z}} \left( \bar{z} e^{-2i\omega t} + z e^{2i\omega t} \right) + \frac{8\hbar k \kappa(t) z \bar{z} (2k + z\bar{z})}{(1-z\bar{z})^2}.$$

После очевидных выкладок приходим к уравнению для когерентных состояний, определяющего эволюцию параметра  $z$ :

$$\dot{z} = -\frac{i(1-z\bar{z})^2}{2\hbar k} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = -i \left( 2\omega_0 z + \Lambda \left( e^{-2i\omega t} + z^2 e^{2i\omega t} \right) + 8\kappa(t) \left( kz + \bar{z}z^2 + \frac{2kz^2\bar{z} + z^3\bar{z}^2}{1-z\bar{z}} \right) \right).$$

Известно, что у группы SU(1,1) на состояниях одномодового осциллятора реализуется 2 унитарных неприводимых представления дискретной серии  $T_+^k$ : с  $k = 1/4, 3/4$ , которые соответствуют четным и нечетным уровням.

Важно отметить, что, в отличие от случая вырожденного параметрического усилителя (без учета эффекта Керра), траектории движения и остальные рассчитываемые величины зависят от квантового числа  $k$ .

Решение находилось численно для разных типов зависимостей параметра керровской нелинейности  $\kappa(t)$  от времени.

Здесь мы приведем результаты, выполненные для начального вакуумного состояния сигнальной моды:  $|z(0)\rangle = |0\rangle$  и только для случая керровского слагаемого, включаемого с задержкой:  $\kappa(t) = A e^{-\beta(t-t_0)^2} \cos(\Omega t)$  (рис. 2, 3).

При расчетах параметры обезразмеривались. Рассчитывались траектории КС на комплексной плоскости (в плоскости Лобачевского  $|z| < 1$ ) и временные зависимости среднего числа фотонов в моде  $\langle n \rangle$  и модуль квадратурного параметра сжатия  $\zeta$  [1].

Из рисунков видно, что включение керровского слагаемого изменяет характер зависимостей как среднего числа фотонов, так и сжатия, что может быть использовано в целях управления.

После выключения керровского слагаемого возобновляется параметрическая генерация.

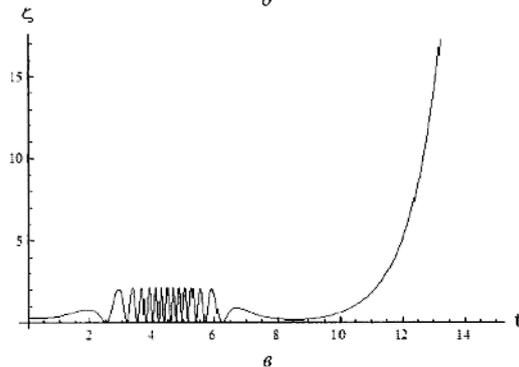
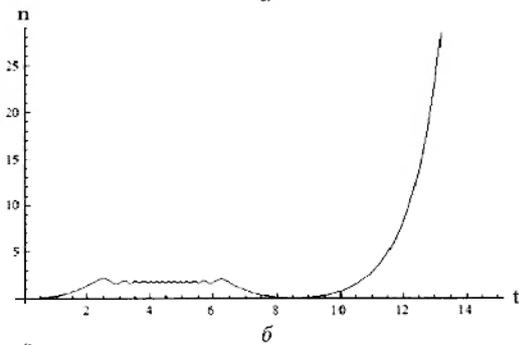
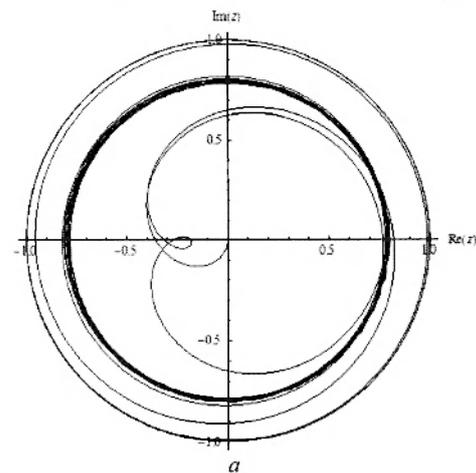


Рис. 2. Динамика SU(1,1) КС, числа фотонов и параметра сжатия для  $k = 1/4$ : траектория КС (а); временная зависимость среднего числа фотонов в сигнальной моде (б); временная зависимость параметра сжатия (в). Параметры моды:  $\omega_0 = 1, \Lambda = 0.5, \omega = 1.1, A = \pi, \beta = \pi/8, \Omega = \pi/14, t_0 = 2$

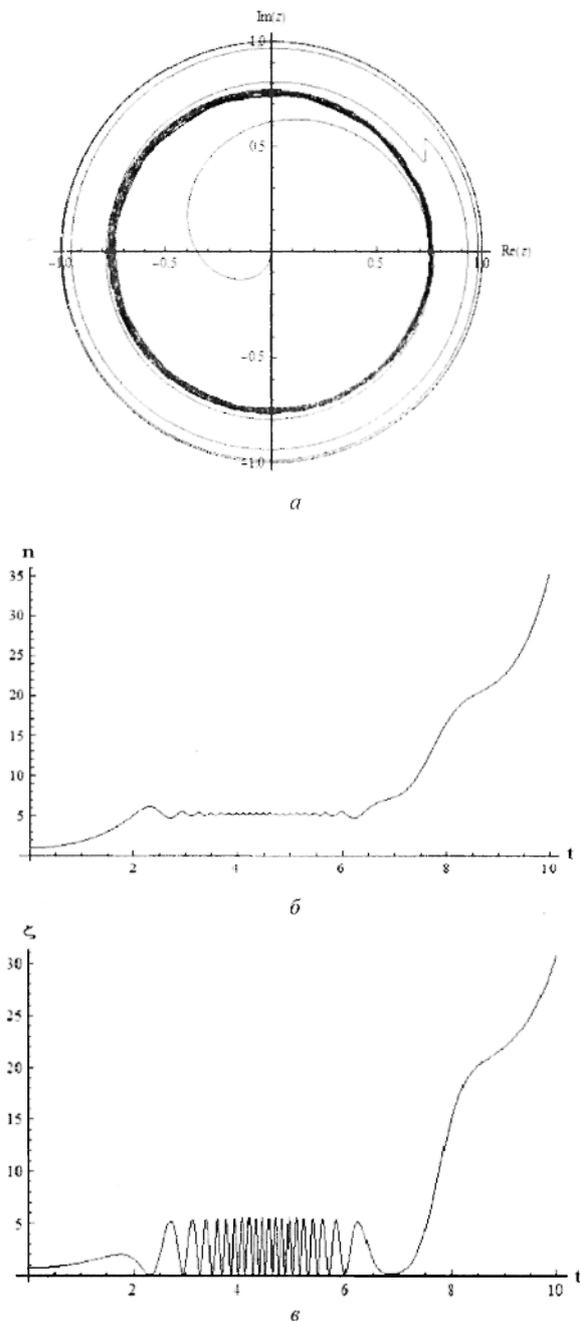


Рис. 3. Динамика  $SU(1,1)$  КС, числа фотонов и параметра сжатия для  $k = 3/4$ . Параметры см. на рис. 2

### Заключение

В работе показано, что описание динамики в представлении  $SU(1,1)$  КС адекватна задаче, поскольку позволяет описать сжатие

моды. Теоретически рассчитана временная эволюция среднего числа фотонов, которая при малом времени существования керровской нелинейности экспоненциально зависит от времени. В области сильной керровской нелинейности среднее число фотонов с удвоенной собственной частотой флуктуирует около достигнутого к моменту включения значения, и параметрическая генерация подавлена. Динамика квадратурного параметра сжатия  $\zeta$  является достаточно сложной, однако можно выделить моменты времени, когда результат расчета позволяет говорить о сжатии фотонной моды.

Расчеты были проведены в приближении классичности моды накачки и неизменности ее интенсивности. Кроме того, не учитывалось разбегание сигнального и холостого пучков, которое неизбежно есть в реальном эксперименте. В дальнейшем полученные результаты интересно обобщить на случай многомодовых полей с учетом квантованности поля накачки и учесть пространственные эффекты. Можно показать, что в общем случае с использованием КС группы  $SU(1,1)$  динамика уже не может быть описана и необходимо использовать группу  $WSp(6, R) = W_3^{Sp}(6, R)$  – динамическую группу симметрии трехмодового квантового осциллятора.

### Список литературы

1. Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003.
2. Шлях В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: Физматлит, 2005.
3. Шен Н.Р. Принципы нелинейной оптики. М.: Мир, 1989.
4. Мандель Л., Вольф А. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000.
5. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1977.
6. Горохов А.В. Когерентные состояния, динамический хаос и когерентная релаксация в моделях квантовой оптики и лазерной физики: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2005. 321 с.