УДК 539.12.01

СУПЕРРАСШИРЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЛАНДАУ

Е.А. Иванов

Объединенный институт ядерных исследований,
лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Дубна
E-mail: eivanov@theor.jinr.ru

Дан обзор недавних работ по суперрасширениям нерелятивистской квантовой заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле на плоскости R^2 (модель Ландау), и частицы на сфере $S^2 : SU(2)/U(1)$ в поле монополя Дирака (модель Хэлдейна). Рассматриваются модели на суперсфере $SU(2|1)/U(1|1)$, суперфлаге $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$ и их планарные пределы, исходя из геометрической интерпретации этих моделей и их бозонных прообразов как $d=1$ аналогов нелинейных сигма моделей типа Весса–Зумино–Новикова–Виттена. При квантовании суперсимметричных моделей возникают состояния с отрицательной нормой, и для преодоления этой трудности необходимо вводить нетривиальную метрику на пространстве квантовых состояний. Характерной чертой планарных моделей является наличие у них скрытой динамической $N=2$ суперсимметрии мировой линии.

Ключевые слова: суперсимметрия, нелинейная сигма модель, монополь Дирака.

Superextensions of Landau Models

E.A. Ivanov

The paper is a review of recent works on superextensions of the model of non-relativistic quantum charged particle moving in a homogeneous magnetic field on the plane R^2 (Landau model), and a model of the particle in the field of Dirac monopole on the sphere $S^2 : SU(2)/U(1)$ (Haldane model). We consider the models on the supersphere $SU(2|1)/U(1|1)$, superflag $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$ and their planar limits, based upon a geometric interpretation of these models and their bosonic proptotypes as $d=1$ analogs of nonlinear sigma models of the Wess–Zumino–Novikov–Witten type. While quantizing supersymmetric models, there arise states with the negative norms and, in order to overcome this difficulty, it proves necessary to introduce a non-trivial metrics on the Hilbert space of quantum states. A characteristic feature of the planar models is the presence of hidden dynamical $N=2$ worldline supersymmetry.

Key words: supersymmetry, nonlinear sigma model, Dirac monopole.

Введение

Модель Ландау [1] описывает заряженную частицу, движущуюся на плоскости под воздействием однородного магнитного поля, ортогонального к этой плоскости. Сферический вариант модели Ландау (модель Хэлдейна [2]) описывает заряженную частицу на сфере $S^2{:}SU(2)/U(1)$ в поле монополя Дирака, помещённого в центр. Эти модели и их обобщения имеют много приложений. В частности, они составляют теоретическую основу квантового эффекта Холла [3].

Существует несколько подходов к построению суперсимметричных расширений моделей Ландау (см., например, [4]). В данном обзоре будут рассматриваться модели нерелятивистских частиц, движущихся на супермногообразиях, которые представляют собой расширение плоскости или двумерной сферы антикоммутирующими фермионными координатами. Одна из причин интереса к модели Ландау и её суперрасширениям состоит в том, что эти системы тесно связаны с некоммутативной (супер)геометрией: после квантования в них возникает взаимно-однозначное соответствие между низшими уровнями Ландау (НУЛ) и не(анти)коммутативными («fuzzy») (супер)многообразиями. Кроме того, модель Ландау и её суперрасширения можно интерпретировать как $d=1$ аналоги двумерных сигма моделей Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ). Модели ВЗНВ имеют многочисленные приложения, в том числе и в теории струн.

Задачи Ландау на суперсфере $SU(2|1)/U(1|1)$ размерности (2|2) и суперфлаге $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$ размерности (2|4), т.е. минимальные суперрасширения модели Хэлдейна на S^2, были рассмотрены в работах [5–7] (см. также [7]). Также оказалось полезным изучить планарные пределы этих суперобобщений. Планарные модели могут быть получены из своих криволинейных аналогов устремлением к бесконечности радиуса сферы S^2 (т.е. переходом к пределу контракции). Такие модели были построены и исследованы в [8, 9], а также в [10]. Согласно терминологии работ [8, 9], модель, возникающая как предел $SU(2|1)/U(1|1)$-модели, именуется моделью Ландау на суперплоскости, а модель, получаемая контракцией из $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$-модели, носит название модели Ландау на планарном суперфлаге.

Данная работа представляет собой обзор моделей Ландау с суперсимметрией в пространстве отображения [4–9] как простейших обобщений исходной модели Ландау. При обсуждении планарных моделей значительное внимание уделено присутствию в них скрытой $N = 2$ суперсимметрии мировой линии, что, по-видимому, является их общим свойством [9, 10]. Также обсуждается проблема состояний с отрицательной нормой [8] в квантовых суперсимметричных моделях Ландау; показано, что во всех случаях нормы можно сделать неотрицательными [9] за счёт введения нетривиальной метрики на пространстве состояний [11–14].

1. Модели Ландау: бозонный случай

Стандартная планарная модель Ландау описывается следующим лагранжианом:

$$L_b = |\dot z|^2 - i\kappa\left(\dot z\bar z - \dot{\bar z} z\right) = |\dot z|^2 + \left(A_z \dot z + A_{\bar z}\dot{\bar z}\right). \quad (1.1)$$

Здесь $z(t), \bar z(t)$ – комплексные координаты 2-мерной эвклидовой плоскости, 2κ – напряжённость внешнего однородного магнитного поля,

$$A_z = -i\kappa\bar z,\ A_{\bar z} = i\kappa z, \qquad \partial_{\bar z}A_z - \partial_z A_{\bar z} = -2i\kappa. \quad (1.2)$$

Второе слагаемое в (1.1) – простейший $d = 1$ член Весса–Зумино (ВЗ).

Соответствующий канонический гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a + aa^\dagger\right) = a^\dagger a + \kappa, \quad (1.3)$$

где

$$a = i(\partial_{\bar z} + \kappa z),\quad a^\dagger = i(\partial_z - \kappa\bar z),\quad [a, a^\dagger] = 2\kappa. \quad (1.4)$$

Он коммутирует со следующими операторами:

$$P_z = -i(\partial_z + \kappa\bar z),\ P_{\bar z} = -i(\partial_{\bar z} - \kappa z),\quad [P_z, P_{\bar z}] = 2\kappa,\ F_b = z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z},\quad [H, P_z] = [H, P_{\bar z}] = [H, F_b] = 0. \quad (1.5)$$

Таким образом, эти операторы определяют инвариантности данной теории [15]: $P_z, P_{\bar z}$ и F_b генерируют соответственно «магнитные трансляции» и вращения в $2D$-мерном «пространстве отображения». Эти генераторы – квантовые аналоги нётеровских зарядов, связанных с инвариантностью относительно трансляций, $z' = z + a$, $\bar z' = \bar z + \bar a$, и $U(1)$ вращений, $z' = e^{i\alpha}z$, $\bar z' = e^{-i\alpha}\bar z$.

Волновая функция, соответствующая низшему уровню Ландау (НУЛ), $H\Psi_{(0)} = \kappa\Psi_{(0)}$, определяется следующим уравнением:

$$a\Psi_{(0)}(z,\bar z) = 0 \ \Leftrightarrow\ (\partial_{\bar z} + \kappa z)\Psi_{(0)} = 0 \ \to\ \to\ \Psi_{(0)} = e^{-\kappa|z|^2}\psi_{(0)}(z), \quad (1.6)$$

т.е. она сводится к голоморфной функции.

Волновая функция, отвечающая ℓ-му УЛ ($\ell = 1,2,\ldots$), строится следующим образом:

$$\Psi_{(\ell)}(z,\bar z) = [i(\partial_z - \kappa\bar z)]^\ell e^{-\kappa|z|^2}\psi_{(\ell)}(z),\quad H\Psi_{(\ell)} = \kappa(2\ell + 1)\Psi_{(n)}, \quad (1.7)$$

т.е. также сводится к голоморфной функции. Каждый УЛ имеет бесконечное вырождение из-за $(P_z, P_{\bar z})$ инвариантности. Соответствующие волновые функции образуют бесконечномерные представления этой группы с базисом $z^m, m > 0$ [14].

Инвариантная норма определяется как интеграл

$$\|\Psi_{(\ell)}\|^2 = \int dz d\bar z\,\overline{\Psi}_{(\ell)}(z,\bar z)\Psi_{(\ell)}(z,\bar z) : \ : \int dz d\bar z\, e^{-2\kappa|z|^2}\overline{\psi}_{(\ell)}(\bar z)\psi_{(\ell)}(z) < \infty. \quad (1.8)$$

Он сходится для любого монома $\psi_{(\ell)}(z) \sim z^m$.

Покажем теперь, что модель Ландау можно интерпретировать как $d = 1$ аналог модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена. Будем считать 2κ в $[P_z, P_{\bar z}] = 2\kappa$ независимым генератором («центральным зарядом») и построим нелинейную реализацию этой неабелевой группы магнитных трансляций в фактор-пространстве по одномерной подгруппе, порождаемой 2κ. Выбирая экспоненциальную параметризацию для соответствующих элементов фактор-пространства, получаем:

$$g(z,\bar z) = e^{i(zP_z + \bar z P_{\bar z})},\quad g^{-1}dg = i\omega_z P_z + i\omega_{\bar z}P_{\bar z} + i\omega_\kappa 2\kappa,\quad \omega_z = dz,\ \omega_{\bar z} = d\bar z,\quad \omega_\kappa = \frac{1}{2i}\left(zd\bar z - \bar z dz\right). \quad (1.9)$$

Видно, что ВЗ член в L_b есть не что иное, как 1-форма Картана, связанная с генератором 2κ. Операторы рождения и уничтожения $a^{\dagger}$ и a приобретают геометрический смысл ковариантных производных

$$\nabla_z = \partial_z - \kappa \bar{z}, \quad \nabla_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} + \kappa z, \qquad (1.10)$$

в то время как волновая функция, отвечающая НУЛ, задаётся ковариантным условием Коши–Римана

$$\begin{gathered} \nabla_{\bar{z}} \Psi_{(0)} = 0, \\ \Psi_{(\ell)}'(z', \bar{z}') = e^{-\kappa(\bar{a}z - a\bar{z})} \Psi_{(\ell)}(z, \bar{z}), \\ z' = z + a, \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{a}. \end{gathered} \qquad (1.11)$$

Всё это допускает прямое обобщение на сферу S^2. Сферический аналог планарного лагранжиана Ландау L_b (т.е. лагранжиан модели Хэлдейна) записывается в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_b = & \frac{1}{(1 + r^2 |z|^2)^2} |\dot{z}|^2 - \\ & - is \frac{1}{1 + r^2 |z|^2} \left(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}} z\right). \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Первое слагаемое в (1.12) – d=1 проекция инвариантного интервала на S^2, второе слагаемое – d=1 ВЗ член на фактор-пространстве S^2:$SU(2)/U(1)$, r – «обратный» радиус S^2. Для простоты мы положим в дальнейшем $r = 1$.

Квантовый гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}(1 + |z|^2)\{\nabla_z, \nabla_{\bar{z}}\}, \qquad (1.13)$$

где

$$\nabla_z = \partial_z - s\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad \nabla_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} + s\frac{z}{1 + z\bar{z}}. \qquad (1.14)$$

После квантования унитарные волновые функции на каждом УЛ ($\ell = 0,1,2,\ldots$) образуют конечномерные неприводимые представления группы $SU(2)$ со «спинами» s, $s + 1/2$, $s+1,\ldots$ Таким образом, каждый ℓ-й УЛ имеет конечное вырождение $(2s + 1 + \ell)$ (в этом состоит важное отличие от планарного случая и связано оно с тем фактом, что $SU(2)$ является компактной группой, в то время как её контракция, группа магнитных трансляций, некомпактна). Волновая функция НУЛ определяется ковариантным условием аналитичности на S^2

$$\nabla_{\bar{z}} \Psi_{(0)} = 0. \qquad (1.15)$$

Можно показать, что эта волновая функция сводится к голоморфной функции от z, компоненты которой образуют неприводимый $SU(2)$ мультиплет со спином s. Волновые функции, отвечающие высшим УЛ, строятся подобно планарному случаю и выражаются через голоморфные функции, описывающие неприводимые $SU(2)$ мультиплеты со спинами $s + 1/2$, $s+1$, …

Как в планарном, так и в S^2 случаях, разность энергий НУЛ и первого УЛ стремится к бесконечности с ростом параметров κ или s. В этом пределе выживает только НУЛ, который описывается ВЗ членом. Из-за того что ВЗ член имеет первый порядок по производной по времени, в теории с лагранжианом, в котором есть только ВЗ член, канонический гамильтониан равен нулю, и возникают связи второго рода. Соответствующие операторы координат, коммутирующие с гамильтоновыми связями, параметризуют некоммутативные многообразия. В S^2 случае возникает некоммутативная («fuzzy») версия 2-сферы [16].

Чтобы это показать, рассмотрим только ВЗ член в (1.12) (с r=1). Гамильтоновы связи имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= p + is\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \approx 0, \\ \bar{\varphi} &= \bar{p} - is\frac{z}{1 + z\bar{z}} \approx 0. \end{aligned} \qquad (1.16)$$

При квантовании по Гупта–Блейлеру (равным образом можно было бы использовать и квантование по Дираку) связи $\bar{\varphi} \approx 0$ интерпретируются как связи первого рода и накладываются на комплексные вектора состояния

$$\hat{\bar{\varphi}} | \Psi >_{phys} = 0, \qquad (1.17)$$

где после квантования ($p \to -i\partial/\partial z$, $\bar{p} \to$ $\to -i\partial/\partial\bar{z}$)

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= -i\left(\frac{\partial}{\partial z} - s\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}}\right), \\ \hat{\bar{\varphi}} &= -i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + s\frac{z}{1 + z\bar{z}}\right). \end{aligned} \qquad (1.18)$$

Условие (1.17) есть определение подпространства физических состояний. Решением (1.17) с учётом (1.18) является представление

$$\Psi_s(z, \bar{z}) = (1 + z\bar{z})^{-s} \Phi_s(z). \qquad (1.19)$$

Голоморфная волновая функция $\Phi_s(z)$ не произвольна. Стандартное требование, что физические состояния нормализуемы, означает, что $SU(2)$-инвариантная норма полной волновой функции $\Psi_s(z,\bar{z})$ должна быть конечной

$$\| \Psi_s \|^2 = \int d\mu \, | \Psi_s |^2 =$$
$$= \int dz d\bar{z} \frac{| \Phi_s(z) |^2}{(1 + z\bar{z})^{2(1+s)}} < \infty . \quad (1.20)$$

Здесь

$$d\mu = \frac{dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}$$

– стандартная мера интегрирования на 2-сфере S^2:$SU(2)/U(1)$ в параметризации стереографической проекции. Тогда условие (1.20) требует, чтобы функция $\Phi_s(z)$ была полиномом степени не выше $2s$. Коэффициенты такого полинома для любого фиксированного s (число этих коэффициентов равно, очевидно, $2s+1$) образуют неприводимый $SU(2)$ мультиплет со спином s.

Обычные координаты на сфере, т.е. $z, \bar{z}$, не коммутируют с оператором $\hat{\varphi}$, определённым в (1.18) и выделяющим физическое подпространство в полном гильбертовом пространстве в соответствии с условием (1.17). Модифицированные операторы положения $Z, \bar{Z}$, сохраняющие условие (1.17) при действии на физические вектора состояния, однозначно определяются из требования коммутируемости с $\hat{\varphi}$:

$$Z = z - \frac{1}{s}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} \right),$$
$$\bar{Z} = \bar{z} + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (1.21)$$

На аналитических функциях $\Phi_s(z)$ эти операторы принимают вид

$$Z \Rightarrow u = \frac{1}{s} z\left(2s - z\frac{\partial}{\partial z} \right),$$
$$\bar{Z} \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.22)$$

из которого следует, что они переводят полиномы степени $2s$ по z в полиномы той же степени, т.е. сохраняют подпространство физических состояний. Коммутатор модифицированных координатных операторов равен

$$[Z, \bar{Z}] = \frac{2}{s^2}\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2s \right),$$
$$[u, \bar{u}] = \frac{2}{s^2}\left(z\frac{\partial}{\partial z} - 2s \right), \quad (1.23)$$

где в правых частях стоят две эквивалентные формы генератора $U(1)$ преобразований. Таким образом, вместе с $U(1)$ генератором координатные операторы $Z, \bar{Z}$ или $u, \bar{u}$ образуют алгебру группы $SU(2)$, т.е. они параметризуют некоммутативное многообразие. Это многообразие есть не что иное, как «размытая» («fuzzy») сфера. На пространстве компонент волновой функции $\Phi_s(z)$ эти координаты представляются $(2s+1)/(2s+1)$ матрицами, пропорциональными понижающему и повышающему генераторам группы $SU(2)$ с коэффициентом пропорциональности $1/s$ (параметр $2s$ называется «уровнем размытости»). После перенормировки $(Z, \bar{Z}) \to \sqrt{\frac{\kappa}{s}}(Z, \bar{Z})$ и перехода к «квазиклассическому» пределу $s \to \infty$ (пределу контракции) «размытая» сфера превращается в некоммутативную плоскость.

2. Пример: фермионный аналог модели Ландау

Под суперсимметричными моделями Ландау понимаются квантово-механические модели заряженной частицы на однородном суперпространстве с добавленными ферми-полями, такие, что в бозонном пределе они сводятся либо к исходной модели Ландау для заряженной частицы, движущейся на плоскости в однородном магнитном поле, либо к её сферической версии. Есть две возможности суперсимметризации: (i) добавлением к бозонным координатам их нечётных партнёров по суперсимметрии на мировой линии, т.е. переходом к $d=1$ супермультиплетам; (ii) введением суперсимметрии в пространстве отображения и трактовкой дополнительных фермионных полей как грассмановых координат, расширяющих исходное бозонное многообразие до некоторого суперпространства. Модели первого типа отвечают той или иной версии суперсимметричной квантовой механики [17] (см., например, [18]). Мы будем рассматривать модели второго типа. В этом случае фермионные поля имеют ясный геометрический смысл: в планарных моделях это нечётные координаты, расширяющие 2-мерную плоскость до (2|2) или (2|4)-мерных суперплоскостей, а в моделях, связанных с супергруппой $SU(2|1)$, это координаты, дополняющие сферу S^2: $SU(2)/U(1)$ до некоторых однородных супермногообразий полной супергруппы.

Примечательно, что две планарные суперсимметричные модели Ландау, построенные с привлечением второго подхода (см. разделы 3 и 6), вдобавок обладают ещё и скрытой $N = 2$ суперсимметрией на мировой линии.

Мы начнём с простейшего примера «фермионной модели Ландау», в которой бозонные $2D$ координаты $z, \bar{z}$ исходной модели Ландау заменены фермионными координатами $\zeta, \bar{\zeta}$.

Соответствующие лагранжиан и гамильтониан записываются в виде

$$L_f = \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}} - i\kappa\left(\dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta\right),$$
$$H_f = \frac{1}{2}\left[\alpha, \alpha^{\dagger}\right] = -\alpha^{\dagger}\alpha - \kappa, \tag{2.1}$$

$$\alpha = \partial_{\zeta} - \kappa\zeta,$$
$$\alpha^{\dagger} = \partial_{\zeta} - \kappa\bar{\zeta}, \tag{2.2}$$
$$\{\alpha, \alpha^{\dagger}\} = -2\kappa.$$

Инвариантностям отвечают генераторы «магнитных супертрансляций» $\Pi_{\zeta}, \Pi_{\bar{\zeta}}$ и $U(1)$ поворотов F_f, где

$$\Pi_{\zeta} = \partial_{\zeta} + \kappa\bar{\zeta}, \quad \Pi_{\bar{\zeta}} = \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa\zeta,$$
$$F_f = \zeta\partial_{\zeta} - \bar{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}}, \quad \{\Pi_{\zeta}, \Pi_{\bar{\zeta}}\} = 2\kappa. \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что действительно

$$[H_f, \Pi_{\zeta}] = [H_f, \Pi_{\bar{\zeta}}] = [H_f, F_f] = 0. \tag{2.4}$$

Супералгебра (2.3) есть простейший пример суперрасширения абелевой алгебры $u(1)$, супералгебра $u(1|1)$. Рассматривая 2κ как независимый $u(1)$ генератор, лагранжиан (2.1) можно интерпретировать как лагранжиан $d = 1$ сигма модели на однородном пространстве $U(1/1)/[U(1)\times U(1)]$, в котором $\zeta, \bar{\zeta}$ играют роль косетных координат, связанных с фермионными генераторами Π_{ζ} и $\Pi_{\bar{\zeta}}$, а ВЗ-член – пулбэк 1-формы Картана при $U(1)$ генераторе 2κ.

Квантовое «гильбертово пространство» модели включает основное состояние и единственное возбуждённое состояние:

$$\psi^{(0)} = e^{-\kappa\zeta\bar{\zeta}}\psi_0(\zeta), \quad \psi^{(1)} = e^{\kappa\zeta\bar{\zeta}}\psi_1(\bar{\zeta}),$$
$$\alpha\psi^{(0)} = \alpha^{\dagger}\psi^{(1)} = 0, \tag{2.5}$$
$$\psi_0 = A_0 + \zeta B_0, \qquad \psi_1 = A_1 + \bar{\zeta} B_1.$$

Пары (A_0, B_0), (A_1, B_1) образуют неприводимые мультиплеты группы магнитных супертрансляций, с энергиями $-\kappa$ и κ.

Уже на этом примере обнаруживается проблема, характерная для рассматриваемого типа суперрасширений модели Ландау. Это появление «духов», т.е. состояний с отрицательной нормой.

При естественном определении внутреннего произведения,

$$<\phi \,|\, \psi> = \int d\zeta d\bar{\zeta}\; \overline{\phi(\zeta, \bar{\zeta})}\, \psi(\zeta, \bar{\zeta}), \tag{2.6}$$

находим:

$$<\psi^{(0)} \,|\, \psi^{(1)}> = 0,$$
$$<\psi^{(0)} \,|\, \psi^{(0)}> = 2\kappa\bar{A}_0 A_0 + \bar{B}_0 B_0, \tag{2.7}$$
$$<\psi^{(1)} \,|\, \psi^{(1)}> = -2\kappa\bar{A}_1 A_1 - \bar{B}_1 B_1.$$

Состояния A_1, B_1 обладают отрицательной нормой, т.е. они – духи. Их присутствие может приводить к нарушению унитарности[1].

В данном случае эта трудность преодолевается за счёт введения нетривиальной метрики на «гильбертовом пространстве»:

$$<<\phi \,|\, \psi>> := <G\phi \,|\, \psi>,$$
$$G\left(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}\right) = \psi^{(0)} - \psi^{(1)}, \tag{2.8}$$
$$G = -\kappa^{-1} H_f.$$

При этом генераторы симметрий $\Pi_{\zeta}, \Pi_{\bar{\zeta}}$ и F_f коммутируют с метрикой G, так что новое внутреннее произведение остаётся инвариантным. Однако свойства эрмитова сопряжения операторов, которые не коммутируют с G, изменяются, например:

[1] Появление духов в $d = 1$ суперсимметричных моделях с кинетическими членами второго порядка для фермионов было отмечено в [18]. Обсуждение проблемы духов в суперсимметричной квантовой механике с высшими производными содержится в работах [19, 20].

$$\alpha^{\ddagger} = -\alpha^{\dagger} \Rightarrow H_f = \alpha^{\ddagger}\alpha - \kappa,$$
$$\{\alpha, \alpha^{\ddagger}\} = 2\kappa.$$

Пусть в общем случае O – оператор, такой, что $[H, O] = 0$. Тогда $O^{\ddagger} = GO^{\dagger}G = O^{\dagger} + GO_G^{\dagger}$, $O_G = [G, O]$, и $[H, O_G] = 0$. Таким образом, по генераторам, коммутирующим с гамильтонианом, но не коммутирующим с G, можно восстанавливать «скрытые» симметрии.

На этом мы закончим обсуждение упрощённой модели и перейдём к более содержательным примерам.

3. Модель Ландау на суперплоскости

Модель Ландау на суперплоскости описывается следующим лагранжианом:

$$L = L_f + L_b = \\ =|\dot{z}|^2 + \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}} - i\kappa\left(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z + \dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta\right). \quad (3.1)$$

Соответствующий квантовый гамильтониан даётся выражением

$$H = a^{\dagger}a - \alpha^{\dagger}\alpha = \partial_{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}} - \partial_z\partial_{\bar{z}} + \\ + \kappa\left(\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \bar{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}} - z\partial_z - \zeta\partial_{\zeta}\right) + \\ + \kappa^2\left(z\bar{z} + \zeta\bar{\zeta}\right). \quad (3.2)$$

Полный набор симметрий, помимо тех, которые порождаются генераторами $P_z, P_{\bar{z}}$ и $\Pi_{\zeta}, \Pi_{\bar{\zeta}}$, включает также новые симметрии с генераторами

$$Q = z\partial_{\zeta} - \bar{\zeta}\partial_{\bar{z}},\ Q^{\dagger} = \bar{z}\partial_{\bar{\zeta}} + \zeta\partial_z, \\ C = F_b + F_f = z\partial_z + \zeta\partial_{\zeta} - \bar{z}\partial_{\bar{z}} - \bar{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}}, \quad (3.3)$$

$$[H, Q] = [H, Q^{\dagger}] = [H, C] = 0. \quad (3.4)$$

Эти генераторы образуют супералгебру $ISU(1|1)$, которая представляет собой контракцию полупростой супералгебры $SU(2|1)$,

$$\{Q, Q^{\dagger}\} = C, [C, Q] = [C, Q^{\dagger}] = 0, \\ [Q, P_z] = i\Pi_{\zeta}, \{Q^{\dagger}, \Pi_{\zeta}\} = iP_z. \quad (3.5)$$

Как обычно, предполагается, что волновая функция НУЛ $\psi^{(0)}$ исчезает под действием операторов уничтожения a и α:

$$\left(\partial_{\bar{z}} + \kappa z\right)\psi^{(0)} = \left(\partial_{\bar{\zeta}} - \kappa\zeta\right)\psi^{(0)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi^{(0)} = e^{-\kappa K_2}\psi^{(0)}_{an}(z, \zeta), \quad (3.6) \\ K_2 = |z|^2 + \zeta\bar{\zeta}, \quad H\psi^{(0)} = 0.$$

Таким образом, эта волновая функция обладает дополнительным двукратным вырождением, $\psi^{(0)}_{an}(z, \zeta) = A^{(0)}(z) + \zeta B^{(0)}(z)$.

Гильбертово пространство для ℓ-го УЛ представляется волновой функцией

$$\psi^{(\ell)} : \left(a^{\dagger}\right)^{\ell} e^{-\kappa K_2}\psi^{(\ell)}_{+}(z, \zeta) + \\ + \left(a^{\dagger}\right)^{\ell-1}\alpha^{\dagger}e^{-\kappa K_2}\psi^{(\ell)}_{-}(z, \zeta), \quad (3.7) \\ H\psi^{(\ell)} = 2\kappa\ell\psi^{(\ell)},$$

где $\psi^{(\ell)}_{\pm}(z, \zeta) = A^{(\ell)}_{\pm}(z) + \zeta B^{(\ell)}_{\pm}(z)$. Каждый УЛ с $\ell > 0$ четырёхкратно вырожден.

Естественное $ISU(1|1)$-инвариантное внутреннее произведение,

$$<\phi|\psi> = \int d\mu\overline{\phi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})}\psi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}), \\ d\mu = dzd\bar{z}d\zeta d\bar{\zeta}, \quad (3.8)$$

приводит к отрицательным нормам для некоторых состояний, как и в фермионной модели. Однако все нормы можно сделать неотрицательными путём введения той же самой операторной метрики на гильбертовом пространстве

$$G = -\kappa^{-1}H_f = \\ = \frac{1}{\kappa}\left[\partial_{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}} + \kappa^2\bar{\zeta}\zeta + \kappa\left(\zeta\partial_{\zeta} - \bar{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}}\right)\right]. \quad (3.9)$$

Метрика G коммутирует с генераторами всех симметрий, за исключением Q и $Q^{\dagger}$. Следовательно, по отношению к новому произведению $<G\phi|\psi>$ оператор, сопряжённый к Q, не совпадает с $Q^{\dagger}$. Новый сопряжённый оператор $Q^{\ddagger}$ легко вычисляется:

$$Q^{\ddagger} = Q^{\dagger} - \frac{i}{\kappa}S, \\ S = i\left(\partial_z\partial_{\bar{\zeta}} + \kappa^2\bar{z}\zeta - \kappa\bar{z}\partial_{\zeta} - \kappa\zeta\partial_z\right). \quad (3.10)$$

Поскольку $Q^{\dagger}$ и $Q^{\ddagger}$ коммутируют с полным гамильтонианом H (так как $[H, G] = 0$), их разница S также коммутирует, $[H, S] = [H, S^{\ddagger}] = 0$. Таким образом, операторы S и

$S^{\ddagger}$ генерируют новую (скрытую) симметрию модели.

Эти операторы можно записать в виде

$$S = a^{\dagger}\alpha, \quad S^{\ddagger} = a\alpha^{\dagger}. \qquad (3.11)$$

Теперь легко проверить, что они удовлетворяют (анти)коммутационным соотношениям:

$$[H,S] = [H,S^{\ddagger}] = 0, \quad \{S,S^{\ddagger}\} = 2\kappa H, \quad \{S,S\} = 0 = \{S^{\ddagger},S^{\ddagger}\}. \qquad (3.12)$$

Иными словами, $(2\kappa)^{-1/2} S$, $(2\kappa)^{-1/2} S^{\ddagger}$ и H образуют $N=2$, $d=1$ супералгебру Пуанкаре.

Генераторы S, $S^{\ddagger}$ аннигилируют основное состояние, соответствующее НУЛ,

$$S\psi^{(0)} = S^{\ddagger}\psi^{(0)} = 0, \qquad (3.13)$$

поэтому это состояние есть синглет $N = 2$ суперсимметрии. Следовательно, $N=2$ суперсимметрия не нарушена, и волновые функции, отвечающие высшим УЛ, образуют её неприводимые мультиплеты. Каждое такое состояние состоит из двух неприводимых мультиплетов супергруппы $ISU(1|1)$, чем объясняется четырёхкратное вырождение УЛ с $\ell > 0$.

На классическом уровне скрытая суперсимметрия мировой линии реализуется следующими преобразованиями полей z, ζ и сопряжённых к ним

$$\delta z = \varepsilon\zeta, \qquad \delta\zeta = -\dot{z}\bar{\varepsilon}. \qquad (3.14)$$

На массовой поверхности они замыкаются на производную полей по времени с учётом уравнений движения $\ddot{z} = 2i\kappa\dot{z}$, $\dot{\zeta} = 2i\kappa\zeta$. Рассматриваемая $N = 2$ суперсимметрия необычна тем, что она существует только при $\kappa \neq 0$, т.е. представляет собой род динамической суперсимметрии.

Как показано в [4], эту реализацию можно воспроизвести в рамках явно $N=2$ суперсимметричного суперполевого подхода вне массовой оболочки.

4. Модель Ландау на суперфлаге

Модель Ландау на суперфлаге [6] описывает движение заряженной нерелятивистской частицы на супермногообразии $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$ («суперфлаге»). Комплексные координаты на этом многообразии можно выбрать следующим образом:

$$Z^M = z,\xi^i, \quad Z_M = \bar{z},\bar{\xi}_i, \quad i = 1,2. \qquad (4.1)$$

Здесь $z,\bar{z}$ – координаты сферы S^2:$SU(2)/U(1)$ в параметризации стереографической проекции, т.е. z параметризуют комплексное проективное пространство $CP^{(1)}$:$\{z\}$. Спинорные координаты ξ^i достраивают это бозонное многообразие до супермногообразия $CP^{(1|2)}$:$\{Z_M\}$. Соответственно супергруппа $SU(2)$ реализуется на таких координатах голоморфными преобразованиями

$$\begin{aligned} \delta z &= a + \bar{a}z^2 - (\bar{\varepsilon}_2 + z\bar{\varepsilon}_1)(\xi^1 - z\xi^2), \\ \delta\xi^1 &= a\xi^2 + \varepsilon^1 + (\bar{\varepsilon}\cdot\xi)\xi^1, \\ \delta\xi^2 &= -\bar{a}\xi^1 + \varepsilon^2 + (\bar{\varepsilon}\cdot\xi)\xi^2. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Суперлгебра $su(2|1)$ содержит 4 бозонных генератора $J_{(ik)}, F$ $(i,k = 1,2)$, образующих подалгебру $su(2)\oplus u(1)$ и $SU(2)$ – дублет фермионных генераторов Q_i, $\bar{Q}^i$. Генераторы подчиняются следующим (анти)коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &\{Q_i,\bar{Q}_k\} = \varepsilon_{ik}F + J_{(ik)}, \\ &\{Q_i,Q_k\} = \{\bar{Q}_i,\bar{Q}_k\} = 0, \\ &[J_{(ik)},Q_l] = \frac{1}{2}(\varepsilon_{il}Q_k + \varepsilon_{kl}Q_i), \\ &[J_{(ik)},\bar{Q}_l] = \frac{1}{2}(\varepsilon_{il}\bar{Q}_k + \varepsilon_{kl}\bar{Q}_i), \\ &[F,Q_l] = \frac{1}{2}Q_l, \quad [F,\bar{Q}_l] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_l, \\ &[J_{(ik)},J_{(lj)}] = \varepsilon_{ij}J_{(kl)} + \varepsilon_{kl}J_{(ij)}, \\ &\bar{Q}^i = (Q_i)^{\dagger}. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Бозонные параметры $a,\bar{a}$ в преобразованиях (4.2) связаны со взаимно-сопряжёнными генераторами J_{11}, J_{22}, принадлежащими фактор-пространству $SU(2)/U(1)$, а грассмановы параметры $\varepsilon^i,\bar{\varepsilon}_k$ – с фермионными генераторами $Q_i,\bar{Q}^k$. Преобразования, соответствующие двум $U(1)$ генераторам J_3 : $J_{(12)}$ и F, получаются взаимным коммутированием преобразований (4.2). В дальнейшем вместо генератора F, коммутирующего с $J_{(ik)}$, часто будет использоваться специальная комбинация $U(1)$ генераторов:

$$B = F - \frac{1}{2}J_3. \qquad (4.4)$$

Динамика частицы, движущейся на супермногообразии $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$, с каноническими свободными членами у бозонов и фермионов (соответственно второго и первого порядков по производной по времени) описывается следующим лагранжианом:

$$L = \omega^{+}\omega^{-} + NA + MB. \qquad (4.5)$$

Здесь ω^{+} и $\omega^{-} = (\omega^{+})^{\dagger}$ – d=1-проекции взаимосопряжённых бозонных 1-форм Картана на фактор-пространстве $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$, два независимых ВЗ члена A и B – аналогичные проекции 1-форм связности, ассоциированных с генераторами J_3, B. Константы N и M подобны параметру s в (1.12). В бозонном пределе, когда фермионные координаты полагаются равными нулю, лагранжиан (4.5) переходит в (1.12). Явное выражение для (4.5) можно получить с помощью формул

$$\begin{aligned} \omega^{+} &= \dot{z}\omega + \dot{\xi}^{i}\omega_{i}, \\ A &= \left[\dot{z}A_{z} + \dot{\xi}^{i}A_{i}\right] + c.c., \\ B &\equiv \dot{\xi}^{i}B_{i} + c.c., \end{aligned} \qquad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= K_1^{-12}K_2^{-1}, \\ \omega_1 &= -K_1^{-32}K_2^{-1}\left(\bar{\xi}_2 + z\bar{\xi}_1\right), \\ \omega_2 &= K_1^{-32}K_2^{-1}z\left(\bar{\xi}_2 + z\bar{\xi}_1\right), \\ A_z &= -iK_2^{-1}\left[\bar{z} - \xi^2\left(\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2\right)\right], \\ A_1 &= -iK_2^{-1}\left(\bar{\xi}_1 - \bar{z}\xi_2\right), \\ A_2 &= iK_2^{-1}z\left(\bar{\xi}_1 - \bar{z}\xi_2\right), \\ B_i &= -iK_1^{-1}\bar{\xi}_i \end{aligned} \qquad (4.7)$$

и

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 + \bar{\xi}_1\xi^1 + \bar{\xi}_2\xi^2, \\ K_2 &= 1 + \bar{z}z + \left(\xi^1 - z\xi^2\right)\left(\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2\right). \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Квантовый гамильтониан системы даётся выражением

$$\hat{H} = H_N = -K_2^2K_1\nabla_z^{(N)}\nabla_{\bar{z}}^{(N)} + N, \qquad (4.9)$$

где, как и в бозонной модели, $2N = 2s$ – целое положительное число и

$$\nabla_z^{(N)} = \partial_z - iNA_z, \quad \nabla_{\bar{z}}^{(N)} = \partial_{\bar{z}} - iNA_{\bar{z}}. \qquad (4.10)$$

Благодаря тому, что все фермионы обладают кинетическими членами первого порядка по производной по времени, в теории возникают связи второго рода. При квантовании по Гупта–Блейлеру антиголоморфную половину этих связей следует накладывать на вектора состояния, выделяя тем самым подпространство физических волновых функций (ср. (1.17)):

$$\hat{\bar{\varphi}}^{i}\,|\Psi\rangle = 0 \qquad (i = 1,2), \qquad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\varphi}}^{i} = {}& \partial\partial\bar{\xi}_i - \omega^{-1}\bar{\omega}^{i}\left[\partial\partial\bar{z} + N\partial\ln K_2\partial\bar{z}\right] + \\ & + N\partial\ln K_2\partial\bar{\xi}_i - M\partial\ln K_1\partial\bar{\xi}_i. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Физические волновые суперфункции, полученные как решение уравнений (4.11), имеют вид

$$\Psi = K_1^{M}K_2^{-N}\Phi\left(z, \bar{z}_{sh}, \xi^1, \xi^2\right), \qquad (4.13)$$

где $\bar{z}_{sh}$ – «сдвинутая» координата:

$$\bar{z}_{sh} = z - (\xi^2 + \bar{z}\xi^1)(\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2). \qquad (4.14)$$

Гамильтониан (4.9) диагонализуется на следующем наборе физических собственных функций:

$$\begin{aligned} \Psi_N^{(\ell)} = {}& K_2^{-N}K_1^{M}\nabla_z^{2(N+1)}\ldots\nabla_z^{2(N+\ell)}\times \\ & \times\Phi^{(N+\ell,M-\ell 2)}\left(z,\xi^i\right), \end{aligned} \qquad (4.15)$$

где

$$\nabla_z^{2(N)} = \partial_z - 2(N)\bar{z}_{sh}1 + z\bar{z}_{sh}. \qquad (4.16)$$

Используя явный вид гамильтониана (4.9) в координатном базисе $z, \bar{z}_{sh}$ и аналитичность редуцированной волновой функции $\Phi^{(N+\ell,M-\ell 2)}\left(z,\xi^i\right)$ в (4.15), можно непосредственно проверить, что

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi_N^{(\ell)} &= \left[(2\ell+1)N + \ell(\ell+1)\right]\Psi_N^{(\ell)}, \\ \ell &= 0,1,2,\ \ldots \end{aligned} \qquad (4.17)$$

Соответствующее $SU(2|1)$ инвариантное внутреннее произведение определяется как

$$\begin{aligned} & < \Psi_N'^{(\ell')}\,|\,\Psi_N^{(\ell)} >= \\ & = 2\delta_{\ell,\ell'}\,\ell!\frac{(2N+\ell+1)!}{(2N+1)!}\int dzd\bar{z}\left(1+z\bar{z}\right)^{2(N+\ell+1)}\times \\ & \times\{(M-\ell 2)(2M+2N+\ell+1)\bar{A}'A + \\ & + 12\,\bar{F}'F + (M-\ell 2)\left(\bar{\psi}'^{1}\psi_1 + \bar{\psi}'^{2}\psi_2\right) + \\ & + \frac{N+\ell+1}{1+z\bar{z}}\left(\bar{\psi}'^{2} + \bar{z}\bar{\psi}'^{1}\right)\left(\psi_2 + z\psi_1\right)\}. \end{aligned} \qquad (4.18)$$

Поля $A(z), F(z), \psi_i$ определяются ξ^i-разложением аналитического суперполя $\Phi^{(N+\ell,M-\ell 2)}\left(z,\xi^i\right)$:

$$\Phi^{(N+\ell,M-\ell 2)}\left(z,\xi^i\right)=A^{(N+\ell,M-\ell 2)}+ + \xi^i\psi_i^{(N+\ell,M-\ell 2)}+\xi^1\xi^2F^{(N+\ell,M-\ell 2)} \qquad (4.19)$$

(в (4.18) соответствующие индексы опущены).

Из этой формулы следует, что волновая функция, соответствующая ℓ-му УЛ , имеет положительную норму при условии, что

$$M\geq\frac{\ell}{2}. \qquad (4.20)$$

Поэтому при фиксированном M пространство физических состояний состоит из векторов, соответствующих

$$0\leq\ell\leq 2[M], \qquad (4.21)$$

где $[M]$ означает целую часть. Иными словами, число УЛ в модели $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$, в отличие от бозонной $SU(2)/U(1)$ модели, конечно при естественном определении внутреннего произведения. Тем не менее, оказывается, что, как и в предыдущих случаях, можно переопределить внутреннее произведение без нарушения $SU(2|1)$ инвариантности так, что при любом M норма волновой функции для любого УЛ будет положительной [13]. Доказательство этого утверждения является довольно сложным, поэтому приводить его здесь не будем. Продекларируем лишь результат.

Переопределим внутреннее произведение на суперфлаге следующим образом:

$$<<\Upsilon|\Psi>>=<\Upsilon|G\psi>\Rightarrow|||\Psi|||^2=\langle\Psi|G\Psi\rangle,$$

где для $-2N'-1<2M<0$

$$G_{an}=-1+2\xi\partial_\xi+\frac{2}{2N'+2\ell+1}\zeta\partial_\zeta\partial_\xi, \qquad (4.22)$$
$$[H_{N'},G_{an}]=0,\quad G_{an}^2=1,$$

и для $2M<-2N'-1$

$$\widetilde{G}_{an}=1-8(F-2M-N')+8(F-2M-N')^2.$$

Все состояния в этих интервалах обладают неотрицательной нормой по отношению к переопределённому внутреннему произведению[2]. Оператор G_{an} хорошо определён и при $M=0$. Специфичность этой точки в пространстве параметров модели состоит в том, что в этом случае присутствуют состояния с нулевой нормой, поэтому физическое гильбертово пространство следует определить как фактор по подпространству состояний с нулевыми нормами.

[2] То же можно показать для $M>0$.

5. Модель Ландау на суперсфере

Под суперсферой $CP^{(1|1)}\cong SU(2|1)/U(1)$ с $U(1|1):(J_3,F,Q_2,\bar{Q}^2)$ понимается комплексное супермногообразие

$$Z^A=\left(Z^0,Z^1\right)=(z,\zeta),$$
$$\bar{Z}^{\bar{B}}=\left(\bar{Z}^0,\bar{Z}^1\right)=(\bar{z},\bar{\zeta}),$$

где z – комплексная координата на $CP^1:SU(2)/$ $/U(1)$ и ζ – её грассманов партнёр. Супергруппа $SU(2|1)$ реализована на этих координатах аналитическими преобразованиями

$$\delta z=i\lambda z+\varepsilon+\bar{\varepsilon}z^2-\left(\bar{\varepsilon}_2+z\bar{\varepsilon}_1\right)\zeta,$$
$$\delta\zeta=\frac{i}{2}(\lambda+\mu)\zeta+\varepsilon^1-\varepsilon^2z+\bar{\varepsilon}z\zeta. \qquad (5.1)$$

Здесь $\lambda,\varepsilon,\bar{\varepsilon},\mu$ – параметры инфинитезимальных $U(2)$ преобразований и ε^i – грассмановы параметры преобразований с нечётными генераторами.

Суперсфера (СС) – естественное суперрасширение обычной 2-сферы $S^2:SU(2)/U(1)$. Это кэлерово супермногообразие, с кэлеровской 2-формой

$$F=2idZ^A\wedge d\bar{Z}^B\partial_{\bar{B}}\partial_AK=dA,$$

где $K=\log\left(1+z\bar{z}+\zeta\bar{\zeta}\right)$ – кэлеров суперпотенциал и $A=-i\left(dZ^A\partial_A-d\bar{Z}^{\bar{B}}\partial_{\bar{B}}\right)K\equiv dZ^AA_A+$ $+d\bar{Z}^{\bar{B}}A_{\bar{B}}$ – кэлерова связность.

Инвариантный лагранжиан модели Ландау на суперсфере $CP^{(1|1)}$ является естественным обобщением лагранжиана S^2 модели:

$$L=\dot{Z}^A\dot{\bar{Z}}^Bg_{BA}+N\left(\dot{Z}^AA_A+\dot{\bar{Z}}^BA_{\bar{B}}\right),$$
$$g_{\bar{z}z}=\frac{1+\zeta\bar{\zeta}}{\left(1+z\bar{z}+\zeta\bar{\zeta}\right)^2},\; g_{\bar{z}\zeta}=-\frac{z\bar{\zeta}}{\left(1+z\bar{z}\right)^2}, \qquad (5.2)$$
$$g_{\bar{\zeta}z}=\frac{\bar{z}\zeta}{\left(1+z\bar{z}\right)^2},\; g_{\bar{\zeta}\zeta}=\frac{1}{1+z\bar{z}}.$$

Квантовый гамильтониан даётся выражением

$$H=-(-1)^{a(a+b)}g^{A\bar{B}}\nabla_A^{(N)}\nabla_{\bar{B}}^{(N)},$$
$$g^{AC}g_{CB}=\delta_B^A, \qquad (5.3)$$
$$\nabla_A^{(N)}=\partial_A-N\left(\partial_AK\right),$$
$$\nabla_{\bar{B}}^{(N)}=\partial_{\bar{B}}+N\left(\partial_{\bar{B}}K\right).$$

Здесь a, b – грассмановы чётности, соответствующие индексам A и B.

Волновая функция $\Psi_0^{(N)}(Z,\bar Z)$, отвечающая $\ell = 0$ (т.е. НУЛ), является ковариантно-аналитической:

$$\nabla_{\bar A}^{(N)}\Psi_0^{(N)} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Psi_0^{(N)} = e^{-NK}[A_0(z)+\zeta\psi_0(z)],$$
$$H\Psi_0^{(N)} = 0.$$

Волновые функции для $\ell > 1$ определяются следующим образом:

$$\Psi_\ell^{(N)} = \Psi_{(+)\ell}^{(N)} + \Psi_{(-)\ell}^{(N)},$$
$$\Psi_{(+)\ell}^{(N)} = \nabla_z^{(N+1)}\dots\nabla_z^{(N+2\ell-1)}\Phi_\ell^{(+)},$$
$$\Psi_{(-)\ell}^{(N)} =$$
$$= \left[\sum_{p=1}^{\ell}\nabla_z^{(N+1)}\dots\nabla_\zeta^{(N+2p-1)}\dots\nabla_z^{(N+2\ell-1)}\right]\Phi_\ell^{(-)}, \tag{5.4}$$
$$\nabla_{\bar A}^{(N)}\Phi_\ell^{(\pm)} = 0 \Rightarrow \Phi_\ell^{(\pm)} = e^{-NK}\varphi_\ell^{(\pm)}(z,\zeta),$$
$$H\Psi_\ell^{(N)} = \ell(\ell+2N)\Psi_\ell^{(N)}.$$

При естественном определении $SU(2|1)$ инвариантного внутреннего произведения

$$<\Omega|\Psi>= \int d\mu_0 e^{-K}\Omega^*\Psi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|\Psi\|^2 = \int d\mu_0 e^{-K}\Psi^*\Psi, \tag{5.5}$$
$$d\mu_0 = dzd\bar z\partial_\zeta\partial_{\bar\zeta}$$

волновые функции $\Psi_\ell^{(N)}$ для разных ℓ взаимно ортогональны. Норма волновой функции с фиксированным ℓ выражается через поля в ζ-разложениях

$$\varphi_\ell^{(-)} = A_\ell + \zeta\psi_\ell,\quad \varphi_\ell^{(+)} = \chi_\ell + \zeta F_\ell$$

следующим образом:

$$\|\Psi_\ell^{(N)}\|^2 : \int\frac{dzd\bar z}{(1+z\bar z)^{2(N+\ell)+1}}[-\ell(2N+\ell)|A_\ell|^2 -$$
$$-|-\ell\bar\psi_\ell\psi_\ell - \ell(\bar\chi_\ell + \bar z\bar\psi_\ell)(\chi_\ell + z\psi_\ell) + \tag{5.6}$$
$$+\frac{2(N+\ell)+1}{1+z\bar z}\bar\chi_\ell\chi_\ell + |F_\ell|^2].$$

Видно, что «естественная» норма не является положительно определённой, т.е. мы сталкиваемся с тем же явлением, что и в простейшей фермионной модели Ландау и в модели на суперфлаге. Поэтому есть опасность того, что соответствующая квантовая теория неунитарна. Однако, как и в предыдущих случаях, можно ввести метрический оператор на гильбертовом пространстве состояний, такой, что все нормы становятся неотрицательными по отношению к переопределённому внутреннему произведению. Этот оператор можно найти, исходя из того замечательного свойства, что квантовая модель Ландау на суперсфере при фиксированном параметре N оказывается эквивалентной квантовой модели на суперфлаге при $M=0$ и $N'=N-1/2$. Доказательство дано в [14]. Эта эквивалентность видна уже из сравнения норм (4.18) и (5.6). Метрический оператор для суперсферы можно получить из (4.22), выбирая там подходящие значения параметров.

6. Модель планарного суперфлага

Здесь мы рассмотрим специфические черты ещё одной $ISU(1|1)$ инвариантной модели, обобщающей модель Ландау: модели Ландау на планарном суперфлаге [8].

В планарном пределе, когда $SU(2|1)$ переходит в $ISU(1|1)$ и S^2 – в эвклидову 2-плоскость, лагранжиан (4.5) переходит в следующий лагранжиан [8]:

$$L = (1+\bar\xi\xi)|\dot z|^2 + (\bar\xi\dot{\bar z}\dot\zeta - \xi\dot z\dot{\bar\zeta}) +$$
$$+\bar\xi\xi\dot\zeta\dot{\bar\zeta} - i\kappa(\dot z\bar z - \dot{\bar z}z + \dot\zeta\bar\zeta + \dot{\bar\zeta}\zeta) + \tag{6.1}$$
$$+iM(\bar\xi\dot\xi + \xi\dot{\bar\xi}).$$

Основное отличие данной модели от модели Ландау на суперплоскости состоит в том, что в (6.1) фигурирует дополнительная фермионная переменная $\xi(t), \bar\xi(t)$. Её можно интерпретировать как поле Намбу–Голдстоуна, связанное с $ISU(1|1)$ и генераторами $Q, Q^\dagger$. Благодаря этой дополнительной переменной удаётся построить второй ВЗ член и одновременно избежать появления нестандартного кинетического члена второго порядка для $\zeta, \bar\zeta$. Несмотря на эти привлекательные свойства, в квантовой теории при естественном выборе внутреннего произведения всё ещё присутствуют отрицательные нормы.

В теории имеются связи на фазовом пространстве (из-за фермионных членов 1-го порядка в (6.1)). Решая эти связи, можно найти общую структуру волновой функции:

$$\Psi = K_1^M e^{-\kappa K_2} \Psi_{ch}(z, \bar{z}_{sh}, \zeta, \xi),$$
$$K_1 = 1 + \bar{\xi}\xi,\ \bar{z}_{sh} = \bar{z} - \xi\bar{\zeta}. \quad (6.2)$$

Квантовый гамильтониан в применении к этим «физическим» волновым функциям записывается в виде

$$H = \hat{a}^+ \hat{a}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 2\kappa,$$
$$\hat{a} = i\sqrt{K_1}\left(\partial_{\bar{z}} + \kappa z_{sh} - \bar{\xi}\partial_{\bar{\zeta}}\right), \quad (6.3)$$
$$\hat{a}^\dagger = i\sqrt{K_1}\left(\partial_z - \kappa\bar{z}_{sh} - \xi\partial_{\zeta}\right).$$

На ℓ-м УЛ физическая киральная волновая функция имеет специальный вид: она выражается через *аналитическую* функцию аргументов (z, ζ, ξ) согласно формуле

$$\Psi_{ch}^{(\ell)} = \tilde{\nabla}_z^{\ell} \Psi_{an}^{(\ell)}(z, \zeta, \xi),$$
$$\tilde{\nabla}_z = \partial_z - 2\kappa\bar{z}_{sh} - \xi\partial_{\zeta}, \quad (6.4)$$
$$H\Psi_{ch}^{(\ell)} = 2\kappa\ell\Psi_{ch}^{(\ell)}.$$

$ISU(1|1)$-инвариантное внутреннее произведение определяется как

$$< \Phi \mid \Psi > = \int d\mu \int d\xi d\bar{\xi}\ \overline{\Phi}\Psi =$$
$$= \int d\mu e^{-2\kappa K_2} \int d\xi d\bar{\xi}\ K_1^{2M}\ \overline{\Phi_{ch}}\Psi_{ch}, \quad (6.5)$$

где $d\mu = dzd\bar{z}d\zeta d\bar{\zeta}$ – мера интегрирования модели на суперплоскости. Разлагая волновую функцию в ряд по грассмановым переменным

$$\Psi_{an}^{(\ell)} = A^{(\ell)}(z) + \zeta B^{(\ell)}(z) +$$
$$+ \xi C^{(\ell)}(z) + \zeta\xi B^{(\ell)}(z), \quad (6.6)$$

можно показать, что

$$\| \Psi \|^2 \propto \int dz d\bar{z} e^{-2\kappa|z|^2} \left[(2M - \ell) \times\right.$$
$$\left. \times (2\kappa A^\dagger A + B^\dagger B) + 2\kappa C^\dagger C + D^\dagger D\right]. \quad (6.7)$$

Таким образом, при $\ell > 2M > 0$ и $M < 0$ возникают отрицательные нормы. При $\ell = 2M$ есть также и нулевые нормы.

Как и в ранее рассмотренных случаях, внутреннее произведение можно переопределить посредством введения нетривиального метрического оператора на гильбертовом пространстве. На аналитических функциях этот оператор задаётся выражением

$$G_{an} = [\xi, \partial_{\xi}] = -1 + 2\xi\partial_{\xi}. \quad (6.8)$$

После такого переопределения норма (под знаком интеграла по $z, \bar{z}$) принимает вид

$$\propto [(\ell - 2M)(2\kappa A^\dagger A + B^\dagger B) +$$
$$+ 2\kappa C^\dagger C + D^\dagger D]. \quad (6.9)$$

Теперь при $M < 0$ все состояния имеют положительную норму. Это справедливо и при $M = 0$, за тем исключением, что половина состояний с $\ell = 0$ имеют нулевую норму. Естественно определить (супер)пространство физических состояний как фактор по подпространству состояний с нулевыми нормами. В результате состояния с нулевыми нормами не дают вклада в физический спектр. Заключаем, что при $M = 0$ модель на планарном суперфлаге имеет точно такой же спектр, включая вырождение, как и модель на суперплоскости. Следовательно, при $M=0$ обе модели эквивалентны. При $M>0$ остаются отрицательные нормы для значений $\ell < 2M$, так что в этом интервале параметров небходимо сохранить «наивное» определение нормы.

Как и в модели на суперплоскости, переход к новому определению нормы меняет правило эрмитова сопряжения $ISU(1|1)$ суперзаряда Q, в результате чего естественным путём появляются новые сохраняющиеся суперзаряды. В применении к аналитическим волновым функциям эти суперзаряды определяются выражениями

$$S_{an} = 2i\kappa\xi(2M - N_{an}),$$
$$S_{an}^{\ddagger} = 2i\kappa\partial_{\xi}, \quad (6.10)$$
$$\{S_{an}, S_{an}^{\ddagger}\} = 2\kappa(H_{an} - 4\kappa M).$$

Эта квантовая суперсимметрия на мировой линии существует при $M \le 0$, поскольку невозможно достичь положительной определённости антикоммутатора в (6.10) при $M>0$ во всей области изменения параметров и на каждом УЛ.

Заключение

Кратко суммируем содержание работы.

Самосогласованные суперрасширения бозонной модели Ландау можно построить [5–10], исходя из их геометрической интерпретации как одномерных сигма моделей ВЗНВ типа на градуированных расширениях либо группы «магнитных трансляций», лежащей в основе исходной модели Ландау, либо группы $SU(2)$, которая является группой симметрии модели Хэлдейна.

Хотя «естественный» выбор инвариантного внутреннего произведения в рассматриваемом типе суперрасширений приводит к квантовым состояниям с отрицательной нормой, этот недостаток можно преодолеть посредством переопределения внутреннего произведения в пространстве состояний в духе работ [11, 12].

Характерной общей чертой планарных суперрасширений модели Ландау является присутствие в них скрытой динамической $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии [9, 10]. Сохраняется ли это свойство в моделях Ландау на суперсфере и суперфлаге и если нет, то что служит его аналогом? Можно ли во всех случаях воспроизвести это свойство (или его возможные обобщения), исходя из подходящего суперполевого формализма, как в модели на суперплоскости? Есть ли обобщения на высшие $\mathcal{N}$? Желательно иметь ответы на эти вопросы. На первый вопрос уже дан частичный ответ в недавней работе [14], где показано, что скрытой симметрией квантовой модели на суперфлаге при $M \neq 0$ является супергруппа $SU(2|2)$.

Что же касается возможных физических применений, то хотелось бы в полной мере осознать, какие явления описываются суперсимметричными версиями квантового эффекта Холла и каков физический статус дополнительных фермионных переменных в этом контексте.

Автор благодарен организаторам семинара за предложение написать эту статью. Большинство изложенных в ней результатов получено совместно с Андреем Бейлиным, Томасом Картрайтом, Лукой Мезинческу и Полом К. Таунсендом, которым автор выражает свою искреннюю признательность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №06-02-16684, 08-02-90490) и гранта ИНТАС 05-1000008-7928.

Список литературы

1. *Landau L.* Diamagnetismus der Metalle // Z. Phys. 1930. Vol.64. P.629.

2. *Haldane F.D.M.* Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol.51. P.605.

3. Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics, Singapour: World Scientific, 2000.

4. *Ivanov E.* Supersymmetrizing Landau models // Theor. Math. Phys. 2008. Vol.154. P.349.

5. *Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K.* Fuzzy $CP^{(n|m)}$ as a quantum superspace. Preprint UB-ECM-PF-03/31, Univer-sitat de Barcelona; arxiv: hep-th/0311159.

6. *Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K.* A super-flag Landau model. Preprint UB-ECM-PF-04/08, Universitat de Barcelona; arxiv: hep-th/0404108.

7. *Hasebe K., Kimura Y.* Fuzzy supersphere and supermonopole // Nucl. Phys. B. 2005. Vol.709. P.94 .

8. *Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P. K.* Planar super-Landau models // JHEP. 2006. Vol.0601. P.143.

9. *Curtright T., Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K.* Planar super-Landau models revisited // JHEP. 2007. Vol.0704. P.020.

10. *Hasebe K.* Quantum Hall liquid on a noncommutative superplane // Phys. Rev. D. 2005. Vol.72. P.105017.

11. *Bender C.* Introduction to PT-symmetric quantum symmetry // Contemp. Phys. 2005. Vol.46. P.277–292.

12. *Bender C.* Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rept. Prog. Phys. 2007. Vol.70. P.947.

13. *Curtright T., Mezincescu L.* Biorthogonal quantum systems // J. Math. Phys. 2007. Vol.48. P.092106.

14. *Beylin A., Curtright T., Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K.* Unitary Spherical Super-Landau Models // JHEP. 2008. Vol.0810. P.069.

15. *Elvang H., Polchinski J.* The Quantum Hall Effect on R^4 // Preprint NSF-ITP-02-120, University of California; arxiv: hep-th/0209104.

16. *Madore J.* The fuzzy sphere // Class. Quant. Grav. 1992. Vol.9. P.69.

17. *Witten E.* Dynamical breaking of supersymmetry // Nucl. Phys. B. 1981. Vol.188. P.513.

18. *Akulov V.P., Pashnev A.I.* Supersymmetric quantum mechanics and spontaneous breaking of supersymmetry at the quantum level // Theor. Math. Phys. 1985. Vol.65. P.1027.

19. *Volkov D.V., Pashnev A.I.* Supersymmetric Lagrangian for particles in proper time // Theor. Math. Phys. 1980. Vol.44. P.770.

20. *Robert D., Smilga A.V.* Supersymmetry vs ghosts // J. Math. Phys. 2008. Vol.49. P.042104.