



Из (27) видно, что сферически симметричное распределение скоростей пробных пучков, соответствующее сферическому фронту волны, имеет место только при  $h_{11} = 0$ , что отвечает отсутствию гравитации.

Из сказанного выше следует, что Вселенная с точки зрения передачи информации выглядит как линия передачи с шумами, требующая бесконечного времени для полной передачи информации.

Имеет смысл также поставить вопрос о связи двух определений постоянной  $q$  в (22). Если такая связь существует, то она означает связь между двумя фундаментальными явлениями – потоком фонового излучения из Вселенной и интенсивностью электромагнитного взаимодействия, зависящей от величины элементарного заряда. Это соображение можно обосновать тем, что появление микроволнового фона произошло в результате рекомбинации и перехода Вселенной из плазменного состояния в атомное, обеспечивших ее прозрачность.

Автор благодарит С.А. Смолянского и М.В. Давидовича за обсуждение результатов работы.

УДК 530.145.61: 530.182

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

А.Г. Лазерсон, А.А. Бойков

Саратовский государственный университет  
E-mail: tmf@sgu.ru

Рассмотрена сложная динамика квантовой системы «частица в прямоугольной яме с колеблющимся дном». Показано, что анализ временных зависимостей наблюдаемых позволяет выяснить, является ли динамика регулярной или хаотической. В качестве иллюстрации представлены результаты анализа временных зависимостей для средней по ансамблю энергии. Обнаружено, что с ростом амплитуды внешнего воздействия спектр интенсивности наблюдаемой демонстрирует свойства, характерные для спектра случайного процесса, что можно интерпретировать как хаотизацию динамики.

**Ключевые слова:** динамический хаос, квантовый хаос, квантовый осциллятор.

### Dynamical Chaos in Quantum Systems

A.G. Lazerson, A.A. Boikov

Complex dynamics of a quantum periodically driven square well is considered. It is shown that analysis of its ensemble average energy time series provides an identification of its dynamics to be either

### Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология / Пер. с англ.; Под ред. Я.А. Смородинского. М.: Наука, 1974. 520 с.
3. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
4. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1966. 376 с.
5. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Пер. с англ.; Под ред. О.А. Хрусталева. М.: Мир, 1985. 414 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 678 с.
7. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.
8. Carver A. Mead. Collective Electrodynamics I // Feynmann and Computation. Exploring the Limits of Computers / Ed. by A.J.G. Hey. Massachusetts: Perseus Books, Reading, 1998. 438 p.
9. Долгов А.Д. Магнитный монополю // Физическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1990. Т.2. С.687–688.
10. Берестецкий В.Б. Проблемы физики элементарных частиц. М.: Наука, 1979. 256 с.
11. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1968. 480 с.
12. Неванлинна Р. Пространство, время и относительность / Пер. с нем. Г.А. Вольперта; Под ред. И.М. Яглома. М.: Мир, 1966. 231 с.
13. Вайнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной / Пер. с англ.; Под ред. Я.Б. Зельдовича. М.: Энергоатомиздат, 1981. 209 с.



regular or chaotic. It has been found that enhancement of the driving force causes the energy spectrum to look like a spectrum of some random process, which may be identified as the signature of chaos in a quantum system.

**Key words:** dynamical chaos, quantum chaos, quantum oscillator.

### Введение

Известно, что модели квантовых неавтономных гамильтоновых систем являются объектом чрезвычайно интенсивного изучения в теории квантового хаоса [1–17]. С одним из самых простых примеров таких систем мы встречаемся при исследовании движения частицы в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме под действием внешнего монохроматического по-



ля. С точки зрения классической механики эта система была рассмотрена, в частности, в работе [18]. Впоследствии в работе [19] было дано исчерпывающее описание фазовых траекторий и КАМ-поверхностей, отвечающих движению частицы в прямоугольной яме, подверженной внешнему периодическому возмущению. Квантовый аналог этой задачи был исследован в работах [2–4]; было обнаружено, что при перекрытии квантовых нелинейных резонансов спектр квазиэнергий совершает переход от статистики Пуассона к распределению Вигнера. В работе [5] была проверена возможность развития техники ренормализации [1] для описания явления перекрытия резонансов. В работе [6] исследовано образование квантовых резонансов и их характеристики, отличающиеся от характеристик соответствующего классического резонанса.

В нашей статье, в отличие от указанных выше, предлагается идентифицировать сложную квантовую динамику частицы по поведению во времени наблюдаемых величин аналогично тому, как это делается при рассмотрении классических систем.

Как известно [20], в классической механике спектр интенсивности динамической величины  $f(t)$  – фурье-преобразование автокорреляционной функции этой величины. Автокорреляционная функция задается выражением  $B(\tau) = \langle f(t + \tau)f(t) \rangle - \langle f(t) \rangle^2$  (угловые скобки означают усреднение по времени). В случае периодической или квазипериодической динамики спектр интенсивности является дискретным, а в случае хаотической динамики – непрерывным. Если этот спектр непрерывный, то говорят, что величина  $f(t)$  обладает свойством перемешивания. Возникает вопрос: могут ли наблюдаемые величины квантово-механической системы, которым в классическом аналоге соответствуют динамические переменные, проявлять свойство, аналогичное перемешиванию в классической механике? А именно может ли увеличение спектрального разрешения на некотором частотном интервале привести к такому же изменению спектральной плотности наблюдаемых, какое имеет место для случайных процессов? (Напомним,

что спектр случайных процессов непрерывен [21].) В данной работе мы отвечаем на этот вопрос утвердительно, демонстрируя исследование спектральных характеристик наблюдаемых на примере усредненной по ансамблю энергии частицы.

Как представляется, анализ поведения во времени наблюдаемых позволяет проследить соответствие между классической и квантовой динамикой более наглядно, чем исследование перекрытия квантовых резонансов или изучение перехода спектра квазиэнергий от распределения Пуассона к распределению Вигнера. Дело в том, что в классической механике существует непосредственный аналог усредненной по ансамблю энергии – полная энергия частицы; так же обстоит дело и с любой другой наблюдаемой в квантовой системе. При этом трудно придумать столь же простой классический аналог такой часто используемой характеристики, как распределение квазиэнергий. Что касается квантового нелинейного резонанса, то в работе [6] указывается, что перекрытие квантовых резонансов оказывается еще более сложным, чем перекрытие резонансов классических. С нашей точки зрения, дело обстоит так по следующей причине. В классической механике картина перекрытия существенно зависит от поведения резонансов второго и более высоких порядков. При квантово-механическом рассмотрении введение понятия «резонанс второго или более высокого порядка» затрудняется тем, что число уровней, на которых мог бы разместиться такой резонанс, заведомо ограничено. С увеличением порядка резонанса уменьшается мера области, занимаемой резонансом в фазовом пространстве (при классическом описании), или уменьшается число уровней энергии, занимаемых резонансом (при квантово-механическом описании). Значит, при достаточно большом натуральном  $n$  для квантового резонанса  $n$ -го порядка не найдется уровней энергии – все доступные уровни заняты резонансами порядков меньших, чем  $n$ . С другой стороны, классическое фазовое пространство имеет мощность «континуум» и в нем присутствуют резонансы сколь угодно высоких порядков.



В качестве критерия стохастичности динамической системы будем использовать классическое условие Чирикова: для неинтегрируемой системы существует безразмерный параметр  $K$ , смысл которого заключается в следующем. Если параметр  $K$  очень мал по сравнению с единицей, стохастические слои являются очень тонкими и отделены друг от друга инвариантными кривыми. С увеличением  $K$  инвариантные кривые, разделяющие соседние резонансы и их стохастические слои, сильно искажаются и в конце концов разрушаются. В результате происходит слияние стохастических слоев и возникает так называемая «глобальная стохастичность» [20, 22]. Условие Чирикова используется нами для проверки соответствия между классической и квантовой механикой. Выберем амплитуду и частоту внешнего возмущения так, чтобы параметр  $K$  был мал по сравнению с единицей, и проведем исследование поведения во времени какой-либо наблюдаемой переменной. Тогда мы вправе ожидать периодической зависимости этой переменной от времени с частотой, равной частоте внешнего возмущения. Но если мы выберем амплитуду и частоту внешнего возмущения так, чтобы параметр  $K$  был примерно равным единице или большим единицы, следует ожидать нерегулярного поведения наблюдаемой переменной, то есть появления новых частотных пиков, густота которых неограниченно возрастает с повышением точности измерений. А это и означает, что спектр становится всюду плотным (то есть практически сплошным) в некоторой области частот.

В разделе 1 приводится вывод системы уравнений для модели прямоугольной ямы с колеблющимся дном, указывается тип начального условия, для которого эта система была численно решена. В разделе 2 обсуждается проблема исследования спектральной плотности интенсивности наблюдаемой переменной. В разделе 3 проводится анализ полученных результатов.

#### 1. Динамическая модель

В данной работе мы используем систему единиц измерения, в которой масса частицы, ширина ямы и постоянная Планка  $\hbar$  приняты

равными единице. Гамильтониан частицы в потенциале  $V(x)$ , подверженной внешнему гармоническому возмущению, имеет вид [7]

$$H(x, t) = 1/2 p^2 + V(x) + F_0 x \sin(\omega_0 t), \quad (1)$$

где  $F_0$  – амплитуда,  $\omega_0$  – частота внешнего поля; под  $x$  понимаем совокупность всех координат конфигурационного пространства системы.

При квантово-механическом описании поведение частицы определяется волновой функцией  $\psi(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}(x, t) \psi \quad (2)$$

с граничными условиями на  $\psi$  и её производную по  $x$ .

Рассматривая потенциал  $V(x)$  как невозмущенный, а периодическую внешнюю силу как возмущение и следуя методу Дирака (см., например, [23]), запишем решение уравнения Шредингера в виде ряда

$$\psi(x, t) = \sum c_n(t) \psi_n(x) \exp(-iE_n t), \quad (3)$$

где  $\psi_n(x)$  – собственные функции невозмущенной задачи, а  $E_n$  – соответствующие собственные значения. Получим после несложных преобразований, вообще говоря, бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов разложения  $c_n(t)$  волновой функции частицы по собственным функциям невозмущенной задачи:

$$i \frac{dc_n(t)}{dt} = \sum_m c_m V_{nm} \{ \exp i(E_m - E_n)t \}, \quad (4)$$

где матричные элементы возмущения  $V_{nm}(t)$  определяются стандартным образом [23]:

$$V_{nm} = F_0 \sin \omega_0 t \int \psi_m^*(x) \varphi(x) \psi_n(x) dx, \quad (5)$$

где интеграл берется по всему конфигурационному пространству системы.

Как известно, величина  $|c_n(t)|^2$  представляет собой вероятность того, что при проведении измерения в момент времени  $t$  частица будет обнаружена в состоянии с энергией  $E_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

Начальное условие зададим следующим образом:



$$c_n(0) = \delta_{nN}, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Такое начальное условие означает, что в момент времени  $t = 0$  частица располагается на уровне энергии с заданным номером  $N$ . После того как получено решение системы (4), можно построить зависимость от времени любой наблюдаемой величины и исследовать ее поведение.

## 2. Исследование спектральной плотности интенсивности

Вычисление спектральных составляющих производится по стандартной процедуре, которая заключается в следующем [21, 24]. На основе численного решения системы (4) строится зависимость наблюдаемой переменной от времени (временная реализация). Длина этой реализации  $T$  сначала выбирается произвольно. Затем вычисляется выборочная автокорреляционная функция наблюдаемой и нормированная спектральная плотность интенсивности (далее – спектр). Для вычисленного спектра шаг дискретизации по частоте однозначно определяется длиной реализации  $T$  наблюдаемой переменной ( $\Delta f = 1/T$ ).

Далее строится временная реализация того же процесса на удвоенном временном интервале  $2T$ , рассчитываются ее корреляционная функция и спектр. При этом шаг дискретизации по частоте становится в два раза меньше. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения амплитуд всех вычисленных спектральных составляющих не стабилизируются. Если спектр не является всюду плотным, то амплитуды спектральных составляющих на промежуточных частотах либо равны нулю, либо вследствие погрешности численного метода спектрального анализа достаточно малы (обычно порядка минус пятьдесят децибел). Для всюду плотного спектра эти амплитуды значительно превышают указанный уровень и сравнимы по величине с амплитудами, определенными на предыдущем этапе.

## 3. Результаты расчетов

В качестве примера рассмотрим бесконечно глубокую прямоугольную яму, возбуждаемую внешним периодическим воздействием. В этом случае  $\psi_n(x) = 2 - 1/2 \sin(\pi/x)$

$\varphi(x) - x$ . Для классического аналога рассматриваемой динамической системы параметр стохастичности  $K$  записывается в соответствии с [20] в виде

$$K = \frac{2\pi^3}{\omega_0^2} F_0. \quad (7)$$

Как легко видеть из этой формулы, величина  $K$  зависит только от амплитуды и частоты внешнего поля. Так как оба эти параметра полностью сохраняют свой физический смысл при переходе от классического рассмотрения к квантово-механическому, формула (7) может использоваться и в квантовой задаче.

В данной работе система (4) решалась численно для  $K = 0.01, 1.0$  и  $2.0$ , то есть в соответствии с формулой (7) были соответствующим образом подобраны значения амплитуды и частоты внешнего возмущения. Начальное условие выбиралось так, чтобы частица в момент времени  $t = 0$  находилась на 150-м уровне. Частота возмущения  $\omega_0$  задавалась так, чтобы она совпадала с частотой перехода между 150-м и 151-м уровнями. Интервал времени, на котором получено решение системы (4), составил 5000 периодов колебаний внешнего поля для случая  $K=0.01$  и 150 периодов колебаний внешнего поля для случаев  $K=1.0$  и  $K=2.0$ .

В качестве примера наблюдаемой переменной для рассматриваемой системы была выбрана средняя по ансамблю энергия частицы.

При построении численного решения для  $K=0.01$  мы ограничились учетом уровней энергии от 100-го по 200-й. Для  $K=0.01$  на рис. 1 показан график средней энергии, а на рис. 2 – выборочный спектр средней энергии. Результаты расчетов, приведенные на рис. 2, позволяют утверждать, что для малых амплитуд возмущения спектр заведомо является дискретным с небольшим количеством (не более десятка) частотных пиков. Кажущаяся непрерывность спектра вокруг пиков  $0.1\omega_0$  и  $0.3\omega_0$  должна быть отнесена на счет боковых лепестков. В самом деле, характер зависимости спектральных составляющих от частоты в небольшой окрестности точки  $0.1\omega_0$  и в небольшой окрестности точки  $0.3\omega_0$  качествен-

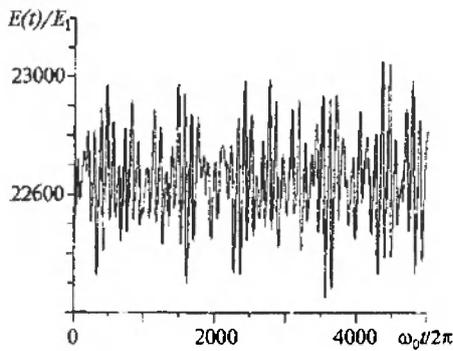


Рис. 1. Реализация среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=0.01$

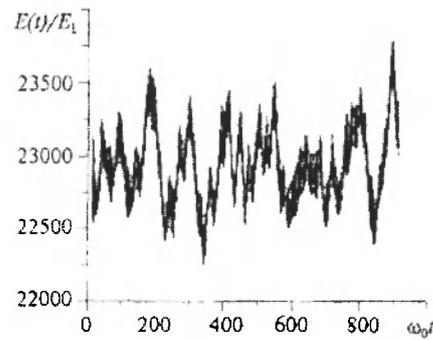


Рис. 3. Реализация среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=1.0$

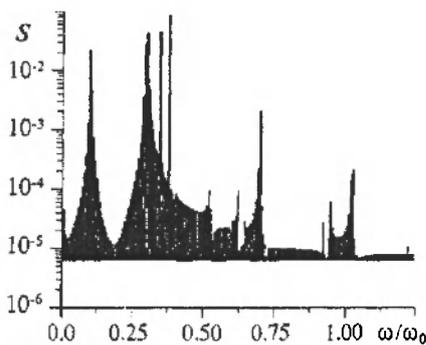


Рис. 2. Спектральная плотность интенсивности среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=0.01$

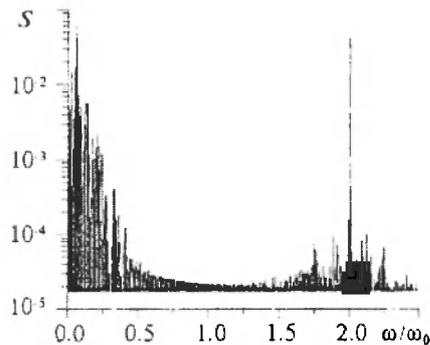


Рис. 4. Спектральная плотность интенсивности среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=1.0$

но совпадает с боковыми лепестками для прямоугольного окна [24]. Кроме того, мы обнаружили, что основная мощность имеет место на низких частотах, не превышающих  $0.75\omega_0$ , а частоте колебаний частицы  $\omega_0$  соответствует пик значительно меньшей интенсивности.

При построении численного решения для  $K=1.0$  мы ограничились учетом энергетических уровней с 50-го по 250-й. Для этого случая на рис. 3 показан график средней энергии, на рис. 4 представлен спектр средней энергии для всего временного интервала реализации, на рис. 5 изображен сравнительный график спектров средней энергии для первой четверти и всего временного интервала реализации в области низких частот. Рис. 3 демонстрирует, что средняя энергия как функция времени ведет себя подобно реализации случайного процесса. На рис. 4 показано, что высокая мощность сосредоточена на низких частотах, а именно в интервале частот от нуля до  $\omega_0/3$ ; начиная с этого значения частоты мощность резко снижается.

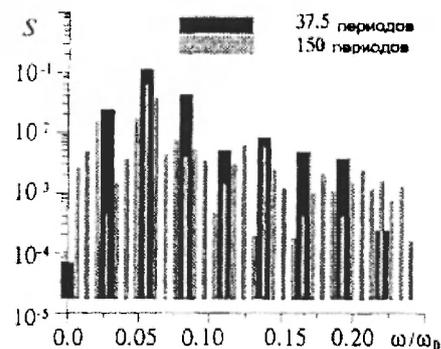


Рис. 5. Сравнение вычисленных значений спектральной плотности интенсивности для разных интервалов реализации среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=1.0$  на низкочастотном интервале

Отдельные заметные всплески мощности можно наблюдать и в окрестности частоты, равной удвоенной частоте колебаний внешнего поля. Обратим внимание на то, что на данной частоте имеется одинокий острый пик. Это, по-видимому, является квантовомеханическим аналогом так называемого параметрического резонанса [25, 26].



Сравнивая изображенные на рис. 5 спектры средней энергии для первых 37.5 и первых 150-ти периодов колебаний внешнего поля, отметим, что спектральная плотность интенсивности средней энергии проявляет такое свойство, как неограниченное сгущение спектральных линий с уменьшением шага по частоте. Именно в этом смысле можно говорить о том, что спектр наблюдаемой является сплошным.

При построении численного решения для  $K = 2.0$  мы ограничились учетом первых 300 энергетических уровней. Для этого случая на рис. 6 показан график средней энергии, на рис. 7 представлен спектр средней энергии для всего временного интервала реализации, на рис. 8 изображен сравнительный график спектров средней энергии для первой четверти и всего временного интервала реализации в области низких частот, если сравнить графики, приведенные на рис. 3 и 6 (графики временных реализаций средней энергии для случаев  $K=1.0$  и  $K=2.0$  соответствен-

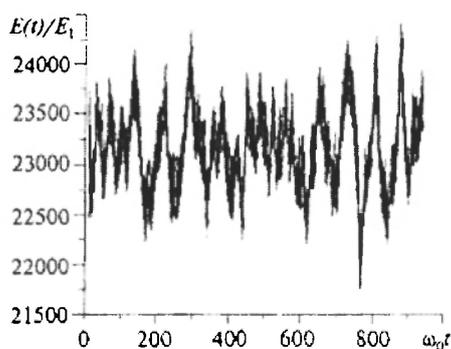


Рис. 6. Реализация среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=2.0$

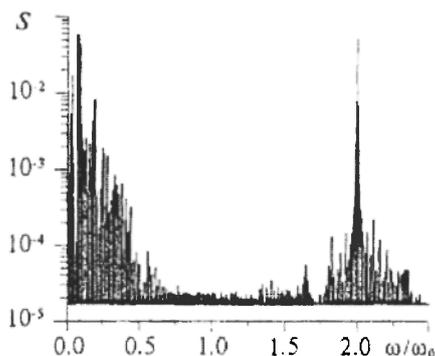


Рис. 7. Спектральная плотность интенсивности среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K = 2.0$

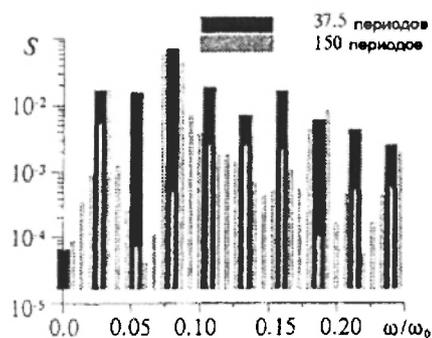


Рис. 8. Сравнение вычисленных значений спектральной плотности интенсивности для разных интервалов реализации среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=2.0$  на низкочастотном интервале

но), то можно заметить, что средняя энергия на рис. 6 колеблется с несколько большей амплитудой и в основном с большей частотой, нежели средняя энергия на рис. 3. Можно заметить, что при  $K=2.0$  мощность заметно падает, начиная с частоты, равной приблизительно  $\omega_0/2$  (а не  $\omega_0/3$ , как при  $K=1.0$ ). Что касается сравнения изображенных на рис. 8 спектров средней энергии для первых 37.5 и первых 150-ти периодов колебаний внешнего поля, скажем, что спектр средней энергии при  $K=2.0$  также может рассматриваться как непрерывный по аналогии со спектром на рис. 5.

#### Выводы

Изложенные результаты позволяют сделать следующие выводы. В полном соответствии с классической динамикой поведение неавтономной квантовой системы сводится к одному из двух случаев.

Классический аналог рассматриваемой системы показывает, что области стохастичности существуют лишь в очень малых окрестностях сепаратрис и отделены друг от друга. Тогда при квантовом рассмотрении наблюдаемая величина обнаруживает только дискретный спектр.

Классический аналог переходит к глобальной стохастичности, то есть нелинейные резонансы перекрываются, сепаратрисы разрушаются и области стохастичности сливаются друг с другом. Тогда при квантовом рассмотрении спектральная плотность интенсивности наблюдаемой проявляет такое



свойство, как появление все новых и новых частотных пиков с уменьшением шага по частоте. Такое сгущение, по-видимому, неограниченно, что и позволяет сравнить полученный спектр наблюдаемой с непрерывным спектром случайного процесса.

Итак, при квантовом рассмотрении гамильтоновой системы исследование переменной во времени наблюдаемой величины позволяет идентифицировать динамику данной системы. Поэтому поведение во времени наблюдаемых значений – средних по ансамблю – физических величин (энергии, импульса и др.) может служить критерием регулярности поведения квантовых систем.

#### Список литературы

1. Reichl L.E. The transition to chaos in conservative classical systems: quantum manifestations. N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
2. Reichl L.E., Lin W.A. Exact quantum model of field-induced resonance overlap // Phys. Rev. A. 1986. Vol.33. P.3598.
3. Lin W.A., Reichl L.E. Transition of spectral statistics due to overlap of quantum resonance zones // Phys. Rev. A. 1987. Vol.36. P.5099.
4. Lin W.A., Reichl L.E. Spectral analysis of quantum resonance zones, quantum Kolmogorov-Arnold-Moser theorem and quantum resonance overlap // Phys. Rev. A. 1988. Vol.37. P.3972.
5. Reichl L.E., Li Haoming. Self-similarity in quantum dynamics // Phys. Rev. A. 1990. Vol.42. P.4543.
6. Ju-Yong Sh., Hai-Woong L. Floquet analysis of quantum resonance in a driven nonlinear system // Phys. Rev. E. 1994. Vol.50. P.902.
7. Holthaus M. On the classical-quantum correspondence for periodically time dependent systems // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. Vol.5. P.1143.
8. Cocke S., Reichl L.E. Static-field effects on the nonlinear quantum resonances and the ionization spectrum of a simple bound particle // Phys. Rev. A. 1995. Vol.52. P.4515.
9. Farini A., Boccaletti S., Arcelli F.T. Quantum-classical comparison in chaotic systems // Phys. Rev. E. 1996. Vol.53. P.4447.
10. Morrow G.O., Reichl L.E. Planck's-constant dependence of the scaling of localization length in quantum dynamics // Phys. Rev. E. 1998. Vol.57. P.5266.
11. Demikhovskii V.Y., Kamenev D.I., Luna-Acosta G.A. Quantum weak chaos in a degenerate system // Phys. Rev. E. 1999. Vol.59. P.294.
12. Mirbach B., Casati G. Transition from quantum ergodicity to adiabaticity: dynamical localization in an amplitude modulated pendulum // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol.83. P.1327.
13. Loinaz W., Newman T.J. Quantum revivals and carpets in some exactly solvable systems // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol.32. P.8889.
14. Timberlake T., Reichl L.E. Phase-space picture of resonance creation and avoided crossings // Phys. Rev. A. 2001. Vol.64. P.033404.
15. Sankaranarayanan R., Lakshminarayan A., Sheorey V.B. Quantum chaos of a particle in a square well: Competing length scales and dynamical localization // Phys. Rev. E. 2001. Vol.64. P.046210.
16. Emmanouilidou A., Reichl L.E. Floquet scattering and classical-quantum correspondence in strong time-periodic fields // Phys. Rev. A. 2002. Vol.65. P.033405.
17. Korsch H. J., Leyes W. Quantum and classical phase space evolution: a local measure of derealization // New J. Phys. 2002. Vol.4. P.62.
18. Lin W.A., Reichl L.E. External field induced chaos in an infinite square well potential // Physica D. 1986. Vol.19. P.145.
19. Fuka M.Z., McIver J.K., Becker W., Orszag M., Ramirez R. Driven particle in an infinite square well: Representation and breakdown of the invariant tori in a multiple-resonance case // Phys. Rev. E. 1995. Vol.51. P.1935.
20. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
21. Дженкинс Г., Ватте Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971.
22. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
24. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988.
26. Рабинович М.И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.