



12. Зельдович Я.Б., Старобинский А.А. Рождение частиц и поляризация вакуума в анизотропном гравитационном поле // ЖЭТФ. 1971. Т.61. С.2161.

13. Filatov A.V., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A. Pair creation by electromagnetic wave in a self-created plasma // Proc. of SPIE. 2006. Vol.6165. P.616509.

14. Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Bravina L.V., Zabrodin E.E. Dynamical Casimir effect in an expanding flux tube //

Proc. of the XVIII Baldin Intern. Seminar on High Energy Physics Problems «Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics» / Eds. A.N. Sisakian, V.V. Burov, A.I. Malakhov. Dubna, 2008. Vol.2. P.75.

15. Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Ilyine S.V. Kinetic equation for the quark Wigner function in strong gluon fields // Теоретическая физика. 2002. Т.3. С.108.

УДК 537.8; 539.186.2

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Ю.Н. Зайко

ФГОУ ВПО Поволжская академия государственной службы
им. П.А. Столыпина, Саратов
E-mail: zyrnick@rambler.ru

В работе исследовано влияние собственного гравитационного поля сферической электромагнитной волны (ЭМВ) на ее распространение в вакууме. Получено решение уравнений Максвелла совместно с уравнениями тяготения Эйнштейна. Вид метрики предполагается таким же, как в известной шварцшильдовской задаче о поле тяготения в окрестности точечной массы с учетом дополнительной зависимости от полярного угла θ . Получены уравнения для радиальной и угловой части поля ЭМВ для волны E -типа. Исследованы их различные решения. Показано, что наряду с решением, описывающим поле бегущей ЭМВ на больших расстояниях, существует решение инстантонного типа, описывающее в квазиклассическом приближении процесс туннелирования между асимптотически вырожденными состояниями, соответствующими сходящейся и расходящейся сферическим ЭМВ. Получены точные выражения для решений обоих типов, а также точные выражения для соответствующих метрик. Рассмотрены решения уравнений Максвелла–Эйнштейна (Максвелла) для волн, обладающих нулевым орбитальным моментом импульса. Показано, что в статическом случае они описывают поля точечных зарядов – электрического e и магнитного m . Показано, что симметрия уравнений Максвелла в вакууме относительно группы $U(1)$ дуальных преобразований: $(\mathbf{E}+i\mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{E}+i\mathbf{H})^\alpha$, \mathbf{E} и \mathbf{H} – электрическое и магнитное поля, где α – вещественный параметр переносится и на обобщенный заряд $e + im$, который преобразуется так же. Спонтанное нарушение симметрии этой группы, при котором $tga = -m/e$, сопровождающееся в силу теоремы Голдстоуна появлением безмассовых частиц – фотонов, приводит к невозможности наблюдения магнитных зарядов в Природе.

Ключевые слова: метрика, инстантон, магнитный заряд, монополь Дирака, дуальная группа, теорема Голдстоуна, спонтанное нарушение симметрии.

An Explicit Solutions of the Maxwell–Einstein Equations

Yu.N. Zayko

This article concerns the effect of gravitation field of the spherical electro-magnetic wave (EMW) on its propagation in vacuum. For this it was received a solution of the coupled Maxwell–Einstein equations. The expression for metric is supposed to be just the same as in well-known Schwarzschild problem for gravitation field at the vicinity of point mass with additional dependence on polar angle θ . The equa-



tions for radial and angular parts of EMW fields of TE- and TM-types are received. Their various solutions are investigated. It is shown that in addition with traveling wave EMW at a great distance some new solution of so-called instanton type exists. It describes the process of quantum tunneling between degenerate states corresponding to convergent and divergent spherical waves in quasiclassical approximation. An explicit solutions for waves of both types are received so as an expressions for corresponding metrics.

The solutions of the Maxwell–Einstein (Maxwell) equations are considered for waves which have zero value of moment momentum. It was shown that in static case they describe fields of point charges – electric e and magnetic m . It was shown that symmetry of Maxwell equations with respect to group $U(1)$ of dual transformations: $(\mathbf{E}+i\mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{E}+i\mathbf{H})^\alpha$, \mathbf{E} and \mathbf{H} are electric and magnetic fields, α – is real parameter is valid for generalized charge $e + im$, which is transformed in the same manner. Spontaneous breaking of symmetry of this group, which is characterized $tga = -m/e$, leads to arising massless particles – photons due to Goldstone theorem. This also leads to the fact that magnetic charges cannot detect in Nature.

Key words: metrics, instanton, magnetic charge, Dirac's monopole, dual group, Goldstone's theorem, spontaneous breaking symmetry.

Введение

О геометрии пространства–времени можно судить по поведению световых лучей [1]. При этом предполагается, что вид световых волн, которым соответствуют лучи, не важен. В настоящей работе показано, что это не так, т.е. геометрия будет разной, например, для плоских и сферических волн. Причина этого – в собственном гравитационном поле сферической электромагнитной волны (ЭМВ). Действительно, лучи, нормальные к фронту сферической волны, направлены под углом друг к другу и, следовательно, их вклад в гравитационное поле отличен от нуля. Вид соответствующей метрики для слабого гравитационного поля определен в [2].



В настоящей работе этот эффект исследован для гравитационного поля сферической ЭМВ произвольной величины. В то же время лучи, нормальные к фронту плоской ЭМВ, параллельны друг другу, не вносят вклада в гравитационное поле [2] и, следовательно, не изменяют метрику.

Исходные уравнения

В качестве исходных уравнений выберем уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения электромагнитного поля в вакууме (уравнения Максвелла), связанные друг с другом [1, 2]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi K}{c^4} T_{ik}; \quad F^{ik} + \Gamma^l_{kl} F^{ik} = 0. \quad (1)$$

Здесь R – след тензора Риччи R^i_k : $R = R^i_i$, g_{ik} – метрический тензор; T_{ik} и F^{ik} – тензор энергии-импульса и электромагнитный тензор; Γ^l_{kl} – символы Кристоффеля; c – скорость света в вакууме, K – постоянная тяготения; индексы i, k, l пробегает значения 0, 1, 2, 3; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; запятая означает обычную, т.е. не ковариантную производную [1]. Будем искать решения (1), соответствующие наличию на бесконечности сферической ЭМВ. Для этого, следуя [1], зададим вид интервала

$$ds^2 - e^v c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2), \quad (2)$$

где $v = v(t, r, \theta)$, $\lambda = \lambda(t, r, \theta)$; $x^0 = ct$, t – время; $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ – сферические координаты. ЭМВ характеризуется частотой ω , полным моментом импульса J и его проекцией на направление оси z – J_z . Кроме того, ЭМВ можно характеризовать орбитальным моментом L , который коммутирует с J и J_z . Выберем ось z системы координат таким образом, чтобы $J_z = 0$. Это упростит задачу, поскольку позволит опустить в уравнениях (1) зависимость от азимутального угла φ .

Второе уравнение (1) можно привести к виду [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) - \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{-g} F^{0\alpha}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{0\beta}) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad \sqrt{-g} = e^{\frac{\lambda+v}{2}} r^2 \sin^2 \theta.$$

При этом $\alpha = 1, 2$ соответствуют волне E -типа, а $\alpha = 3$ – волне M -типа. Ниже мы ограничимся рассмотрением волны E -типа¹, для которой отличными от нуля компонентами вектор-потенциала и электромагнитного тензора являются A_1, A_2 и

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0}, F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}, F_{02} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0}. \quad (4)$$

При этом мы используем калибровку $A_0 = 0$. Для разделения переменных наложим дополнительное условие: $\lambda = \alpha(r, t) + \beta(\theta)$, $v = -\alpha(r, t) + \beta(\theta)$. Подставляя (4) в (3), получим два уравнения для компонент A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(r,t)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 e^{-\beta(\theta)} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial A_2}{\partial t} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) \right] - \\ - e^{\alpha(r,t)} \frac{r^2}{c^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-\beta(\theta)} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом первое из уравнений (3) является следствием (5). Дифференцируя первое уравнение в (5) по r , а второе – по ct , исключим из уравнений A_2 . Представляя $F_{01} = \Psi(r, t) \cdot \Phi(\theta)$, получаем уравнения для $\Psi(r, t)$ и $\Phi(\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + c i g \theta \frac{d\Phi}{d\theta} + l(l+1) e^{-\beta(\theta)} \Phi &= 0, \\ e^{-\alpha(r,t)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \Psi) - e^{\alpha(r,t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r^2 \Psi) - \\ - l(l+1) \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что при $\bar{v} \rightarrow 0$ $\Phi(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$, где $P_l(\cos \theta)$ – полином Лежандра, причем l является целым неотрицательным числом [3, 4]. Оно соответствует значению L орбитального момента импульса волны².

¹ Решение задачи для волны M -типа не требует отдельного рассмотрения, поскольку перестановочная двойственность уравнений Максвелла, т.е. инвариантность относительно преобразования $E \rightarrow -H, H \rightarrow E$, распространяется и на уравнения Максвелла-Эйнштейна из-за того, что тензор энергии импульса T_{ik} остается при этом инвариантным.

² Т.е. величина $l(l+1)$ является собственным значением оператора L^2 .



Тензор энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса T_k^i можно выразить через компоненты метрического тензора g_k^i в соответствии с уравнениями тяготения Эйнштейна [1]:

$$\frac{8\pi K}{c^4} T_k^i = R_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i R, \quad (7)$$

где δ_k^i – единичный 4-тензор, а R – след тензора R_k^i . Детали вычислений можно найти,

например, в [1]. Кроме символов Кристоффеля, приведенных в [1], нам понадобятся дополнительные, знак \sim (тильда) означает производную по углу θ :

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\tilde{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{\tilde{\nu}}{2},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\tilde{\lambda}e^\lambda}{2r^2}, \quad \Gamma_{00}^2 = \frac{\tilde{\nu}e^\nu}{2r^2}.$$

Окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 &= -e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\tilde{\beta}}{2r^2} (2\tilde{\beta} + 1), \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^1 &= -e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \left[2\tilde{\beta} + 2(\tilde{\beta})^2 + 2\tilde{\beta}ctg\theta - \frac{\tilde{\beta}}{2} \right], \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_2^2 &= \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} \left[\alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] + \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2r^2} \left[\tilde{\beta} + (\tilde{\beta})^2 - \tilde{\beta}ctg\theta - \frac{\tilde{\beta}}{2} \right], \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_3^3 &= \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} \left[\alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] + \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - \frac{1}{2r^2} \left(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}ctg\theta + \frac{\tilde{\beta}}{2} \right), \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_0^1 &= -e^{-\alpha-\beta} \frac{\dot{\alpha}}{r}; \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_0^2 = 0; \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_1^2 = -\frac{2\tilde{\beta}}{r^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выразим компоненты тензора энергии-импульса T_k^i через решения уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ \frac{3}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[\frac{3}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^1 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ \frac{3}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 - \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[\frac{1}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{3r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_2^2 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[\frac{3}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 - \frac{3r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_3^3 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[-\frac{1}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_0^1 &= -\frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\alpha-\beta}}{[l(l+1)]^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right) \Phi^2; \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_0^2 = \frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\beta}}{l(l+1)} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^2 &= \frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\beta}}{l(l+1)} \frac{\Psi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Psi) \Phi^2. \end{aligned} \quad (8a)$$

При этом, строго говоря, правые части в (8a) следует усреднять по времени. Однако эту

процедуру можно выполнить на любом этапе вычислений.



Решение уравнений

Вычитая в (8а) из первого уравнение второе и из третьего четвертое и приравнявая результатам аналогичных операций с одноименными компонентами тензора T'_k , выраженными через компоненты тензора g'_k (8), получим уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{2K}{c^4} \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + e^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} r^2 \Psi \right)^2 \right] = \\ & = \frac{e^{\beta} [l(l+1)]^2}{\Phi^2} \left[\tilde{\beta} + 2\tilde{\beta}^2 + \tilde{\beta} \left(ctg\theta + \frac{1}{4} \right) \right] = A, \\ & \frac{2K}{c^4} \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 - e^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} r^2 \Psi \right)^2 \right] = \\ & = \frac{e^{\beta} [l(l+1)]^2}{\Phi^2} \left[\tilde{\beta} + \frac{\tilde{\beta}^2}{2} - \tilde{\beta} ctg\theta \right] = B. \end{aligned} \quad (9)$$

Постоянные A и B играют роль интегралов (6). Остальные уравнения, получающиеся из компонент T_0^1 и T_1^2 после усреднения по времени, приведут к уравнениям

$$\dot{\alpha} = 0, \quad \dot{\tilde{\beta}} = 0, \quad (9a)$$

а из T_0^2 – к тождеству. Заметим, что операция усреднения не отразится на уравнениях (9).

Второе уравнение в (6) описывает при $r \rightarrow \infty$ плоскую бегущую волну, откуда следует, что постоянная $B = 0$. Выражая из второго уравнения (9) e^{α} через решения волнового уравнения и подставляя это выражение во второе уравнение (6), получим (штрих означает производную по r , точка – по x^0):

$$\begin{aligned} & e^{\alpha} = \pm \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x^0} \right)^{-1}; \\ & f'' - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \dot{f} \mp \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{f'}{f} f = 0; \quad (10) \\ & f = r^2 \Psi, \end{aligned}$$

знаки “ \pm ” соответствуют сходящейся и расходящейся волне. Граничным условием для этого уравнения является наличие плоской бегущей волны при $r \rightarrow \infty$.

Решения (6), порождаемые первым из уравнений (9), исследуем в псевдоевклидовом пространстве с метрикой, определяемой заменой временной координаты x^0 простран-

ства Минковского на «временную» координату $-iy^0$ псевдоевклидова пространства, одновременно вводя псевдоевклидово действие A , связав его с действием в пространстве Минковского S выражением $A = iS, i = (-1)^{1/2}$. Как известно [5], локализованным решениям евклидовых полевых уравнений с конечным евклидовым действием соответствуют инстантоны. Инстантоны классических полевых уравнений в пространстве Минковского описывают в квазиклассическом приближении квантовый процесс туннелирования между вырожденными классическими состояниями. Второе уравнение (6) после такой замены из гиперболического превращается в эллиптическое. Накладывая на его решения условие ограниченности при $r \rightarrow \infty$, получим из первого уравнения (9) $A = 0$ и приведем его к виду

$$\begin{aligned} & e^{\alpha} = \pm \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y^0} \right)^{-1}; \\ & f'' + \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \dot{f} \mp \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{f'}{f} f = 0; \quad (11) \\ & f = r^2 \Psi, \end{aligned}$$

где штрих по-прежнему означает дифференцирование по r , а точка – дифференцирование по y^0 .

Правые части уравнений (9) определяют зависимость $\beta(\theta)$. Из их вида, а также из (9а) следует, что их решением является константа $\beta(\theta) = \beta_0$. Ниже мы положим $\beta_0 = 0^3$. В этом случае угловое распределение полей ЭМВ будет таким же, как и без учета гравитационного взаимодействия.

Займемся решением уравнений (10) и (11). Решение уравнения (10) в комплексной плоскости z имеет вид $f(z,t) = F(z)e^{\pm i\omega t}$, $|z| = \omega r/c$, ω – частота. Для $F(z)$ получим уравнение

$$FF'' - (F')^2 + i \frac{l(l+1)}{z^2} FF' = 0; F' = \frac{dF}{dz}. \quad (12)$$

³ В случае $\beta \neq 0$, отвечающем метрике, отличающейся на бесконечности от плоской, на l накладывается условие $l(l+1)e^{-\beta} = k(k+1)$, где k – неотрицательное целое. Для произвольного β это уравнение имеет решение $l = k = 0$, что приводит к эффективному значению $r_c = 0$.



Точное решение для F с граничным условием на бесконечности $F \sim e^{iz}$ имеет вид

$$\ln F = C_1 \int e^{\frac{i(l+1)}{z}} dz = C_1 \left[ze^{\frac{i(l+1)}{z}} - il(l+1) \cdot Ei\left(i \frac{l(l+1)}{z}\right) + C_2 \right], \quad (13)$$

где $Ei(x)$ – интегральная показательная функция, $C_1 = i$ и C_2 – постоянные.

Значение величины $e^\alpha = F'(z)/iF(z)$, определяющее метрику в (10), вычисляем с помощью формул Даламбера–Эйлера [6]

$$e^\alpha = \exp\left(\frac{r_c}{r}\right), \quad r_c = \frac{l(l+1)c}{\omega}. \quad (14)$$

Решение уравнения (11) ищем в виде $f(z, y^0) = F(z)e^{i\omega t}$, $z = \omega r/c$, $y^0 = ct$. Подставляя это в (11), получим уравнение для функции $F(z)$:

$$FF'' + (F')^2 - \frac{l(l+1)}{z^2} FF' = 0, \quad (15)$$

штрих означает производную по z . Решение (15), конечное при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$F^2(z) = C_1 \left[ze^{\frac{l(l+1)}{z}} + l(l+1) \cdot Ei\left(-\frac{l(l+1)}{z}\right) \right] + C_2, \quad (16)$$

где $C_{1,2}$ – постоянные. При этом выражение для метрического коэффициента в (10) имеет вид ($C_2 = 0$)

$$e^\alpha = \frac{c}{2\omega r} \left[1 + \frac{r_c}{r} e^{r_c/r} Ei\left(-\frac{r_c}{r}\right) \right]^{-1}, \quad (17)$$

$$r_c = \frac{l(l+1)c}{\omega}.$$

Вычислим действие для (16) в искривленном пространстве–времени [1]:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} \sqrt{-g} d\Omega; \quad (18)$$

$$d\Omega = dx^1 dx^2 dx^3;$$

$$\sqrt{-g} = r^2 e^{\beta(\theta)} \sin \theta.$$

Переходя к действию в псевдоевклидовом пространстве $A = iS_f$, $dx^0 = -idy^0$, а также учитывая нормировку $\Phi(\theta)$ [3], получим (для $\beta = 0$):

$$\Lambda(r_0) = \frac{C_1}{4\omega(2l+1)} \times \int_0^{r_0} \left[\frac{\omega}{cr^2} \int_0^r e^{-r_c/r} dr + \frac{1}{r_c^2} e^{-r_c/r} \right] dr. \quad (19)$$

Постоянная $C_1 > 0$, поскольку $\Lambda > 0$. На рис. 1 показана зависимость $\Lambda(r_0)$ от размера r_0 инстантона.

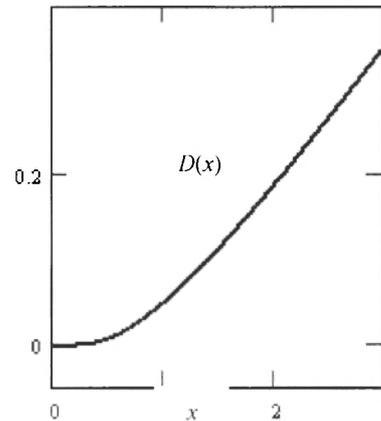


Рис. 1. Зависимость величины евклидова действия Λ от размера инстантона r_0 . $D(x) = \Lambda(x)/(C_1/4c)$ – безразмерное действие; $x = r_0/r_c$ – безразмерное расстояние; $l = 1$

Исследуем поведение геодезических. Для этого перепишем уравнение для интервала (2), полагая $d\theta = d\varphi = 0$:

$$ds^2 = e^{-\alpha} c^2 dt^2 - e^\alpha dr^2 = 0. \quad (20)$$

Подставляя значение $e^\alpha = \exp(r_c/r)$, находим уравнения геодезических:

$$t = \pm \frac{1}{c} \int_0^r e^{r_c/r} dr. \quad (21)$$

На рис. 2 показаны решения этого уравнения. Ввиду того что подынтегральная функция сингулярна при $r = 0$, при вычислении интеграла постоянный предел полагался равным некоторой малой величине $b \neq 0$. В приведенном на рис. 2 случае $b = 0.15$. Это сказывается на поведении кривых, изображенных на рисунке. Производные dr/dt на обеих ветвях «светового конуса» обращаются в нуль при $r = 0$, что является результатом искривления пространства–времени под действием собственного гравитационного поля ЭМВ. По часам удаленного наблюдателя лучу требуется бесконечное время для дости-

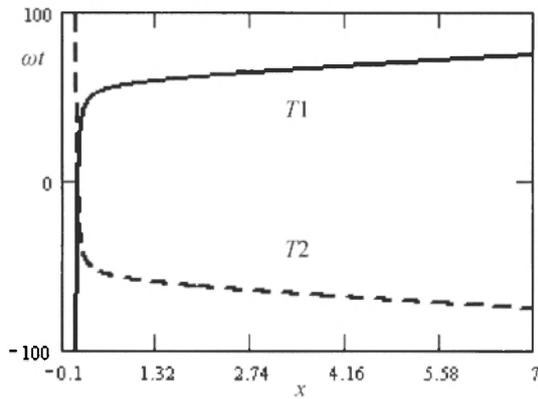


Рис. 2. Геодезические (траектории световых лучей). $T_i = \omega t$, $x = r/r_c$, $i = 1$ (сплошная кривая) соответствует знаку «+», $i = 2$ (пунктирная кривая) – знаку «-» в формуле (21); $l = 1$. Ось ординат проведена через $x = -0.1$.

жения точки $r=0$ за исключением случая $l=0$, когда геодезические имеют вид $t = \pm r/c$. Это выражается в том, что интеграл (21) расходится, а две ветви (21) уходят в бесконечность при $b \rightarrow 0$.

Таким образом, геометрия пространства–времени, получаемая из исследования поведения сферических ЭМВ, отличается от геометрии плоского пространства–времени, построенной с помощью плоских ЭМВ. Кроме того, использование решений (1) инстантонного типа позволит по-новому трактовать процесс преобразования сходящейся сферической ЭМВ в расходящуюся. Действительно, сходящаяся ЭМВ может перейти в расходящуюся за конечное время для $l \neq 0$ только при условии, что при каком-то значении r_0 она перейдет в инстантонное состояние с вероятностью $\sim \exp(-\Lambda_0 / \hbar)$ (\hbar – постоянная Планка, $\Lambda_0 = \Lambda(r_0)$), чтобы затем перейти в расходящуюся ЭМВ. Это, в свою очередь, означает, что информация из сферы радиусом r_0 не передается из прошлого в будущее.

Исследование решений с $l = 0$

Рассмотрим решения уравнений Максвелла–Эйнштейна, или, точнее, Максвелла для $l = 0$, поскольку, как было сказано, такие решения не искривляют пространство–время и, следовательно, могут быть описаны только с помощью последних. Как легко показать, они имеют вид для E -волны:

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{i\omega q}{cr} \operatorname{ctg}\theta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)}, \\ H_\varphi &= \pm \frac{i\omega q}{cr} \operatorname{ctg}\theta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)}, \\ E_r &= \frac{q}{r^2} e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где q – постоянная, знаки \pm в экспоненте соответствуют сходящейся и расходящейся волне. Соответствующие решения для M -волны получаются заменой $E \rightarrow -H$, $H \rightarrow E$ [7].

Отметим некоторые особенности решений уравнений Максвелла (22) в контексте настоящей статьи. В традиционной электродинамике, рассматривающей конечные области пространства без источников, постоянную q в (22) полагают равной нулю [4]. Если же применять уравнения Максвелла к Вселенной в целом, то, во-первых, приходится отказаться от условия излучения [4], согласно которому на бесконечности присутствуют только расходящиеся волны. Во-вторых, сходящиеся волны могут играть роль источников для расходящихся волн, и поэтому постоянная $q \neq 0$ в (22). Ее значение можно связать со спектральной плотностью энергии излучения, приходящего из Вселенной. В общем случае к правым частям (22) можно добавить слагаемые вида

$$\frac{p}{\operatorname{Sin}\theta} e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)},$$

где p – постоянная. Ниже мы ограничимся рассмотрением решений (22) для $p = 0$. Решения (22) описывают состояния электромагнитного поля, обладающие только спиновым моментом импульса, имеющим проекцию на ось z , $s_z = 0$. Как отмечается в [8, с.32], разделение момента фотона на орбитальный и спиновый лишено физического смысла. Это связано с тем, что для фотонов в отличие от массивных частиц невозможно отделить спиновые степени свободы от орбитальных⁴.

⁴ Для электронов, например, влияние спина проявляется в разложении решений уравнений Дирака по степеням c^{-1} (c – скорость света) в членах порядка не ниже первого. В нулевом порядке, соответствующем пределу $c \rightarrow \infty$, уравнение Дирака переходит в уравнение Шредингера, не учитывающее влияние спина [8, с.144]. Уравнения Максвелла сами по себе первого порядка по c^{-1} .



С точки зрения симметрии по отношению к вращениям решения (22), соответствующие, как уже было сказано, значению $l = 0$, характеризуются значением $j = 1$, определяющим полный момент $J: J^2 = j(j + 1)^2$. Проекция спина фотона s на направление его импульса, т.е. спиральность, $\lambda = \pm 1$ [8]. Отсюда, а также из условия $s_r = 0$, следует, что (22) соответствует фотонам, импульс которых нормален к выбранной оси z .

Чтобы лучше понять свойства решений (22) и, в частности, вычислить постоянную q , входящую в них, воспользуемся методом эквивалентных источников [7]. Применяя последовательно к первому и второму уравнениям (22) теоремы Гаусса и Стокса [3], получим выражения для линейной плотности заряда и тока эквивалентных источников. Ниже приведено выражение для распределения тока $I(\rho, z)$ (выражение для плотности заряда не приводится ввиду его громоздкости):

$$I(\rho, z) = \mp \frac{i\omega q}{2} \frac{z}{r} e^{i\omega \left(\frac{r+z}{c} \right)}, \quad r = \sqrt{z^2 + \rho^2}, \quad (23)$$

где ρ и z – цилиндрические координаты. Распределение имеет цилиндрическую симметрию, что демонстрирует часто встречающееся явление – спонтанное нарушение симметрии исходной задачи, имеющей сферическую симметрию. Это свойство позволяет при вычислении потока энергии сходящейся или расходящейся волны учитывать только часть потока, нормальную полярной оси z , что обеспечивает сходимость соответствующего выражения. Используем выражение для вектора Умова–Пойнтинга \mathcal{S} [1]:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*],$$

$$S_r = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_\theta H_\phi^*).$$

Подставляя сюда выражения для E_θ и H_ϕ из (22) и выполняя интегрирование по поверхности сферы радиуса r с учетом сказанного выше, получим выражение для среднего потока мощности, падающего на эквивалентный источник (или излучаемого им),

⁵ Это следует из связи $l = j \pm 1$ для фотонов электрического типа [8, с.35].

$$\langle S_n \rangle = \langle S_r \cdot \sin \theta \rangle = \frac{\omega^2 |q|^2 \pi}{8c}, \quad (24)$$

откуда можно определить величину q с точностью до фазы.

Статический случай $\omega = 0$ требует особого рассмотрения. Последнее уравнение в (22) описывает электрическое поле точечного заряда q в вакууме. Это свойство уравнений Максвелла является неожиданным, хотя и укладывается в концепцию, выраженную словами А. Эйнштейна: «I feel that it is a delusion to think of the electrons and the fields as two physically different, independent entities. Since neither can exist without the other, there is only one reality to be described, which happens to have two different aspects; and the theory ought to recognize this from the start instead of doing things twice» [9, с.32]. Оно не противоречит сути задачи, так как плотности заряда (но не заряд) и тока в вакууме по прежнему равны нулю. Трудности, связанные с решениями (22), связаны с их интерпретацией. Интересно, что те же трудности для волны M -типа, связанные с понятием магнитных зарядов, разрешаются (или обходятся) тем, что предполагают существование последних в недоступных областях Вселенной [10].

Покажем, что в рамках концепции Эйнштейна⁶ отсутствие в природе магнитных зарядов имеет принципиальное значение и связано, в частности, с отсутствием массы у фотонов. Рассмотренное выше преобразование полей $E \rightarrow -H, H \rightarrow E$ является частным случаем инвариантности уравнений Максвелла в вакууме относительно непрерывной группы $U(1)$ «дуальной симметрии»: $(E + iH) \rightarrow (E + iH)^{i\alpha}$, где α – вещественный параметр [10]. В теории, описывающей взаимодействие электромагнитного поля с другим полем, соответствующим заряженным частицам, например лептонам, эта симметрия нарушается. Но там отсутствие массы у фотонов является следствием калибровочной

⁶ Она носит название «полевого монизма» в отличие от традиционной концепции «корпускулярно-полевого дуализма» и согласуется с основным принципом, управляющим любым исследованием окружающего мира, получившим название «принципа экономии при образовании понятий» [12].



инвариантности лагранжиана взаимодействия [11]⁷. Здесь ситуация иная, поскольку «заряды» q не являются внешними по отношению к электромагнитному полю и привлекать калибровочную группу для описания их взаимодействия с полем нет необходимости, так как и самого взаимодействия нет. Ее роль в доказательстве равенства нулю массы фотона играет дуальная группа. Симметрия дуальной группы распространяется также и на «заряды» q в (22) – электрический, обозначим его e , и магнитный – m , которые должны преобразовываться как $(e + im) \rightarrow (e + im)^{im}$. Отсутствие магнитного заряда связано со спонтанным нарушением симметрии дуальной группы, при котором $iga \approx -m/e$. Как всегда, в соответствии с теоремой Голдстоуна, это приводит к появлению безмассовых частиц – фотонов. В квантовой теории доказывается, что $iga \approx -137n/2$, n – целое, $a \approx -\pi/2$.

Следует отметить, что приведенные рассуждения сохраняют силу и в рамках традиционной концепции корпускулярно-полевого дуализма. Однако в этом случае связь полученного результата с равенством нулю массы фотона уже не столь убедительна.

Обсуждение результатов

Обсудим следствия, вытекающие из полученных результатов. Рассмотрим прежде всего их отношение к так называемому Космологическому принципу (КП) [13], лежащему в основе Стандартной модели строения Вселенной. Под последним понимают, что Вселенная в больших масштабах однородна и изотропна. Явным свидетельством этого является высокая изотропность реликтового излучения. Специалисты отмечают неоднозначность КП в том смысле, что неизвестно, какой была Вселенная в разные моменты времени и выполнялся ли КП всегда. При этом обходится стороной вопрос о том, говорится ли в КП о *действительном* или только *кажущемся* состоянии Вселенной, хотя здесь тоже заключена неоднозначность, но, скорее,

⁷ Может показаться, что если бы не было лептонов или других заряженных частиц, масса фотонов могла бы отличаться от нуля.

понятийная или терминологическая. Полученный результат устраняет эту последнюю неоднозначность. Какой бы ни была Вселенная на разных этапах своего развития, казаться она всегда будет изотропной и, следовательно, однородной, поскольку неизотропная часть излучения, характеризующаяся ненулевыми значениями орбитального момента, никогда не дойдет до нас⁸.

То, что гравитационный эффект ЭМВ связан с отклонением от изотропии было известно ранее. Так, в [2] рассматривался случай слабых гравитационных полей, создаваемых ограниченными по длине пучками света. Используя эти результаты, можно получить распределение скоростей пучков вблизи опорного пучка, скорость которого принимается за 1 (скорость света c положена равной 1). Используем выражение для интервала ds вблизи опорного пучка, распространяющегося вдоль оси x [2]:

$$ds^2 = -(1 - h_{11})dx^2 - dy^2 - dz^2 + (1 + h_{11})dt^2 - 2h_{11}dxdt, \quad (25)$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Здесь $h_{\mu\nu}$ – поправка к галилеевскому метрическому тензору $\delta_{\mu\nu}$ плоского пространства–времени. Для световых пучков $ds^2 = 0$. Делим ds^2 в (25) на dt^2 и получаем уравнение для скоростей пробных пучков вблизи опорного пучка:

$$(1 - h_{11})v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2h_{11}v_x = 1 + h_{11}, \quad (26)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 0,$$

которое, в свою очередь, можно представить в виде

$$\left(\frac{v_x + h_{11}a}{a}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{\sqrt{a}}\right)^2 = 1, \quad (27)$$

$$a = \frac{1}{1 - h_{11}}.$$

⁸ Дипольная составляющая решений (22) не противоречит дипольному распределению реликтового излучения, которое действительно наблюдается и связано с движением наблюдателя относительно реликтового фона, приводя к характерной зависимости температуры реликтового излучения от направления.



Из (27) видно, что сферически симметричное распределение скоростей пробных пучков, соответствующее сферическому фронту волны, имеет место только при $h_{11} = 0$, что отвечает отсутствию гравитации.

Из сказанного выше следует, что Вселенная с точки зрения передачи информации выглядит как линия передачи с шумами, требующая бесконечного времени для полной передачи информации.

Имеет смысл также поставить вопрос о связи двух определений постоянной q в (22). Если такая связь существует, то она означает связь между двумя фундаментальными явлениями – потоком фонового излучения из Вселенной и интенсивностью электромагнитного взаимодействия, зависящей от величины элементарного заряда. Это соображение можно обосновать тем, что появление микроволнового фона произошло в результате рекомбинации и перехода Вселенной из плазменного состояния в атомное, обеспечивших ее прозрачность.

Автор благодарит С.А. Смолянского и М.В. Давидовича за обсуждение результатов работы.

УДК 530.145.61: 530.182

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

А.Г. Лазерсон, А.А. Бойков

Саратовский государственный университет
E-mail: tmf@sgu.ru

Рассмотрена сложная динамика квантовой системы «частица в прямоугольной яме с колеблющимся дном». Показано, что анализ временных зависимостей наблюдаемых позволяет выяснить, является ли динамика регулярной или хаотической. В качестве иллюстрации представлены результаты анализа временных зависимостей для средней по ансамблю энергии. Обнаружено, что с ростом амплитуды внешнего воздействия спектр интенсивности наблюдаемой демонстрирует свойства, характерные для спектра случайного процесса, что можно интерпретировать как хаотизацию динамики.

Ключевые слова: динамический хаос, квантовый хаос, квантовый осциллятор.

Dynamical Chaos in Quantum Systems

A.G. Lazerson, A.A. Boikov

Complex dynamics of a quantum periodically driven square well is considered. It is shown that analysis of its ensemble average energy time series provides an identification of its dynamics to be either

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология / Пер. с англ.; Под ред. Я.А. Смородинского. М.: Наука, 1974. 520 с.
3. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
4. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1966. 376 с.
5. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Пер. с англ.; Под ред. О.А. Хрусталева. М.: Мир, 1985. 414 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 678 с.
7. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.
8. Carver A. Mead. Collective Electrodynamics I // Feynmann and Computation. Exploring the Limits of Computers / Ed. by A.J.G. Hey. Massachusetts: Perseus Books, Reading, 1998. 438 p.
9. Долгов А.Д. Магнитный монополю // Физическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1990. Т.2. С.687–688.
10. Берестецкий В.Б. Проблемы физики элементарных частиц. М.: Наука, 1979. 256 с.
11. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1968. 480 с.
12. Неванлинна Р. Пространство, время и относительность / Пер. с нем. Г.А. Вольперта; Под ред. И.М. Яглома. М.: Мир, 1966. 231 с.
13. Вайнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной / Пер. с англ.; Под ред. Я.Б. Зельдовича. М.: Энергоатомиздат, 1981. 209 с.



regular or chaotic. It has been found that enhancement of the driving force causes the energy spectrum to look like a spectrum of some random process, which may be identified as the signature of chaos in a quantum system.

Key words: dynamical chaos, quantum chaos, quantum oscillator.

Введение

Известно, что модели квантовых неавтономных гамильтоновых систем являются объектом чрезвычайно интенсивного изучения в теории квантового хаоса [1–17]. С одним из самых простых примеров таких систем мы встречаемся при исследовании движения частицы в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме под действием внешнего монохроматического по-