



ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 535.36:51.73:681.785.57

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ЗОНДИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НИЗКОКОГЕРЕНТНОЙ РЕФЛЕКТОМЕТРИИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Д. А. Зимняков, М. В. Алонова, С. А. Ювченко, Е. В. Ушакова

Зимняков Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.; главный научный сотрудник лаборатории проблем лазерной диагностики технических и живых систем, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), zimnyakov@mail.ru

Алонова Марина Васильевна, ассистент кафедры физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.; инженер-исследователь лаборатории проблем лазерной диагностики технических и живых систем, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), alonova_marina@mail.ru

Ювченко Сергей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.; научный сотрудник лаборатории проблем лазерной диагностики технических и живых систем, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), yuv-sergej@yandex.ru

Ушакова Екатерина Владимировна, магистрант кафедры физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., katushakova96@yandex.ru

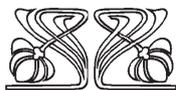
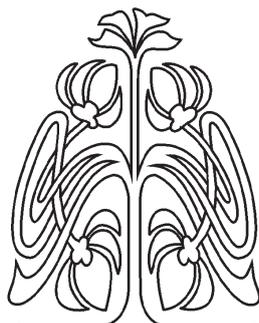
Разработана математическая модель, описывающая статистические свойства пространственных флуктуаций многократно рассеянного узкополосного излучения, получаемого в результате спектральной селекции флуоресценции случайно-неоднородной среды, накачиваемой непрерывным лазерным излучением. Модель предназначена для количественной интерпретации экспериментальных данных, получаемых с использованием безопорного низкокогерентного рефлектометрического зондирования случайно-неоднородных сред. В данной модели в качестве зондирующего излучения используется излучение флуоресценции среды при её возбуждении непрерывным лазерным излучением. Показано существование универсальной взаимосвязи между универсальными параметрами, вводимыми в модели и характеризующими перенос зондирующего излучения в среде в условиях спектральной селекции. Представленные экспериментальные данные подтверждают адекватность разработанной модели.

Ключевые слова: низкокогерентная рефлектометрия, стохастическая интерференция, математическое моделирование переноса излучения.

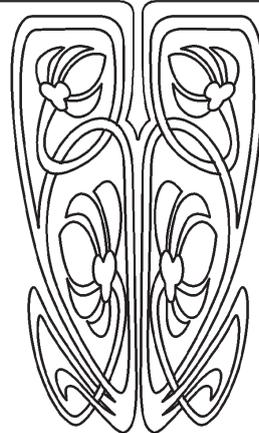
DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-4-15

Введение

В настоящее время одним из перспективных направлений в оптической диагностике объектов со сложной случайно-неоднородной структурой является применение в качестве зондирующего излучения света с длиной когерентности, сравнимой с характерными масштабами неоднородности объекта. Одним из наиболее ярких



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





примеров использования подобного подхода является оптическая когерентная томография (ОКТ), впервые предложенная в качестве диагностического метода для биомедицинских применений в девяностых годах прошлого века [1–3] и в настоящее время являющаяся одним из наиболее востребованных подходов в диагностике морфофункционального состояния поверхностных слоев биологических тканей. Применение ОКТ не ограничивается только биомедициной; известны работы, посвященные материаловедческим применениям данного метода (в частности, для анализа материалов с выраженной стратифицированной структурой [4–7]). Основной физической принцип функционирования ОКТ систем, заключающийся в использовании зондируемого объекта в качестве отражателя в объектном плече интерферометра Майкельсона с источником частично-когерентного излучения и периодическим изменением оптической длины опорного плеча, в последнее время претерпел существенные изменения в части формирования интерференционного сигнала и его обработки. Это относится, в частности, к недавно появившимся ОКТ системам с лазерными источниками с периодически варьируемой частотой зондирующего излучения (см.: Swept Source OCT [8, 9]). Тем не менее физическая интерпретация формируемых в подобных системах интерференционных сигналов осталась прежней.

Традиционно в оптической когерентной томографии и аналогичных методах информативная составляющая регистрируемого сигнала связана с так называемой баллистической, или когерентной, составляющей зондирующего излучения, поступающей из зондируемого объекта в приемную апертуру системы. Эта составляющая обусловлена, как правило, френелевскими отражениями от границ слоев с различными показателями преломления в объекте. При этом диффузная составляющая регистрируемого сигнала, обусловленная многократным рассеянием света в объекте, играет негативную роль и приводит к спаду отношения «сигнал–шум» по мере увеличения глубины зондирования. Другим негативным фактором, обусловленным многократным рассеянием зондирующего света в среде, является стохастическая интерференция диффузно-рассеянных волн, распространяющихся по различным случайным траекториям в среде с различающимися длинами пути, но при этом попадающих в «окно когерентности» системы. Поскольку ширина «окна когерентно-

сти» существенно превышает среднее значение длины волны зондирующего излучения, а число статистически независимых парциальных составляющих диффузно-рассеянного света очень велико, это приводит к стохастической модуляции регистрируемого интерференционного сигнала. Значительное количество работ в последние два десятилетия были посвящены проблеме подавления стохастического шума в ОКТ изображениях; рассматривались различные решения, начиная от тривиальной усредняющей обработки интерференционного сигнала и заканчивая применением скользящих оконных фильтров различной степени сложности [10–12].

Вместе с тем следует отметить, что несмотря на негативную роль диффузных составляющих выходящего из среды зондирующего излучения в «классической» оптической когерентной томографии, эти составляющие содержат полезную информацию об оптических транспортных параметрах зондируемой среды, а также о некоторых процессах при взаимодействии света со средой (например, о спонтанном усилении распространяющегося света во флуоресцирующих средах). Возможность получения подобной информации из анализа «шумовых» составляющих сигналов в низкокогерентной рефлектометрии (НКР) случайно-неоднородных сред показана в работах [13–16], где рассмотрены два различных подхода к реализации «диффузионной» НКР – с применением классической интерференционной схемы с опорным и объектным пучками и с использованием принципа безопорной стохастической интерферометрии со спектральной селекцией широкополосного излучения флуоресценции, которое используется в качестве зондирующего.

Важной составляющей НКР зондирования случайно-неоднородных сред является установление количественных взаимосвязей между параметрами регистрируемых сигналов и характеристиками среды, контролирующими процесс распространения зондирующего излучения (в частности, ее оптическими параметрами). Подобные взаимосвязи, выраженные в аналитической или численной форме, используются в решении прямых или обратных задач НКР зондирования и в качестве ключевых составляющих содержат интегральные преобразования функции плотности вероятности оптических путей зондирующего излучения в среде $\rho(s)$ либо саму функцию, в зависимости от того, какие характеристики рассеянного светового поля



анализируются (средняя интенсивность, функция когерентности, функция корреляции и т.д.). Эта функция, ассоциируемая с временным откликом среды при воздействии короткого светового импульса для заданной геометрии зондирования [17], может быть получена путем решения нестационарного уравнения переноса излучения [18]. В большинстве случаев это решение не может быть получено в аналитической форме и требует применения численных методов; в частности, одним из наиболее эффективных методов решения подобных задач является метод статистического моделирования (Монте–Карло). С другой стороны, такие информативные характеристики, измеряемые при НКР или спекл-коррелометрическом зондировании [19, 20], как пространственные и временные корреляционные функции, а также статистические моменты флуктуаций интенсивности детектируемого излучения связаны с $\rho(s)$ линейными интегральными преобразованиями с соответствующим образом выбранными ядрами (см., например, [21, 22]). Подобная взаимосвязь следует из фундаментальных соотношений между характеристиками переноса излучения в среде, вводимыми в рамках теории переноса излучения, и статистическими и корреляционными характеристиками светового поля, используемыми в аналитической теории многократного рассеяния [18].

Таким образом, решение прямой задачи НКР или спекл-корреляционного зондирования (нахождение информативных характеристик детектируемого излучения по априори известным оптическим и геометрическим параметрам среды) может быть осуществлено с применением «гибридного» подхода. В данном подходе с помощью метода Монте–Карло моделируется ансамбль значений оптических путей составляющих зондирующего излучения в среде; производится частотный анализ этого ансамбля, на основании которого восстанавливается модельная функция $\rho(s)$ для исследуемой системы; вычисляются интегральные преобразования функции $\rho(s)$ при различных значениях управляющих параметров, используемых в зондировании. Результаты численного моделирования затем сопоставляются с полученными экспериментальными данными. Для решения обратной задачи (восстановление значений оптических параметров среды по измеренным в эксперименте информативным характеристикам детектируемого излучения) может быть применен инверсный гибридный подход, в котором задаются начальные значения

оптических параметров, по ним вычисляются информативные характеристики и сравниваются с полученными в эксперименте данными. По результатам сравнения производится коррекция начальных значений, после чего цикл повторяется. После определенного числа итераций достигается требуемая точность восстановления оптических параметров; подобная итеративная процедура может основываться на численных методах Ньютона, Левенберга–Марквардта (см., например, [23]) и др.

В данной работе упомянутый выше гибридный подход обсуждается применительно к безопорной низкокогерентной рефлектометрии случайно-неоднородных сред, использующей в своей основе эффект стохастической интерференции спектрально селективируемого широкополосного зондирующего излучения.

1. Математическая модель стохастической интерференции спектрально селективируемого излучения в безопорном НКР зондировании

Схема безопорного НКР зондирования, физические основы которой обсуждались в работах [14–16], приведена на рис. 1. Зондируемая среда насыщается флуорофором с достаточно высоким квантовым выходом флуоресценции и накачивается непрерывным лазерным излучением. Используемое в качестве зондирующего флуоресцентное излучение регистрируется с помощью конфокальной системы и попадает на входную щель спектрометра с заданным спектральным разрешением $\Delta\lambda$. В процессе измерений производится сканирование зондируемого образца в направлении, перпендикулярном оси конфокальной системы. Вследствие высокой спектральной селективности и малой угловой апертуры системы детектирования регистрируемые диффузные составляющие интерферируют друг с другом на детекторе, давая в результате некоторое значение интенсивности интерференционного сигнала на длине волны λ , определяемой настройкой спектрометра, в спектральной полосе $\Delta\lambda$. Поперечное смещение образца приводит к случайным изменениям интенсивности на детекторе, которые связаны со стохастической интерференцией рассеянного средой зондирующего излучения в узкой полосе длин волн. В качестве информативных параметров могут быть выбраны статистические моменты различных порядков пространственных флуктуаций интенсивности, регистрируемых в ходе эксперимента.

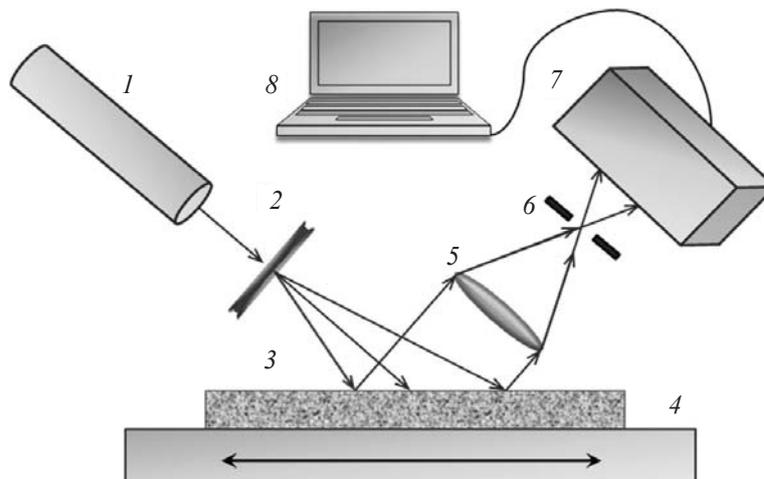


Рис. 1. Схема безопорного НКР зондирования с использованием эффекта стохастической интерференции спектрально селектуемых диффузных составляющих широкополосного излучения флуоресценции: 1 – лазер накачки, 2 и 5 – система линз, 3 – зондируемая среда, насыщенная флуорофором; 4 – однокоординатный микропозиционер, 6 – входная щель спектрометра, 7 – спектрометр, 8 – персональный компьютер

Fig. 1. Scheme of the reference-free low-coherence probe with the use of a stochastic interference of spectrally selected diffusing components of a broadband fluorescence radiation: 1 – pumping laser, 2, 5 – lenses, 3 – dye-saturated probed medium, 4 – 1D translator, 6 – entrance slit of a spectrometer, 7 – spectrometer, 8 – PC

Рассмотрим следующую модель формирования детектируемого сигнала: измеряемое значение интенсивности при фиксированном положении образца есть результат суперпозиции N квазимонохроматических световых волн с длинами волн, находящимися в интервале от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, причем $\Delta\lambda \ll \lambda$. Рассмотрим вначале случай детектирования «скалярных» волн, предполагая регистрируемые диффузные составляющие характеризуемыми одинаковыми состояниями линейной поляризации. Правомерность применения подобного подхода была ранее неоднократно подтверждена [13–16]. Полученные в рамках подобной модели выражения могут быть модифицированы для случая детектирования неполяризованного света. Усредненное по времени значение интенсивности для произвольно выбранной точки регистрации сигнала представим как

$$\overline{I(t)} = \overline{E(t)E^*(t)} = \overline{|E(t)|^2} = \overline{\left| \sum_i^N E_i(t) \exp\{j\varphi_i(t)\} \right|^2}, \quad (1)$$

где усреднение проводится по временному интервалу T , удовлетворяющему условию $T \gg 2\pi/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – ширина спектра детектируемого излучения, $E_i(t) = \sqrt{I_i(t)}$ и $\varphi_i(t)$ – зависящие от

времени амплитуда и фаза i -й диффузной составляющей ($E_i(t)$ – неотрицательная величина, а $I_i(t)$ – медленно изменяющаяся интенсивность соответствующей диффузной составляющей). Фазовый член $\varphi_i(t)$ может быть представлен в виде: $\varphi_i(t) = \bar{\omega}t - ks_i + \phi(t - ks_i/\bar{\omega})$, где $\bar{\omega}$ – среднее значение частоты регистрируемых волн, k – волновое число излучения, распространяющегося в среде, s_i – путь в среде, проходимый i -й диффузной составляющей от источника до детектора, $\phi(t)$ – флуктуационная составляющая фазы, обусловленная конечной шириной спектра регистрируемого излучения. Уравнение (1) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\overline{I(t)} = \overline{\sum_i^N I_i(t) + \sum_i^N \sum_{i' \neq i}^N \sqrt{I_i(t)} \sqrt{I_{i'}(t)} \cos[k(s_i - s_{i'}) + \Delta\phi(t, s_i - s_{i'})]}, \quad (2)$$

где введено обозначение

$$\Delta\phi(t, s_i - s_{i'}) = \phi(t - ks_i/\bar{\omega}) - \phi(t - ks_{i'}/\bar{\omega}).$$

С использованием предположения о статистической независимости интерферирующих диффузных составляющих выражение (2) можно представить как



$$\overline{I(t)} = I = \sum_i^N E_{0i}^2 + \sum_i^N \sum_{i'}^N E_{0i} E_{0i'} \cos\{k(s_i - s_{i'})\} |g(s_i - s_{i'})|, \quad (3)$$

где $g(s_i - s_{i'})$ – функция когерентности регистрируемого излучения, определяемая формой и шириной его спектра. В общем виде функция когерентности является комплексной и рассчитывается из следующих соотношений (о взаимосвязи функции когерентности и спектральной плотности излучения см., например, [24]):

$$\begin{aligned} s_i - s_{i'} &= vt; \\ \Omega &= \omega - \bar{\omega}; \\ a(t) &= \frac{\int_0^\infty I(\Omega) \cos \Omega t d\Omega}{\int_0^\infty I(\Omega) d\omega}, \\ b(t) &= \frac{\int_0^\infty I(\Omega) \sin \Omega t d\Omega}{\int_0^\infty I(\Omega) d\omega}, \\ |g(t)| &= \sqrt{a^2 + b^2(t)}, \\ \psi(t) &= \arctg \frac{b(t)}{a(t)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где v – фазовая скорость света в среде (дисперсия среды предполагается несущественной), $\bar{\omega}$ – средняя частота в спектре, $I(\Omega)$ – спектральная плотность излучения, $|g(t)|$ и $\psi(t)$ – соответственно модуль и аргумент функции когерентности.

Рассмотрим далее статистические моменты второго и третьего порядка флуктуаций интенсивности детектируемого излучения, обусловленных переходами между различными точками детектирования, полагая при этом зондируемую систему эргодической; знак $\langle \rangle$ используем для усреднения величин по ансамблю:

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_i^N E_{0i}^2 + \sum_i^N \sum_{i'}^N E_{0i} E_{0i'} \cos\{k(s_i - s_{i'})\} |g(s_i - s_{i'})| \right)^2 \right\rangle, \\ \langle I^3 \rangle &= \left\langle \left(\sum_i^N E_{0i}^2 + \sum_i^N \sum_{i'}^N E_{0i} E_{0i'} \cos\{k(s_i - s_{i'})\} |g(s_i - s_{i'})| \right)^3 \right\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

Без нарушения общности, полагая амплитуды интерферирующих волн одинаковыми и равными 1 и вводя обозначение $\Delta s_{i'} = s_i - s_{i'}$, представим (5) как

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \left\langle \left(N + 2 \sum_m^{N(N-1)/2} \cos(k\Delta s_m) |g(\Delta s_m)| \right)^2 \right\rangle, \\ \langle I^3 \rangle &= \left\langle \left(N + 2 \sum_m^{N(N-1)/2} \cos(k\Delta s_m) |g(\Delta s_m)| \right)^3 \right\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

где индекс m соответствует разности $i - i'$.

Допущение об одинаковых значениях амплитуд интерферирующих волн, равных 1, представляется правомерным в силу следующих соображений:

- при суммировании большого числа статистически независимых слагаемых статистические свойства сумм определяются центральной предельной теоремой и не зависят от распределений суммируемых величин; при этом математическое ожидание и дисперсия суммы равны соответственно суммам математических ожиданий и дисперсий слагаемых; в связи с этим вместо реальных распределений амплитуд интерферирующих волн могут быть рассмотрены одинаковые детерминированные величины;

- в дальнейшем анализе рассматриваются нормированные на соответствующие степени $\langle I \rangle$ статистические моменты флуктуаций интенсивности ($\langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ и $\langle I^3 \rangle / \langle I \rangle^3$), что позволяет принять значения амплитуды интерферирующих волн равными 1.

В дальнейшем рассмотрим следующую форму функции когерентности, соответствующую спектральной фильтрации широкополосного излучения узким прямоугольным спектральным окном:

$$g\left(\frac{\Delta s}{l_c}\right) = \frac{\sin(\pi \Delta s / l_c)}{\pi \Delta s / l_c}. \quad (7)$$

Здесь l_c – длина когерентности спектрально селектируемого широкополосного излучения ($l_c \approx \lambda^2 / \Delta \lambda$, где λ – длина волны, соответствующая центру спектрального окна, $\Delta \lambda$ – его ширина); форма функции когерентности, определяемая выражением (7), непосредственно следует из выражений (4).

Проводя преобразования выражений (6), переходя от дискретного распределения Δs_m к непрерывному при $N \rightarrow \infty$ и рассматривая нормированные значения статистических моментов $M_2 = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ и $M_3 = \langle I^3 \rangle / \langle I \rangle^3$, получим:



$$\begin{aligned}
 M_2 &= 1 + \frac{N-1}{N} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) \approx 1 + \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s), \\
 M_3 &= 1 + 3 \frac{N-1}{N} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) + 2 \frac{(N-1)^2}{N^2} \left(\int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3 \approx \\
 &\approx 1 + 3 \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) + 2 \left(\int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\rho(\Delta s)$ – функция плотности вероятности значений разностей оптических путей диффузных составляющих детектируемого излучения в среде.

Полученные выражения соответствуют интерференции «скалярных» волн; в эксперименте подобный режим может быть реализован путем поляризационной дискриминации рассеянного неполяризованного света с использованием поля-

ризатора. Отметим, что в данном случае максимальные значения нормированных статистических моментов, достигаемые в случае $l_c \rightarrow \infty$ или $\Delta s \rightarrow 0$, равны соответственно 2 и 6. В случае детектирования неполяризованного света, рассматриваемого как некогерентная смесь ортогонально поляризованных диффузных составляющих с одинаковыми значениями интенсивности, выражения (8) должны быть модифицированы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \langle I \rangle &= 2 \langle I_{\perp, \parallel} \rangle, \\
 \langle I^2 \rangle &= \langle (I_{\perp} + I_{\parallel})^2 \rangle = \langle I_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle I_{\perp} \rangle \langle I_{\parallel} \rangle + \langle I_{\parallel}^2 \rangle, \\
 \langle I^3 \rangle &= \langle (I_{\perp} + I_{\parallel})^3 \rangle = \langle I_{\perp}^3 \rangle + 3 \langle I_{\perp}^2 \rangle \langle I_{\parallel} \rangle + 3 \langle I_{\perp} \rangle \langle I_{\parallel}^2 \rangle + \langle I_{\parallel}^3 \rangle.
 \end{aligned} \tag{9}$$

При этом имеет место равенство статистических моментов для двух ортогональных состояний поляризации. Это позволяет получить:

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \frac{1}{2} \frac{\langle I_{\perp, \parallel}^2 \rangle}{\langle I_{\perp, \parallel} \rangle^2} + \frac{1}{2}, \\
 M_3 &= \frac{1}{4} \frac{\langle I_{\perp, \parallel}^3 \rangle}{\langle I_{\perp, \parallel} \rangle^3} + \frac{3}{4} \frac{\langle I_{\perp, \parallel}^2 \rangle}{\langle I_{\perp, \parallel} \rangle^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Соответственно выражения (8) при детектировании неполяризованного света преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 M_2 &\approx 1 + \frac{1}{2} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s), \\
 M_3 &\approx 1 + \frac{3}{2} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, предельные значения статистических моментов в данном случае равны 1.5 и 3.0.

2. Статистическое моделирование переноса диффузных составляющих в случайно-неоднородной среде

Таким образом, как в случае детектирования поляризованного излучения, так и в случае неполяризованного света, нормированные значения статистических моментов флуктуаций интенсивности, рассматриваемые в безопорной НКР случайно-неоднородных сред как информативные параметры, выражаются в приближенной аналитической форме как линейные комбинации несобственного интеграла $\int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s)$ и куба несобственного интеграла $\int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s)$. Данные конструкции по сути представляют собой интегральные преобразования функции плотности вероятности разностей путей диффузных составляющих в среде с ядрами, равными $|g(\Delta s)|^2$ и $|g(\Delta s)|$. Для определения функции $\rho(\Delta s)$ можно воспользоваться тем обстоятельством, что случайная величина Δs представляет собой разность двух статистически независимых случайных величин s_i и $s_{i'}$, каждая из которых характеризуется



функцией плотности вероятности $\rho(s)$ (см. введение). Это позволяет нам выразить $\rho(\Delta s)$ следующим образом:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} \rho(s + \Delta s) \rho(\Delta s) ds, \Delta s \geq 0, \\ 0, \Delta s \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, решение прямой задачи безопорного НКР зондирования случайно-неоднородной среды с известными оптическими характеристиками (коэффициентом рассеяния μ_s , коэффициентом поглощения μ_a и параметром анизотропии рассеяния g [18]) может быть осуществлено по следующему алгоритму:

- 1) статистическое (Монте–Карло) моделирование переноса зондирующего излучения в среде для заданной геометрии зондирования и детектирования рассеянного света; создание массива значений оптических путей s_i диффузных составляющих зондирующего излучения в среде;
- 2) частотный анализ сформированного массива значений s_i с целью получения выборочной плотности распределения:

$$\rho(s_m) = N_m / \Delta s N_{\Sigma}; \Delta s = (s_{max} - s_{min}) / M;$$

$$s_m = s_{min} + \Delta s (m + 0.5); m = 0, 1, \dots, M - 1;$$

здесь M – число интервалов, используемых для частотного анализа; N_m – число значений s_i , попадающих в m -й интервал; N_{Σ} – полное число значений s_i в выборке (объем сгенерированного массива данных); Δs – ширина интервала; значение M целесообразно выбирать равным $\sqrt{N_{\Sigma}}$ [25]; вычисляемая подобным образом выборочная плотность распределения удовлетворяет условию нормировки $\sum_{m=0}^{M-1} \rho(s_m) \Delta s = 1$;

3) по полученной выборочной плотности вероятности $\{\rho(s_m)\}$ в соответствии с выражением (12) вычисляется выборочная плотность вероятности разностей оптических путей $\{\rho(\Delta s_k)\}$ путем замены несобственного интеграла конечной суммой дискретных значений и применения одного из методов численного интегрирования (например, метода Симпсона);

4) аналогично пункту 3 по полученной выборочной плотности распределения $\{\rho(\Delta s_k)\}$ и заданной функции когерентности детектируемого излучения (например, в форме (7)) вы-

числяются значения $J_1 = \int_0^{\infty} |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s)$ и

$$J_2 = \left(\int_0^{\infty} |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3;$$

5) по найденным величинам J_1 и J_2 с использованием выражений (8) или (9) (в зависимости от наличия или отсутствия поляризационного фильтра в канале детектирования рассеянного излучения) вычисляются нормированные статистические моменты флуктуаций интенсивности M_2 и M_3 .

В качестве примера рис. 2 и 3 иллюстрируют промежуточные результаты решения прямой задачи НКР зондирования, соответствующие пунктам 2 и 3 рассмотренного алгоритма. При реализации процедуры Монте–Карло моделирования использовался подход, описанный ранее в работах [21, 22]. В качестве фазовой функции в модели принята функция Хеньи–Гринштейна [26], хорошо зарекомендовавшая себя при решении задач переноса излучения в случайно-неоднородных средах различной природы (начиная от биологических тканей и заканчивая композитными материалами). Учет поглощения среды производился для каждого «фотонного» пакета, распространяющегося по случайной трассе длиной s_i , путем коррекции значения его исходного веса, равного 1, бугеровским множителем $\exp(-\mu_a s_i)$. Представленные на рис. 2 распределения $\{\rho(s_m)\}$ соответствуют случаю детектирования излучения, обратно рассеянного оптически толстым слоем среды, зондируемой широким коллимированным пучком (подобная геометрия представляет значительный интерес для решения прикладных задач безопорного НКР зондирования). Отметим, что в данном случае характерной особенностью является смещение моды распределений $\{\rho(s_m)\}$ относительно нулевого значения s_m , зависящее от оптических характеристик среды. Это смещение обусловлено существованием наиболее вероятной глубины проникновения зондирующего излучения в среду, определяемой величиной транспортной длины распространения света в среде.

Для распределений $\{\rho(\Delta s_k)\}$ вне зависимости от величины сдвига модального значения соответствующей функции $\{\rho(s_m)\}$ всегда характерна

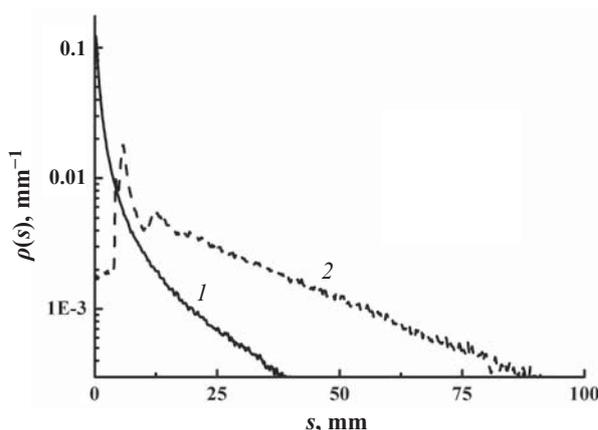


Рис. 2. Функции плотности вероятности $\rho(s)$ оптических путей диффузных составляющих зондирующего излучения, полученные в результате Монте-Карло моделирования. Случай детектирования обратно рассеянного излучения. Произведение геометрической толщины слоя на транспортный коэффициент рассеяния $L\mu'_s$ равно: 1 – 12 (оптически плотная среда); 2 – 0.16 (оптически тонкая среда). Коэффициент поглощения среды мал: $\mu_a < \mu'_s$. Пики на зависимости (2) соответствуют однократному и двукратному отражению зондирующего излучения от нижней границы слоя среды. Толщина модельной среды 2 мм

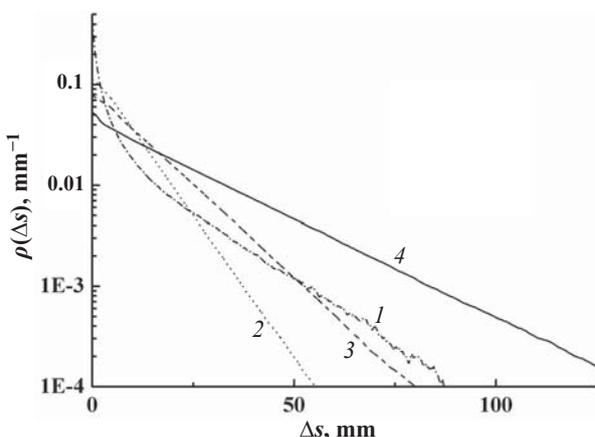


Рис. 3. Функции плотности вероятности разностей оптических путей $\rho(\Delta s)$ диффузных составляющих зондирующего излучения, полученные в результате преобразования Монте-Карло данных с использованием выражения (11). Детектирование обратно рассеянного излучения. Значения параметра $L\mu'_s$: 1 – 12; 2 – 1.6; 3 – 0.4; 4 – 0.16. Толщина модельной среды 2 мм

Fig. 3. Probability density functions $\rho(\Delta s)$ of the pathlength differences of diffusing components of probe radiation obtained using transformation (11) of the Monte Carlo-simulated pathlength distributions. The case of backward detection. The factor $L\mu'_s$ equals: 1 – 12; 2 – 1.6; 3 – 0.4; 4 – 0.16. The layer thickness is 2 mm

мода (наиболее вероятное значение) при $\Delta s_k = 0$ и монотонный спад плотности вероятности с ростом Δs_k . Это обусловлено взаимосвязью функций плотности вероятности $\{\rho(\Delta s_k)\}$ и $\{\rho(s_m)\}$, описываемой выражением (12).

Вычисление параметров J_1 и J_2 для функции когерентности, соответствующей прямоугольному спектральному окну (выражение (7)), для меняющихся в широких пределах значений оптических параметров среды и длины когерентности детектируемого излучения позволило установить, что между этими параметрами существует достаточно универсальная взаимосвязь, описываемая степенной функцией вида

$$J_2 \cong (J_1)^{2,26}. \quad (13)$$

Более того, численное моделирование поведения параметров J_1 и J_2 при изменении отношения средней разности оптических путей к длине когерентности l_c для различных модельных форм распределений $\rho(\Delta s)$ («односторонней» треугольной, экспоненциальной и «односторонней» гауссовой), достаточно далеких от распределений Δs при реальном переносе излучения в оптически плотных случайно-неоднородных средах в режиме обратного рассеяния, показали выполнимость соотношения (13) и в этих случаях (рис. 4). Используемые модельные распределения задавались следующими выражениями:

а) «одностороннее» треугольное распределение:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3\langle\Delta s\rangle}\right) \left(1 - \frac{\Delta s}{3\langle\Delta s\rangle}\right), & 0 \leq \Delta s \leq 3\langle\Delta s\rangle; \\ 0, & \Delta s < 0, \Delta s > 3\langle\Delta s\rangle; \end{cases}$$

б) экспоненциальное распределение:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\langle\Delta s\rangle}\right) \exp\left(-\frac{\Delta s}{\langle\Delta s\rangle}\right), & \Delta s \geq 0; \\ 0, & \Delta s \leq 0; \end{cases}$$

в) «одностороннее» гауссово распределение:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi\langle\Delta s\rangle}\right) \exp\left(-\frac{\{\Delta s\}^2}{\pi\langle\Delta s\rangle^2}\right), & \Delta s \geq 0; \\ 0, & \Delta s \leq 0. \end{cases}$$

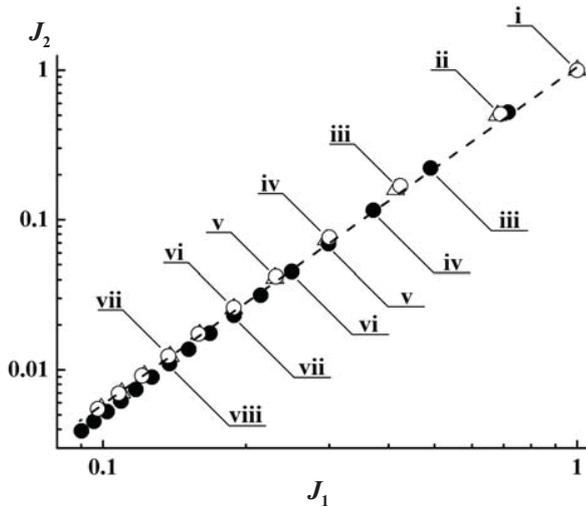


Рис. 4. Взаимосвязь параметров J_1 и J_2 для различных модельных форм распределений $\rho(\Delta s)$ при различных значениях отношения $\langle \Delta s \rangle / l_c$. Пунктирная линия – аппроксимирующая степенная зависимость (13). «Открытые» треугольники – распределение а), сплошные круговые символы – распределение б), «открытые» круговые символы – распределение в). Значения отношений $\langle \Delta s \rangle / l_c$: i – 0; ii – 0.318; iii – 0.637; iv – 0.955; v – 1.273; vi – 1.592; vii – 2.228; viii – 3.183

Fig. 4. The plot of values J_1 and J_2 for various shapes of $\rho(\Delta s)$ and various values of the ratio $\langle \Delta s \rangle / l_c$. Dotted line is the approximation (13); a) – open triangles; b) – closed circles; c) – open circles. The $\langle \Delta s \rangle / l_c$ ratios are equal to: i – 0; ii – 0.318; iii – 0.637; iv – 0.955; v – 1.273; vi – 1.592; vii – 2.228; viii – 3.183

3. Сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными

Проверка гипотезы универсальности взаимосвязи J_1 и J_2 (и соответственно M_2 и M_3), следующей из представленных выше результатов математического моделирования переноса диффузных составляющих зондирующего излучения в случайно-неоднородных средах, производилась с использованием двух наборов эмпирических данных безпорного НКР зондирования насыщенных флуоресцентным красителем слоев плотноупакованных частиц диоксида кремния. Часть данных, полученная в условиях узкополосной селекции спектра флуоресцентного излучения с высоким разрешением ($\Delta\lambda = 0.052$ нм, в качестве системы детектирования применялся конфокальный рамановский микроскоп LabRam HR800 (Horiba Jobin Yvon, США), была представлена ранее в работах [14–16]. Другая часть данных была получена с существенно меньшим спектральным разрешением (спектрометр QE65000 (Ocean Optics, США); $\Delta\lambda \approx 1$ нм;

конфокальная система на основе $100\times$ микрообъектива (NiKon, США). В обоих случаях в качестве флуорофора использовался краситель Родамин 6Ж, накачка зондируемой среды производилась непрерывным лазерным излучением 532 нм с плотностью мощности порядка 80 мВт/см². Анализ флуктуационных составляющих спектрально селективируемого флуоресцентного излучения производился для различных длин волн в полосе флуоресценции насыщенных Родамином 6Ж сред (от 560 до 700 нм). По измеренным в экспериментах значениям статистических моментов восстанавливались значения J_1 и J_2 с использованием выражений (11), представленные на рис. 5. Здесь же приведена аппроксимирующая степенная зависимость (13). Несмотря на существенный случайный разброс

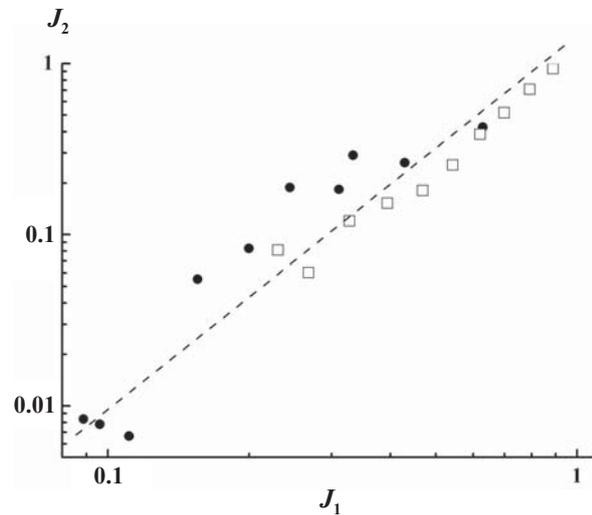


Рис. 5. Взаимосвязь параметров J_1 и J_2 , восстановленных из эмпирических данных безпорного НКР зондирования случайно-неоднородных сред со спектральной селекцией широкополосного зондирующего излучения (круговые символы – спектральная фильтрация с $\Delta\lambda \approx 1$ нм, «мелкозернистая» матричная среда со средним размером частиц диоксида кремния ≈ 3 мкм; квадратные символы – спектральная фильтрация с $\Delta\lambda = 0.052$ нм, «крупнозернистая» матричная среда со средним размером частиц диоксида кремния ≈ 150 мкм). Толщина зондируемых слоев в обоих случаях 2 мм, объемная доля частиц ≈ 0.35 . Точки соответствуют различным значениям средней длины волны детектируемого излучения

Fig. 5. Interrelation between the parameters J_1 and J_2 retrieved from the empirical data on the reference-free low-coherence reflectometry with spectral selection of broadband probe light. Circles correspond to the spectral window of $\Delta\lambda \approx 1$ nm and a fine-grained matrix medium with the average size of SiO_2 particles ≈ 3 μm . Squares correspond to the spectral window of $\Delta\lambda = 0.052$ nm and a coarse-grained matrix medium with the average size of SiO_2 particles ≈ 150 μm



исходных эмпирических значений, обусловленный конечностью анализируемых выборок и измерительными шумами, можно утверждать, что представленные на рисунке данные можно рассматривать как подтверждение гипотезы универсальности взаимосвязи параметров J_1 и J_2 .

Отметим, что наблюдаемая особенность в поведении J_1 и J_2 (существенное убывание вблизи максимума флуоресценции и возрастание на краях спектра) предположительно обусловлена нелинейным эффектом спонтанного усиления флуоресцентного излучения в спектральном интервале, характеризуемом высоким квантовым выходом флуоресценции при высоких концентрациях красителя. Это должно приводить к возрастанию средней разности оптических путей диффузных составляющих для данного спектрального интервала. В частности, оценки значений $\langle \Delta s \rangle$ на основании результатов математического моделирования переноса спектрально селективируемого излучения в зондируемых средах позволяют предположить более чем трехкратное возрастание данной величины вблизи максимума флуоресценции по сравнению с краями спектра.

Заключение

Разработанная методология анализа данных безопорного НКР зондирования с использованием спектральной селекции широкополосного зондирующего излучения представляет интерес с точки зрения создания и развития новых подходов во флуоресцентной и спекл-коррелометрической диагностике случайно-неоднородных сред для различных приложений в биомедицине и физическом материаловедении. С другой стороны, достаточно высокая чувствительность разработанного подхода к изменениям условий переноса света в случайно-неоднородных средах, обусловленных различными нелинейными и резонансными эффектами при взаимодействии излучения со средами, позволяет применить эту методологию к анализу фундаментальных процессов взаимодействия света с активными случайно-неоднородными средами (в частности, к анализу перехода от режима усиления спонтанного излучения к стохастической лазерной генерации в среде).

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10455).

Список литературы

1. Fujimoto J. G., Brezinski M. E., Tearney G. J., Boppart S. A., Bouma B., Hee M. R., Southern J. F., Swanson E. A. Optical biopsy and imaging using optical coherence tomography // *Nature Medicine*. 1995. Vol. 1, № 9. P. 970–972.
2. Youngquist R. C., Carr S., Davies D. E. N. Optical coherence-domain reflectometry: a new optical evaluation technique // *Optics Letters*. 1987. Vol. 12, № 3. P. 158–160.
3. Schmitt J. M., Knüttel A., Bonner R. F. Measurement of optical properties of biological tissues by low-coherence reflectometry // *Applied Optics*. 1993. Vol. 32, № 30. P. 6032–6042.
4. Webster P. J. L., Yu J. X. Z., Leung B. Y. C., Anderson M. D., Yang V. X. D., Fraser J. M. *In situ* 24 kHz coherent imaging of morphology change in laser percussion drilling // *Optics Letters*. 2010. Vol. 35. P. 646–648.
5. Walecki W., Wei F., Van P., Lai K., Lee T., Lau S.H., Koo A. Novel low coherence metrology for nondestructive characterization of high-aspect-ratio microfabricated and micromachined structures // *Proc. SPIE*. 2003. Vol. 5343. P. 55–63. DOI:10.1117/12.530749.
6. Walecki W. J., Lai K., Souchkov V., Van P., Lau S., Koo A. Novel noncontact thickness metrology for backend manufacturing of wide bandgap light emitting devices // *Physica status solidi (c)*. 2005. Vol. 2, № 3. P. 984–989. DOI:10.1002/pssc.200460606.
7. Walecki W., Pravdivtsev A., Santos M., Koo A. High-speed high-accuracy fiber optic low-coherence interferometry for *in situ* grinding and etching process monitoring // *Proc. SPIE*. 2006. Vol. 6293. P. 62930D. DOI:10.1117/12.675592.
8. Wang J., Gao X., Huang W., Wang W., Chen S., Du Sh., Li X., Zhang X. Swept-source optical coherence tomography imaging of macular retinal and choroidal structures in healthy eyes // *BMC Ophthalmology*. 2015. Vol. 15, № 1. P. 122.
9. Fathipour V., Schmoll T., Bonakdar A., Wheaton S., Mohseni H. Demonstration of Shot-noise-limited Swept Source OCT Without Balanced Detection // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7. P. 1183.
10. Ozcan A., Bilenca A., Desjardins A. E., Bouma B. E., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography images using digital filtering // *JOSA A*. 2007. Vol. 24, № 7. P. 1901–1910.
11. Puvanathan P., Bizheva K. Speckle noise reduction algorithm for optical coherence tomography based on interval type II fuzzy set // *Optics Express*. 2007. Vol. 15, № 24. P. 15747–15758.
12. Bouma B. E., Ifimia N., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography by path length encoded angular compounding // *Journal of Biomedical Optics*. 2003. Vol. 8. P. 260–263.
13. Зимняков Д. А., Сина Д. С., Ювченко С. А., Исаева Е. А., Чекмасов С. П. Измерение транспортного коэффициента рассеяния случайно-неоднородных сред методом низкокогерентной рефлектометрии // *Письма в Журнал технической физики*. 2014. Т. 40, вып. 3. С. 76–82.



14. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Asharchuk I. A., Sviridov A. P. Stochastic interference of fluorescence radiation in random media with large inhomogeneities // *Optics Communications*. 2017. Vol. 387. P. 121–127.
15. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Pavlova M. V., Alonova M. V. Reference-free path length interferometry of random media with the intensity moments analysis // *Optics Express*. 2017. Vol. 25, № 13. P. 13953–13972.
16. Зимняков Д. А., Ашарчук И. А., Ювченко С. А., Свиридов А. П. Спекл-спектроскопия флуоресцирующих случайно-неоднородных сред // *Квантовая электроника*. 2016. Т. 46, № 11. С. 1047–1054.
17. Johnson P. M., Imhof A., Bret B. P., Rivas J. G., Legendijk A. Time-resolved pulse propagation in a strongly scattering material // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, № 1. P. 016604.
18. Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media. N.Y.: Academic Press, 1978. Vol. 2. P. 349–351.
19. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Sviridov A. P., Bagratashvili V. N. Optical clearing and laser light dynamic scattering near the critical point of fluid in mesoporous materials // *Laser Physics Letters*. 2013. Vol. 10, № 4. P. 045601.
20. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Isaeva E. A., Bagratashvili V. N., Yermolenko S. B. Laser speckle probes of relaxation dynamics in soft porous media saturated by near-critical fluids // *Applied Optics*. 2014. Vol. 53, № 10. P. B12–B21.
21. Zimnyakov D. A. On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light // *Waves in Random Media*. 2000. Vol. 10, № 4. P. 417–434.
22. Zimnyakov D. A. Similarity effects in multiple scattering of coherent radiation: phenomenology and experiments // *Optics and Spectroscopy*. 2000. Vol. 89, № 3. P. 453–462.
23. Levenberg K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares // *Quarterly of applied mathematics*. 1944. Vol. 2, № 2. P. 164–168.
24. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000. 896 с.
25. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1991. 304 с.
26. Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the galaxy // *Astrophysical Journal*. 1941. Vol. 93. P. 70–83.

Образец для цитирования:

Зимняков Д. А., Алонова М. В., Ювченко С. А., Ушакова Е. В. Математическое моделирование переноса зондирующего излучения в низкокогерентной рефлектометрии случайно-неоднородных сред // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 4–15. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-4-15.

Mathematical Modeling of Light Transfer in Low-Coherence Reflectometry of Random Media

D. A. Zimnyakov, M. V. Alonova,
S. A. Yuvchenko, E. V. Ushakova

Dmitry A. Zimnyakov, ORCID 0000-0002-9787-7903, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia, zimnykov@mail.ru

Marina V. Alonova, ORCID 0000-0001-7772-3985, Institute of Precision Mechanics and Control of Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya Str., 410028, Saratov, Russia, alonova_marina@mail.ru

Sergey A. Yuvchenko, ORCID 0000-0001-7863-8600, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia, yuv-sergej@yandex.ru

Ekaterina V. Ushakova, ORCID 0000-0003-3674-301X Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia, katushakova96@yandex.ru

Background and Objectives: The mathematical model of stochastic interference of spectrally selected fluorescence radiation in multiple scattering random media is considered. The expressions for the normalized second- and third-order moments of spatial intensity fluctuations of detected probe light are derived. The developed model establishes the relationships between the normalized second- and third-order statistical moments of the intensity fluctuations of detected probe light and the probability density function of the pathlength differences of fluorescence radiation in probed media. The obtained theoretical results

are compared with the experimental data on the reference-free low-coherence reflectometry of dye-saturated model random media pumped with a continuous-wave laser radiation. **Materials and Methods:** The discrete scattering model is applied to derive the basic relationships between the normalized statistical moments of intensity fluctuations and the probability density function of the pathlength differences. The Monte-Carlo technique is applied to obtain the pathlength distributions in probed media for used illumination and detection conditions. The experimental data used for verification of the developed model are obtained using model scattering systems on the base of densely packed silica grains, which are saturated by a water solution of Rhodamine 6G and pumped by continuous-wave laser radiation at the wavelength of 532 nm. **Results:** The adequacy of the developed mathematical model is confirmed by the obtained experimental data. The universal relationship is established between the integral parameters dependent on the probability density function of the pathlength differences and the coherence function of spectrally selected probe radiation is established. **Conclusion:** The obtained results can be used as the physical base for the development of novel low-coherence probes for applications in biomedical optics and material science. **Key words:** low-coherent reflectometry, stochastic interference, mathematical modeling of radiative transfer.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-19-10455).

References

1. Fujimoto J. G., Brezinski M. E., Tearney G. J., Boppart S. A., Bouma B., Hee M. R., Southern J. F., Swanson E. A.



- Optical biopsy and imaging using optical coherence tomography. *Nature Medicine*, 1995, vol. 1, no. 9, pp. 970–972.
2. Youngquist R. C., Carr S., Davies D. E. N. Optical coherence-domain reflectometry: a new optical evaluation technique. *Optics Letters*, 1987, vol. 12, no. 3, pp. 158–160.
 3. Schmitt J. M., Knüttel A., Bonner R. F. Measurement of optical properties of biological tissues by low-coherence reflectometry. *Applied Optics*, 1993, vol. 32, no. 30, pp. 6032–6042.
 4. Webster P. J. L., Yu J. X. Z., Leung B. Y. C., Anderson M. D., Yang V.X.D., Fraser J. M. *In situ* 24 kHz coherent imaging of morphology change in laser percussion drilling. *Optics Letters*, 2010, vol. 35, pp. 646–648.
 5. Walecki W., Wei F., Van P., Lai K., Lee T., Lau S. H., Koo A. Novel low coherence metrology for nondestructive characterization of high-aspect-ratio microfabricated and micromachined structures. *Proc. SPIE*, 2003, vol. 5343, pp. 55–63. DOI:10.1117/12.530749.
 6. Walecki W. J., Lai K., Souchkov V., Van P., Lau S., Koo A. Novel noncontact thickness metrology for backend manufacturing of wide bandgap light emitting devices. *Physica status solidi (c)*, 2005, vol. 2, no. 3, pp. 984–989. DOI:10.1002/pssc.200460606.
 7. Walecki W., Pravdivtsev A., Santos M., Koo A. High-speed high-accuracy fiber optic low-coherence interferometry for *in situ* grinding and etching process monitoring. *Proc. SPIE*, 2006, vol. 6293, pp. 62930D. DOI: 10.1117/12.675592.
 8. Wang J., Gao X., Huang W., Wang W., Chen S., Du Sh., Li X., Zhang X. Swept-source optical coherence tomography imaging of macular retinal and choroidal structures in healthy eyes. *BMC Ophthalmology*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 122.
 9. Fathipour V., Schmoll T., Bonakdar A., Wheaton S., Mohseni H. Demonstration of Shot-noise-limited Swept Source OCT Without Balanced Detection. *Scientific Reports*, 2017, vol. 7, pp. 1183.
 10. Ozcan A., Bilenca A., Desjardins A. E., Bouma B. E., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography images using digital filtering. *JOSA A*, 2007, vol. 24, no. 7, pp. 1901–1910.
 11. Puvanathan P., Bizheva K. Speckle noise reduction algorithm for optical coherence tomography based on interval type II fuzzy set. *Optics Express*, 2007, vol. 15, no. 24, pp. 15747–15758.
 12. Bouma B. E., Ifimia N., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography by path length encoded angular compounding. *Journal of Biomedical Optics*, 2003, vol. 8, pp. 260–263.
 13. Zimnyakov D. A., Sina J. S., Yuvchenko S. A., Isaeva E. A., Chekmasov S. P. Measurement of the transport-scattering coefficient in random inhomogeneous media using the method of low-coherence reflectometry. *Technical Physics Letters*, 2014, vol. 40, iss. 2, pp. 132–134 (in Russian).
 14. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Asharchuk I. A., Sviridov A. P. Stochastic interference of fluorescence radiation in random media with large inhomogeneities. *Optics Communications*, 2017, vol. 387, pp. 121–127.
 15. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Pavlova M. V., Alonova M. V. Reference-free path length interferometry of random media with the intensity moments analysis. *Optics Express*, 2017, vol. 25, no. 13, pp. 13953–13972.
 16. Zimnyakov D. A., Asharchuk I. A., Yuvchenko S. A., Sviridov A. P. Speckle spectroscopy of fluorescent randomly inhomogeneous media. *Quantum Electronics*, 2016, vol. 46, no. 11, pp. 1047–1054 (in Russian).
 17. Johnson P. M., Imhof A., Bret B. P., Rivas J. G., Lagendijk A. Time-resolved pulse propagation in a strongly scattering material. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 1, pp. 016604.
 18. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media*. New York, Academic Press, 1978, vol. 2, pp. 349–351.
 19. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Sviridov A. P., Bagratashvili V. N. Optical clearing and laser light dynamic scattering near the critical point of fluid in mesoporous materials. *Laser Physics Letters*, 2013, vol. 10, no. 4, pp. 045601.
 20. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Isaeva E. A., Bagratashvili V. N., Yermolenko S. B. Laser speckle probes of relaxation dynamics in soft porous media saturated by near-critical fluids. *Applied Optics*, 2014, vol. 53, no. 10, pp. B12–B21.
 21. Zimnyakov D. A. On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light. *Waves in Random Media*, 2000, vol. 10, no. 4, pp. 417–434.
 22. Zimnyakov D. A. Similarity effects in multiple scattering of coherent radiation: phenomenology and experiments. *Optics and Spectroscopy*, 2000, vol. 89, no. 3, pp. 453–462.
 23. Levenberg K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 1944, vol. 2, no. 2, pp. 164–168.
 24. Mandel L., Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. 1192 p.
 25. Novickij P. V., Zograf I. A. *Oценка pogreshnostej rezul'tatov izmerenij* [An estimate of measurement data errors]. Leningrad, Jenergoatomizdat, 1991. 304 p. (in Russian).
 26. Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the galaxy. *Astrophysical Journal*, 1941, vol. 93, pp. 70–83.

Cite this article as:

Zimnyakov D. A., Alonova M. V., Yuvchenko S. A., Ushakova E. V. Mathematical Modeling of Light Transfer in Low-Coherence Reflectometry of Random Media. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 4–15 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-4-15.