



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 535.13:537.8

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИМПУЛЬСЫ ПРИ ПРЕЛОМЛЕНИИ ВОЛНЫ В СРЕДУ С ДИСПЕРСИЕЙ

В. И. Цой

Цой Валерий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиофизики и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, tsoyvi@info.sgu.ru

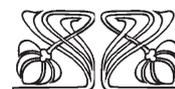
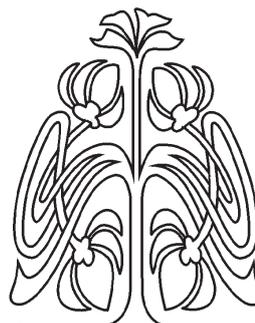
В классической электродинамике применяют по крайней мере два способа описания полевого импульса (linear momentum): по Абрагаму и по Минковскому. Представляет интерес, какой из этих способов необходим или предпочтителен для описания импульсов при преломлении волны. В статье выведены тензор напряжений и плотность импульса в прозрачной среде с дисперсией, включая среду с отрицательными проницаемостями, и рассмотрено преломление волны из вакуума в среду. Импульс падающей волны сохраняется как сумма полевого импульса Абрагама, импульса среды под действием силы Абрагама и импульса, обусловленного электромагнитным давлением на границу среды. При этом касательная к границе тангенциальная компонента импульса является импульсом Минковского. Такое различие и сосуществование импульсов можно объяснить симметрией системы среда–плоскость–среда относительно сдвига вдоль границы и отсутствием симметрии относительно сдвига, перпендикулярного к границе.

Ключевые слова: сосуществование импульсов Абрагама и Минковского, среда с дисперсией, левая среда.

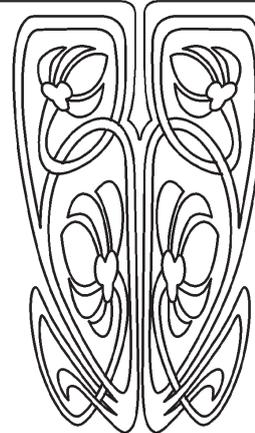
DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-23-31

Введение

В связи с существенной ролью оптических сил в современных технологиях в настоящее время повышен интерес к проблеме описания сил и импульсов в среде с электромагнитным полем [1]. Во-первых, среда испытывает силу со стороны поля при поглощении излучения, и импульс поглощенной части излучения передается среде. Во-вторых, возникают силы при отражении и преломлении света на поверхности тела, когда возникает разность импульсов падающих на тело и уходящих от него волн, что передается телу соответствующей силой. В-третьих, внутри среды существуют действующие на нее со стороны поля объемные силы, в том числе сила Абрагама в прозрачном диэлектрике [2, 3]. Плотность электромагнитного импульса поля в системе с постоянной скоростью центра энергии определяется плотностью потока энергии \mathbf{S} излучения и равна плотности полевого импульса Абрагама $\mathbf{g}^A = (\mathbf{S}/c^2)$. Кроме того, в случае однородного диэлектрика с электрической и магнитной проницаемостями $\epsilon > 0$, $\mu > 0$ без дисперсии возможно такое описание импульса электромагнитного поля, при котором никакие силы в среде не рассматриваются, а поле характеризуется сохраняющимся импульсом с плотностью импульса



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





по Минковскому $\mathbf{g}^M = \varepsilon\mu\mathbf{g}^A$ [1]. Сохранение импульса Минковского внутри среды подтверждено экспериментально, в том числе при наличии дисперсии [4].

Совместимый с уравнениями электродинамики Максвелла баланс сил в среде без сторонних источников разные авторы интерпретируют по-своему, что приводит к разным выводам. Например, одни допускают, что плотность импульса Минковского \mathbf{g}^M направлена вдоль волнового вектора \mathbf{k} [5, 6], тогда как другие признают только плотность импульса \mathbf{g} , направленную в сторону плотности потока энергии \mathbf{S} [7]. Эти точки зрения приходят в противоречие в случаях, когда волновой вектор \mathbf{k} и вектор Пойнтинга \mathbf{S} взаимно противоположны, в частности, в случае отрицательных проницаемостей [8]. Попытки описать взаимодействие поля со средой с помощью обобщенных сил Лоренца на поляризационные токи, например, в работе [9], не вполне убедительны ввиду постулативного характера определения этих токов и сил.

То обстоятельство, что нужно рассматривать импульс поля иногда по Абрагаму, а иногда по Минковскому, привело к выводу о том, что эти импульсы просто соответствуют разным способам разложения полного импульса среды и поля на «кинетические» либо «канонические» импульсы [10]. При этом возможен несколько иной акцент, согласно которому важен не столько выбор способа разложения полного импульса, сколько то, что канонический импульс Минковского является квазиимпульсом. Действительно, в случае среды, характеристики взаимодействия с которой не меняются при сдвигах внутри среды, можно совсем не рассматривать те степени свободы, которые не относятся к полю. При этом выявляется сохраняющийся импульс в веществе – квазиимпульс, которым и является импульс Минковского [11].

В настоящей статье прослежен этот подход к волнам в средах с дисперсией в окнах прозрачности, в том числе в метаматериалах с отрицательными проницаемостями.

Импульс и квазиимпульс электромагнитного поля в веществе

Электромагнитные силы в веществе в отсутствие в нем сторонних зарядов $\rho_0 = 0$ и токов $\mathbf{j}_0 = 0$, т.е. в отсутствие в веществе силы Лоренца $\rho_0\mathbf{E} + (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B})$, можно найти из выражения этой силы через векторы \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} поля с помощью уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = (\partial \mathbf{D} / \partial t) + \mathbf{j}_0, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B} / \partial t), \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_0. \quad (4)$$

Условие отсутствия внешних сил

$$\rho_0\mathbf{E} + (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}) = 0 \quad (5)$$

приобретает вид равновесия внутренних сил

$$\mathbf{E} \text{div } \mathbf{D} - (\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}) - (\partial / \partial t)(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (6)$$

Переходя в условии (6) к декартовым координатам, с использованием антисимметричного единичного тензора $e_{\alpha\beta\gamma}$ получим баланс сил в виде

$$\delta_{\alpha\beta}(-B_\gamma \partial_\beta H_\gamma - D_\gamma \partial_\beta E_\gamma) + \partial_\beta (H_\alpha B_\beta + E_\alpha D_\beta) = (\partial / \partial t)e_{\alpha\beta\gamma} D_\beta B_\gamma, \quad (7)$$

где координатные индексы α, β, γ принимают значения x, y, z .

В однородной среде с материальными уравнениями $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ в отсутствие дисперсии равенство (7) приобретает вид

$$\begin{aligned} & (\partial / \partial x_\beta)[(E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta) - \\ & - \delta_{\alpha\beta}(1/2)(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \mu\mu_0\mathbf{H}^2)] = \\ & = (\partial / \partial t)(\mathbf{D} \times \mathbf{B})_\alpha = (\partial g_\alpha^M / \partial t), \quad (8) \end{aligned}$$

т.е. представляет собой закон сохранения импульса Минковского

$$(\partial \sigma_{\alpha\beta} / \partial x_\beta) = (\partial g_\alpha^M / \partial t). \quad (9)$$

Элементы тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ с обратным знаком имеют смысл компонент плотностей потоков импульса [12]. Импульс Минковского с плотностью $\mathbf{g}^M = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$ в среде без дисперсии сохраняется как квазиимпульс, что обусловлено инвариантностью характеристик при сдвигах в однородной среде, как было показано в работе [11]. Так как в законе сохранения (7) учитываются только степени свободы электромагнитного поля в неподвижной среде, то и при наличии дисперсии этот закон остается законом сохранения квазиимпульса поля.

Чтобы учесть дисперсию проницаемостей в законах сохранения, рассматривают плоскую квазимонохроматическую волну в окрестности частоты ω с комплексными напряженностями электрического и магнитного поля (наклонный шрифт) \mathbf{E} , \mathbf{H} , характеризуемыми частотой ω , волновым вектором $\mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}(\omega/c)\mathbf{k}^0$ и медленно меняющимися амплитудами \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 [2, 6, 7]:



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (11)$$

Волновой фронт распространяется с фазовой скоростью $\mathbf{v} = (\omega/k)\mathbf{k}^0$, амплитуда – с групповой

скоростью $\mathbf{u} = (d\omega/dk)\mathbf{u}^0$. Для полей с квадратичным по полевым переменным и их производным лагранжианом групповая скорость совпадает со скоростью переноса энергии [13]. Материальные уравнения с учетом дисперсии имеют вид [2, 6]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E} + i(\partial\varepsilon/\partial\omega)(\partial\varepsilon_0\mathbf{E}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (12)$$

$$\partial\mathbf{D}/\partial t = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E} + (\partial\omega\varepsilon/\partial\omega)(\partial\varepsilon_0\mathbf{E}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H} + i(\partial\mu/\partial\omega)(\partial\mu_0\mathbf{H}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (14)$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = -i\omega\mu\mu_0\mathbf{H} + (\partial\omega\mu/\partial\omega)(\partial\mu_0\mathbf{H}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (15)$$

Взаимосвязь между медленно меняющимися амплитудами поля и волновым вектором согласно уравнениям Максвелла в нулевом приближении имеет вид

$$\mathbf{H}_0 = (1/\mu\mu_0\omega)(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0), \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) = 0. \quad (16)$$

С учетом последних соотношений удобно выразить векторное произведение индукций волны только через электрическое поле:

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \\ & = (\partial/\partial t) (\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\varepsilon\varepsilon_0/2)(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k}^0. \end{aligned} \quad (17)$$

При подстановке выражений (13), (15), (17) в баланс сил (7) оказывается, что в первом порядке малости поправок на дисперсию проницаемостей правая часть (7) остается неизменной, а в левой части появляются производные по времени, которые имеют смысл поправки к силе, обусловленной изменением импульса, то есть должны быть перенесены в правую часть. В итоге закон сохранения импульса для плоской волны в среде с дисперсией приобретает вид

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial x_\beta)(1/4) \left\{ \begin{aligned} & (\varepsilon\varepsilon_0 E_\alpha^* E_\beta + \varepsilon\varepsilon_0 E_\alpha E_\beta^* + \mu\mu_0 H_\alpha^* H_\beta + \mu\mu_0 H_\alpha H_\beta^*) \\ & - \delta_{\alpha\beta} (\varepsilon\varepsilon_0 E_\gamma E_\gamma^* + \mu\mu_0 H_\gamma H_\gamma^*) \end{aligned} \right\} = \\ & = (\partial/\partial t) (\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\varepsilon\varepsilon_0/2)(E_\gamma E_\gamma^*)k_\alpha^0 \times \\ & \times [1 + (\omega/2\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial\omega) + (\omega/2\mu)(\partial\mu/\partial\omega)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Видно, что плотность квазиимпульса \mathbf{g}_α^M в случае дисперсии отличается от плотности в отсутствие дисперсии множителем

$$\begin{aligned} g_\alpha^M/g_{0\alpha}^M & = [1 + (\omega/2\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial\omega) + \\ & + (\omega/2\mu)(\partial\mu/\partial\omega)] = v/u. \end{aligned} \quad (19)$$

Этот результат фактически повторяет то обобщение импульса Минковского, которое сделано в работе [7] с использованием *BED*-формы уравнений Максвелла.

Полезно отметить, что при подстановке выражений (12), (14) в условие баланса сил (7) тот же результат (18) получится, если выполняется условие

$$\begin{aligned} & i(\partial\mu/\partial\omega)\varepsilon(\mathbf{E}_0 \cdot \partial\mathbf{E}_0^*/\partial t) + \\ & + i(\partial\varepsilon/\partial\omega)\mu(\partial\mathbf{E}_0/\partial t \cdot \mathbf{E}_0^*) + \text{к. с.} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Как известно, плотность электромагнитной энергии в среде с дисперсией выражается формулой Бриллюэна [2, 7]:

$$\begin{aligned} w & = (1/4)[(\partial\omega\varepsilon/\partial\omega)(\varepsilon_0 E_\gamma E_\gamma^*) + \\ & + (\partial\omega\mu/\partial\omega)(\mu_0 H_\gamma H_\gamma^*)] = \\ & = (\varepsilon\varepsilon_0/2)(E_\gamma E_\gamma^*)[1 + (\omega/2\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial\omega) + \\ & + (\omega/2\mu)(\partial\mu/\partial\omega)] = w'(v/u). \end{aligned} \quad (21)$$

Из равенств (18), (19), (21) следует, что плотность квазиимпульса Минковского с учетом дисперсии связана с плотностью энергии и волновым вектором точно так же, как в случае без дисперсии:

$$\mathbf{g}^M = w(\sqrt{\varepsilon\mu}/c)\mathbf{k}^0 = (w/v)\mathbf{k}^0. \quad (22)$$

В веществе с отрицательными проницаемостями $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$ согласно уравнениям Максвелла (1), (2) волновой вектор и напряженности поля (10), (11) образуют левую тройку векторов $\mathbf{k} \uparrow \downarrow (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$, т.е. волновой вектор направлен противоположно вектору плотности потока энергии [8, 14]. В законе преломления для изменения углов распространения на границе с



таким веществом удобно представлять показатель преломления в виде $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ и считать его отрицательным [8]. Однако в соотношении (22), связывающем между собой квадратичные по амплитудам поля величины, этого делать не следует, как и в случае с формулами Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и преломления [15, 16]. Действительно, с помощью соотношения (16) нетрудно получить выражение для плотности потока энергии в виде [6, 7, 17]

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\sqrt{\varepsilon\mu}/2\mu)(\varepsilon_0/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)\mathbf{k}^0 = (\sqrt{\varepsilon\mu}/2\varepsilon)(\mu_0/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*)\mathbf{k}^0. \quad (23)$$

Видно, что если в этом квадратичном по амплитудам соотношении заменить $\sqrt{\varepsilon\mu}$ на отрицательный показатель преломления $\sqrt{\varepsilon\mu} < 0$ в среде с $\varepsilon < 0, \mu < 0$, то получится не левая, как должно быть, а правая тройка векторов $\mathbf{k} \uparrow \uparrow (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. Таким образом, извлечение корня в равенствах (22), (23) не следует сопровождать сменой знака и с учетом положительности плотности энергии плотность импульса Минковского сонаправлена с волновым вектором: $\mathbf{g}^M \uparrow \uparrow \mathbf{k}$. Важно, что макроскопическая плотность импульса \mathbf{g}^M соответствует квазиимпульсу фотона в среде $\mathbf{p}_{ph} = \hbar\mathbf{k}$ и энергии фотона $E_{ph} = \hbar\omega$, для которых справедливы законы сохранения [1, 18–20]. Таким образом, если помещенное в среду с отрицательными проницаемостями тело поглощает излучение, оно должно приобретать импульс, направленный навстречу потоку энергии излучения [21]. Из соотношения (22), определения плотности полевого импульса Абрагама $\mathbf{g}^A = (\mathbf{S}/c^2)$, а также из того, что плотность потока энергии $\mathbf{S} = w\mathbf{u}$ определяется групповой скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{u}^0$, вытекает следующее соотношение между плотностями импульса Абрагама и Минковского:

$$\mathbf{g}^M = (\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0)(nn_{gr})\mathbf{g}^A = (\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0)(nn_{gr})g^A\mathbf{u}^0. \quad (24)$$

В отсутствие дисперсии $(\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0) = 1$, $n_{gr} = n$ и равенство (24) сводится к привычному соотношению между плотностями импульса Минковского и Абрагама $\mathbf{g}^M = n^2\mathbf{g}^A$. В среде с отрицательными проницаемостями $\varepsilon < 0, \mu < 0$ направления групповой и фазовой скоростей противоположны, $(\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0) = -1$, и плотность импульса Минковского противоположна плотности импульса Абрагама.

Потоки импульса электромагнитного поля в веществе

Для плоской волны согласно закону сохранения (18) тензор напряжений определяется элементами, совпадающими с элементами полевой части тензора напряжений Питаевского [6], и может быть выражен только через электрическое поле в виде

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha} = (\varepsilon\varepsilon_0/2)\{(E_\alpha^*E_\beta + E_\alpha E_\beta^*) - \delta_{\alpha\beta}(E_\gamma E_\gamma^*)\}. \quad (25)$$

Важно, что тензор напряжений в плоской волне можно выразить через групповую скорость и волновой вектор [5, 6, 16]. Выразим групповую скорость с помощью вектора Пойнтинга через полевые переменные. Пользуясь соотношением (16), получим:

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}/w = (1/2w)Re(\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0) = (1/2w\omega\mu\mu_0)Re(\mathbf{E}_0^* \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]). \quad (26)$$

Учитывая поперечность волны, выполним преобразование:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_0^* \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0])_\alpha &= e_{\alpha\beta\gamma}E_{0\beta}^*e_{\gamma\sigma\tau}k_\sigma E_{0\tau} = \\ &= (\delta_{\alpha\beta}E_{0\gamma}^*E_{0\gamma} - E_{0\beta}^*E_{0\alpha})k_\beta = \\ &= (\delta_{\alpha\beta}E_{0\gamma}^*E_{0\gamma} - E_{0\beta}^*E_{0\alpha} - E_{0\alpha}^*E_{0\beta})k_\beta = \\ &= -\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}(2/\varepsilon\varepsilon_0)\sigma_{\alpha\beta}k_\beta^0 \end{aligned} \quad (27)$$

и приведем соотношение (26) к виду

$$u_\alpha = -(1/w)(1/\sqrt{\varepsilon\mu})(1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})\sigma_{\alpha\beta}k_\beta^0. \quad (28)$$

Согласно последнему соотношению тензор напряжений можно представить в форме

$$\begin{aligned} -\sigma_{\alpha\beta} &= w(\sqrt{\varepsilon\mu}/c)u_\alpha k_\beta^0 = (w/\omega)u_\alpha k_\beta = \\ &= (w/\omega)k_\alpha u_\beta. \end{aligned} \quad (29)$$

В этой форме тензор напряжений совпадает с тензором напряжений Полевого–Рытова [5], как и должно быть для плоской квазимонохроматической волны [6, 16]. Нетрудно проверить, что величина (29) представляет собой плотность потока β -направлении α -компоненты импульса (22):

$$g_\alpha^M u_\beta = w(\sqrt{\varepsilon\mu}/c)k_\alpha^0 u_\beta = (w/\omega)k_\alpha u_\beta = -\sigma_{\alpha\beta}. \quad (30)$$

Выражения (29), (30) показывают, что в средах с отрицательными проницаемостями, когда волновой вектор и групповая скорость противоположны по направлению ($k_\alpha u_\alpha < 0$), полевые напряжения в среде противоположны по знаку по сравнению с напряжениями в среде с положительными проницаемостями.



Электромагнитные импульсы при преломлении волны

Для иллюстрации представленных выше соотношений рассмотрим преломление без отражения поляризованной волны, падающей на границу раздела между воздухом и диэлектриком под углом Брюстера. В случае поляризации в плоскости падения угол Брюстера φ определен выражениями

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sqrt{(\varepsilon^2 - \varepsilon\mu)/(\varepsilon^2 - 1)}, \\ \cos \varphi &= \sqrt{(\varepsilon\mu - 1)/(\varepsilon^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (31)$$

При этом угол преломления ψ согласно закону преломления удовлетворяет условию

$$\sin \psi = \sin \varphi / \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{(\varepsilon/\mu - 1)/(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (32)$$

Рассмотрим для простоты случай $\mu = \pm 1$, когда $\cos \varphi = \sin \psi$, т.е.

$$\sin \varphi / \sin \psi = \cos \psi / \cos \varphi = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (33)$$

Нормальные к границе раздела составляющие скорости распространения волнового фронта $c \cos \varphi$ в вакууме и $(c/\sqrt{\varepsilon\mu}) \cos \psi$ в диэлектрике оказываются в этом случае равными, поэтому объемы V_0, V' , заемаемые фронтом в единицу времени в вакууме и в диэлектрике, равны между собой. Следовательно, объем, содержащий определенное количество энергии волны (цуг, пакет), и плотность энергии остаются после преломления волны Брюстера в среду без дисперсии неизменными, $w_0 = w'$. Импульсы такого пакета просто пропорциональны векторам плотностей импульсов. Согласно формуле (22) в этом случае тангенциальные компоненты плотности импульса Минковского $g_t^0 = w^0(1/c) \sin \varphi$ в падающей волне и $g_t^M = w'(\sqrt{\varepsilon\mu}/c) \sin \psi$ в преломленной волне равны между собой. Это вполне соответствует тому, что сдвиг в тангенциальном направлении совмещает систему среда–граница–среда с собой, и в этом направлении сохраняется квазиимпульс.

В нормальном к границе раздела направлении инвариантность при сдвиге отсутствует и нормальная составляющая квазиимпульса не сохраняется. В этом направлении сохраняется плотность потока энергии и вместе с ней нормальная компонента плотности полевого импульса Абрагама. В диэлектрике присутствует также импульс, порожденный объемной силой Абрагама на диэлектрик.

Кроме того, следует учитывать давление поля на границу раздела. Оно равно разности давлений на противоположные стороны границы

и определяется различием тензоров напряжений в среде и вакууме. По воздействию на диэлектрик давление эквивалентно нормальному к границе потоку импульса. При этом в общем случае среды с дисперсией энергия, приходящаяся на один цуг волны, сосредоточена в объеме V_{gr} с эффективной плотностью $\tilde{w} = w_0(V_0/V_{gr})$. Поскольку объемы цуга до и после прохождения через границу пропорциональны нормальным скоростям, то $\tilde{w} = w_0(c \cos \varphi / u \cos \psi) = w'(v/u) = w$. Этот результат вполне соответствует формуле Бриллюэна (21). В направлении из вакуума к границе с нормалью \mathbf{v} в сторону диэлектрика давление P_v с учетом представления (29) для тензора напряжений определяется следующей разностью давлений по обе стороны границы:

$$\begin{aligned} P_v &= -\sigma_{0\alpha\beta} v_\alpha v_\beta + \sigma_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = \\ &= -v_\alpha v_\beta \left((w/\omega) k_\alpha u_\beta - (w_0/\omega) k_{0\alpha} u_{0\beta} \right) = \\ &= -\left[\pm (wu\sqrt{\varepsilon\mu}/c) (\cos \psi)^2 - w_0 (\cos \varphi)^2 \right] = \\ &= -w_0 (\cos \varphi)^2 (\pm n^2 - 1). \end{aligned} \quad (34)$$

В последнем соотношении учтено, что косинусы направляющих углов волнового вектора и групповой скорости совпадают в обычных средах (верхний знак) и имеют противоположные знаки в средах с отрицательными проницаемостями (нижний знак). Таким образом, отнесенная к среде эффективная плотность импульса давления на поверхность рассматриваемым пакетом равна

$$\begin{aligned} g_v^P &= P_v / (u \cos \psi) = \\ &= -[w_0 (\cos \varphi)^2 (\pm n^2 - 1)] / (u \cos \psi) = \\ &= -g_v^A (n_{gr}/n) (\pm n^2 - 1), \end{aligned} \quad (35)$$

так как $g_v^A = (w u / c^2) \cos \psi = (w_0 / c) \cos \varphi$.

Если V' – объем, заемаемый с фазовой скоростью волновым фронтом, то объем, который заполняется энергией с групповой скоростью, равен $V_{gr} = V'(n/n_{gr}) = V_0(n/n_{gr})$. Импульс давления, оказываемого цугом на границу среды, в соответствии с плотностью (35), равен

$$\begin{aligned} G_v^P &= g_v^P V_{gr} = -g_v^A V_{gr} (n_{gr}/n) (\pm n^2 - 1) = \\ &= -G_v^0 (\pm n^2 - 1). \end{aligned} \quad (36)$$

Нормальная к границе составляющая импульса Абрагама преломленного цуга в среде выразится через нормальную составляющую импульса падающего цуга формулой



$$G_v^A = g_v^A V_{gr} = (w u / c^2) \cos \psi V_{gr} = (w_0 / c) \cos \varphi V_{gr} = G_v^0 (n / n_{gr}). \quad (37)$$

Аналогично нормальную составляющую импульса Минковского запишем в виде

$$G_v^M = g_v^M V_{gr} = w (\pm \sqrt{\varepsilon \mu} / c) \cos \psi V_{gr} = \pm w_0 (1 / u) n \cos \varphi V_0 (n / n_{gr}) = \pm G_v^0 n^2. \quad (38)$$

Примем естественное предположение, что импульс силы Абрагама в среде с дисперсией численно равен, как и в среде без дисперсии, разности импульсов Минковского и Абрагама. Тогда нормальный импульс силы Абрагама с учетом выражений (37), (38) имеет вид

$$G_v^{fA} = G_v^M - G_v^A = G_v^0 (\pm n^2 - n / n_{gr}). \quad (39)$$

В результате получаем, что нормальный импульс цуга падающей волны сохраняется после преломления как сумма импульса давления на границу, импульса Абрагама и импульса силы Абрагама в объеме цуга:

$$G_v^P + G_v^A + G_v^{fA} = G_v^0. \quad (40)$$

Этот баланс выполняется и для тангенциальных составляющих. Тангенциальное напряжение P_τ вдоль границы определяется величиной

$$P_\tau = -\sigma_{0\alpha\beta} v_\alpha \tau_\beta + \sigma_{\alpha\beta} v_\alpha \tau_\beta = v_\alpha \tau_\beta [(w_0 / \omega) k_{0\alpha} u_{0\beta} - (w / \omega) k_\alpha u_\beta] = [w_0 \sin \varphi \cos \varphi - (w u \sqrt{\varepsilon \mu} / c) \sin \psi \cos \psi] = 0. \quad (41)$$

Следовательно, сдвиговой импульс цуга на границе при полном преломлении отсутствует:

$$G_\tau^P = g_\tau V_{gr} = P_\tau / (u \cos \psi) V_{gr} = 0. \quad (42)$$

Тангенциальный импульс Абрагама G_τ^A в преломленном цуге зависит от показателей преломления и направлен противоположно в средах с положительной и отрицательной проницаемостями:

$$G_\tau^A = g_\tau^A V_{gr} = (w u / c^2) \sin \psi V_{gr} = \pm (w_0 / c n^2) \sin \varphi V_0 = \pm G_\tau^0 (1 / n n_{gr}). \quad (43)$$

Тангенциальные импульсы Минковского в цуге до и после преломления, как уже отмечалось, одинаковы:

$$G_\tau^M = g_\tau^M V_{gr} = w (\sqrt{\varepsilon \mu} / c) \sin \psi V_{gr} = w_0 (1 / u) (\sin \varphi / n) V_0 (n / n_{gr}) = G_\tau^0. \quad (44)$$

Тангенциальный импульс силы Абрагама G_τ^{fA} определим аналогично нормальному импульсу (39):

$$G_\tau^{fA} = G_\tau^M - G_\tau^A = (1 \mp (1 / n n_{gr})) G_\tau^0. \quad (45)$$

Из соотношений (42), (43), (45) получаем

$$G_\tau^P + G_\tau^A + G_\tau^{fA} = G_\tau^0. \quad (46)$$

Таким образом, согласно равенствам (40), (46) импульс цуга падающей волны сохраняется после преломления как сумма импульса давления на границу, импульса Абрагама и импульса силы Абрагама в объеме цуга. При этом тангенциальная составляющая этой суммы (46) представляет собой тангенциальную составляющую импульса Минковского (44), поскольку слагаемое G_τ^P равно нулю. Нормальная же составляющая импульса цуга не сохраняется как импульс Минковского.

Заключение

Закон сохранения импульса приобретает простую форму сохранения квазиимпульса в тех направлениях, в которых имеется однородность характеристик среды, например, в направлениях вдоль плоской границы между однородными средами. В частности, в приходящей и исходящих от границы монохроматических волнах сохраняется тангенциальная компонента импульса Минковского. В нормальном направлении к границе раздела вследствие непрерывности плотности потока энергии непрерывна нормальная компонента плотности импульса Абрагама. В этом направлении импульс сохраняется после преломления как сумма импульса давления на границу, импульса Абрагама и импульса силы Абрагама.

Следует заметить, что в случае с дисперсией плотность импульса Минковского остается связанной с плотностью энергии и фазовой скоростью таким же соотношением, как и в случае без дисперсии. В средах с дисперсией, в том числе с противоположными направлениями потока энергии и волнового вектора, импульс Минковского остается сонаправленным с волновым вектором. При этом плотность импульса Минковского в среде с дисперсией связана с плотностью импульса Абрагама коэффициентом, равным произведению фазового и группового показателей преломления, причем в средах с противоположными фазовой и групповой



скоростью импульсы Абрагама и Минковского противоположны друг другу.

При описании электромагнитного давления на границу раздела сред важно использовать соответствующие выражения для тензора полевых напряжений. Соответствующая полевая часть тензора напряжений Питаевского может быть выражена для волны в среде с дисперсией в форме тензора Полевого–Рытова через произведение компонент фазовой и групповой скорости.

В заключение заметим, что вопрос об электромагнитных импульсах и пондеромоторных силах существенно усложняется, когда приходится учитывать поглощение в среде [22] или форму облучаемого тела [23].

Список литературы

1. *Griffiths D. J.* Resource Letter EM-1: Electromagnetic Momentum // *Amer. J. Phys.* 2012. Vol. 75. P. 7–18. DOI: 10.1119/1.3641979.
2. *Ландау Д. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
3. *Walker G. B., Lahoz D. G.* Experimental observation of Abraham force in a dielectric // *Nature.* 1975. Vol. 253. P. 339–340.
4. *Jones R. V., Leslie B.* The measurement of optical radiation pressure in dispersive media // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1978. Vol. 360. P. 347–363. DOI: 10.1098/rspa.1978.0072.
5. *Полевой В. Г., Рытов С. М.* О четырехмерной групповой скорости // *УФН.* 1978. Т. 125. С. 549–505.
6. *Макаров И. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные волны с отрицательной групповой скоростью и тензор энергии-импульса // *УФН.* 2011. Т. 181. С. 1357–1368. DOI: 10.3367/UFNr.0181.2011n.1357.
7. *Топтыгин И. Н., Левина К.* Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в средах с дисперсией // *УФН.* 2016. Т. 186. С. 146–158. DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602c.0146.
8. *Веселаго В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // *УФН.* 1967. Т. 92. С. 517–526. DOI: 10.3367/UFNr.0092.196707d.0517.
9. *Mansuripur M.* Resolution of the Abraham-Minkowski Controversy // *Opt. Commun.* 2010. Vol. 283. P. 1997–2006.
10. *Barnett S. M.* Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 104. P. 070401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070401.
11. *Пайерлс Р.* Импульс и квазиимпульс света и звука // *УФН.* 1991. Т. 161. С. 161–176. DOI: 10.3367/UFNr.0161.199109d.0161.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
13. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
14. *Пафомов В. Е.* Переходное излучение и черенковское излучение // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 36. С. 1853–1858.
15. *Веселаго В. Г.* Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // *УФН.* 2003. Т. 173. С. 790–794. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200307m.0790.
16. *Веселаго В. Г.* Перенос энергии, импульса и массы при распространении электромагнитной волны в среде с отрицательным преломлением // *УФН.* 2009. Т. 179. С. 689–694. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200906j.0689.
17. *Раутиан С. Г.* Об отражении и преломлении на границе среды с отрицательной групповой скоростью // *УФН.* 2008. Т. 178. С. 1017–1024. DOI: 10.3367/UFNr.0178.200810a.1017.
18. *Гинзбург В. Л.* О законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде и о тензоре энергии-импульса в макроскопической электродинамике // *УФН.* 1973. Т. 110. С. 309–319. DOI: 10.3367/UFNr.0110.197306f.0309.
19. *Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jian, Lixin Ran, Jiangtao Huangfu, Bao-Ian Wu, Jin Au Kong, Min Chen.* Experimental Verification of Reversed Cherenkov Radiation in Left-Handed Metamaterial // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103. P. 194801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194801.
20. *Campbell G. K., Leanhardt A. E., Mun J., Boyd M., Streed W., Ketterle W., Pritchard D. E.* Photon Recoil Momentum in Dispersive Media // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 170403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.170403.
21. *Франк И. М.* Импульс фотона в среде с отрицательной групповой скоростью // *Письма в ЖЭТФ.* 1978. Т. 28. С. 482–485.
22. *Давидович М. В.* О законах сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в среде и при дифракции на проводящей пластине // *УФН.* 2010. Т. 180. С. 623–638. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201006e.0623.
23. *Чу С.* Управление нейтральными частицами // *УФН.* 1999. Т. 169. С. 274–291. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199903d.0274.

Образец для цитирования:

Цой В. И. Электромагнитные импульсы при преломлении волны в среде с дисперсией // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2018. Т. 18, вып. 1. С. 23–31. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-23-31.



Electromagnetic Momenta at Wave Refraction into Dispersive Medium

V. I. Tsoy

Valery I. Tsoy, ORCID 0000-0001-8055-4385, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, tsoyvi@info.sgu.ru

Background and Objectives: There are two types of a field momentum in the classical electrodynamics, namely, the Abraham momentum, and the Minkowski momentum. The question arises how these momenta are conserved in the refraction on the boundary surface of a medium. **Methods:** The electromagnetic stress tensor and momentum density in a dispersive medium, including the case of negative permittivity and negative permeability, are derived and used in this paper. **Results and Conclusion:** It is shown that the momentum of an incidence wave is conserved as the sum of the Abraham momentum, the Abraham force momentum, and the momentum of the electromagnetic pressure on the boundary surface of the medium. In the same time, the tangential component of the incidence momentum is conserved as the Minkowski momentum. The reason is that there is an invariance of the "vacuum–plane–matter" system in the transfer along the boundary surface of the medium. Consequently, a quasi-momentum should be conserved in this direction. On the other hand, there is no such symmetry in the direction perpendicular to the boundary surface of the medium. Consequently, any quasi-momentum in this direction does not exist. This shows that the Abraham momentum and the Minkowski momentum can work together, although these quantities corresponds to the different expansions of the total momentum into field and media parts.

Key words: coexistence of the Abraham and Minkowski momenta, dispersive medium, left-handed medium.

References

1. Griffiths D. J. Resource Letter EM-1: Electromagnetic Momentum. *Amer. J. Phys.*, 2012, vol. 80, pp. 7–18. DOI: 10.1119/1.3641979.
2. Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. *Electrodynamics of Continuous Media*. 2nd ed. Butterworth-Heinemann, 1984. Vol. 8. 460 p. (Russ. ed.: Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 620 p.).
3. Walker G. B., Lahoz D. G. Experimental observation of Abraham force in a dielectric. *Nature*, 1975, vol. 253, pp. 339–340.
4. Jones R. V., Leslie B. The measurement of optical radiation pressure in dispersive media. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1978, vol. 360, pp. 347–363. DOI: 10.1098/rspa.1978.0072.
5. Polevoi V. G., Rytov S. M. The four-dimensional group velocity. *Sov. Phys. Usp.*, 1978, vol. 21, pp. 630–638. DOI: 10.1070/PU1978v021n07ABEH005668.
6. Makarov V. P., Rukhadze A. A. Negative group velocity electromagnetic waves and the energy-momentum tensor. *Phys. Usp.*, 2011, vol. 54, pp. 1285–1296. DOI: 10.3367/UFNe.0181.2011In.1357.
7. Toptygin I. N., Levina K. Energy-momentum tensor of the electromagnetic field in dispersive media. *Phys. Usp.*, 2016, vol. 59, pp. 141–152. DOI: 10.3367/UFNe.0186.201602c.0146.
8. Veselago V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov. Phys. Usp.*, 1968, vol. 10, pp. 509–514. DOI: 10.1070/PU1968v010n04ABEH003699.
9. Mansuripur M. Resolution of the Abraham–Minkowski Controversy. *Opt. Commun.*, 2010, vol. 283, pp. 1997–2006.
10. Barnett S. M. Resolution of the Abraham–Minkowski Dilemma. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 104, pp. 070401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070401.
11. Peierls R. Impul's i kvaziimpuls sveta i zvuka [Momentum and Pseudomomentum of Light and Sound]. *UFN*, 1991, vol. 161, pp. 161–176. DOI: 10.3367/UFNr.0161.199109d.0161 (in Russian).
12. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The classical theory of fields*. Oxford, Pergamon Press, 1971. 374 p. (in Russ. ed.: Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoriya polya* [The classical theory of fields]. Moscow: Nauka Publ., 1988. 509 p.).
13. Mandelshtam L. I. *Lektsii po teorii otositel'nosti i kvantovoy mekhanike* [Lectures on the relativity and quantum mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 440 p. (in Russian).
14. Pafomov V. E. Transition Radiation and Cerenkov Radiation. *Soviet Physics JETP*, 1959, vol. 36, pp. 1321–1324.
15. Veselago V. G. Electrodynamics of materials with negative index of refraction. *Phys. Usp.*, 2003, vol. 46, pp. 764–768. DOI: 10.1070/PU2003v046n07ABEH001614.
16. Veselago V. G. Energy, linear momentum and mass transfer by an electromagnetic wave in a negative refraction medium. *Phys. Usp.*, 2009, vol. 52, pp. 649–654. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200906j.0689.
17. Rautian S. G. Reflection and refraction at the boundary of a medium with negative group velocity. *Phys. Usp.*, 2008, vol. 51, pp. 981–988. DOI: 10.1070/PU2008v-051n10ABEH006594.
18. Ginzburg V. L. The laws of conservation of energy and momentum in emission on electromagnetic waves (photons) in a medium and the energy-momentum tensor in macroscopic electrodynamics *Sov. Phys. Usp.*, 1973, vol. 16, pp. 434–439. DOI: 10.1070/PU1973v-016n03ABEH005193.
19. Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jian, Lixin Ran, Jiangtao Huangfu, Bac-Ian Wu, Jin Au Kong, Min Chen. Experimental Verification of Reversed Cherenkov Radiation in Left-Handed Metamaterial. *Phys.*



- Rev. Lett.*, 2009, vol. 103, pp. 194801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194801.
20. Campbell G. K., Leanhardt A. E., Mun J., Boyd M., Streed W., Ketterle W., Pritchard D. E. Photon Recoil Momentum in Dispersive Media. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 94, pp. 170403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.170403.
21. Frank I. M. Photon momentum in a medium with negative group velocity. *JETP Lett.*, 1978, vol. 28, pp. 446–448.
22. Davidovich M. V. On energy and momentum conservation laws for an electromagnetic field in a medium or at diffraction on a conducting plate. *Phys. Usp.*, 2010, vol. 180, pp. 623–638. DOI: 10.3367/UFNe.0180.201006e.0623.
23. Chu C. Upravleniye neyitralnymi chastitsami [The Manipulation of Neutral Particles]. *UFN*, 1999, vol. 169, pp. 274–291. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199903d.0274 (in Russian).

Cite this article as:

Tsoy V. I. Electromagnetic Momenta at Wave Refraction into Dispersive Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 23–31 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-23-31.
