



РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 534.23:537.874.6

ДВА ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОЙ ДВУПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ ИЗ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ЖИДКОМ СЛОЕ

С. А. Маненков

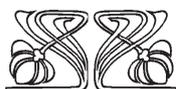
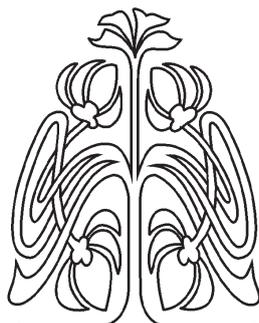
Маненков Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики, mail44471@mail.ru

На основе модифицированного метода дискретных источников (ММДИ) разработаны две методики решения скалярной трехмерной задачи рассеяния на плоской решетке, состоящей из импедансных тел вращения, расположенной в жидком слое. В работе предложен эффективный алгоритм нахождения периодической функции Грина, учитывающий слоистый характер среды. Выполнено сравнение результатов, полученных при помощи обеих методик. Для тестирования метода проведено сравнение угловой зависимости диаграммы рассеяния вытянутого суперэллипсоида вращения, полученной при помощи ММДИ и метода диаграммных уравнений. Для проверки сходимости метода построена невязка краевого условия на контуре осевого сечения центрального элемента решетки, состоящей из сплюснутых абсолютно мягких сфероидов. Проведена проверка точности выполнения закона сохранения энергии для разных геометрий элементов решетки. Продемонстрирована высокая точность получаемых результатов. Приведены численные результаты для различных геометрий элементов решетки для двух значений импеданса на поверхности элементов решетки. Показано существенное отличие поведения частотных зависимостей коэффициентов отражения и прохождения решетки, расположенной в плоскостной среде, от зависимостей данных величин для решетки, расположенной в свободном пространстве. **Ключевые слова:** дифракция волн на решетках, расположенных в слоистых средах; метод дискретных источников; аналитическое продолжение волновых полей.

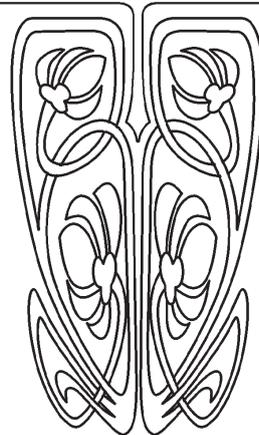
DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-46-63

Введение

Задача дифракции волн на периодических структурах представляет большой практический интерес. В частности, решетки, погруженные в слоистую среду, применяются в гидроакустике, так как на низких частотах такие структуры могут быть использованы как отражающие или поглощающие перегородки. Таким образом, наличие слоистой среды существенным образом сказывается на отражательных свойствах решеток. Заметим также, что в случае абсолютно мягких границ элементов решеток рассматриваемая структура моделирует рассеяние звуковой волны на пузырьках воздуха, расположенных в жидкости [1, 2]. В случае абсолютно жестких элементов решетка представляет собой (в первом приближении) модель из одинаковых плавающих в жидкости упругих тел [3]. В литературе рассматривались задачи дифракции как на решетках, расположенных в свободном пространстве [1, 2, 4–16],



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





так и на телах и решетках, расположенных в плоскослоистой среде [17–24]. Заметим, что обзор литературы, посвященной дифракции волн на решетках в однородной среде, приведен в работе [14]. Среди публикаций, связанных с дифракцией на решетках (и отдельных телах), расположенных в плоскослоистой среде, отметим работу [17], в которой рассматривается двумерная задача дифракции электромагнитных волн на решетке из цилиндрических тел, расположенной в диэлектрическом слое. Задача решалась при помощи метода интегральных уравнений. В статье [18] рассмотрена трехмерная задача дифракции плоской акустической волны на двупериодической структуре, состоящей из ячеек в виде параллелепипедов, окруженных двумя однородными полупространствами. Для решения задачи использовался метод конечных элементов. В работе [19] при помощи метода задачи Римана–Гильберта рассмотрена дифракция плоской волны на решетке из лент, расположенной в киральной плоскослоистой среде. Работы [20, 21] посвящены решению задачи дифракции акустического поля на решетках, состоящих из абсолютно жестких цилиндрических тел и цилиндрических резонансных включений, погруженных в слой из пористого материала. Задача решалась аналитически (на низких частотах) и численно при помощи метода конечных элементов. В статье [22] рассмотрена дифракция электромагнитного поля на конечной трехмерной решетке, элементами которой являются проводящие проволоки малого электрического радиуса. Решетка располагалась внутри диэлектрика конечных размеров. Задача решалась при помощи метода вспомогательных источников (МВИ). Работа [23] посвящена двумерной задаче дифракции плоской волны на многорядной решетке, расположенной в диэлектрическом слое. Для решения задачи использовался модифицированный метод нулевого поля. В статье [24] рассмотрено рассеяние акустического поля на упругих произвольных телах, расположенных в слоистой среде. Задача решалась с использованием метода, являющегося комбинацией метода конечных элементов и метода функции Грина. Приведен пример расчета рассеяния на телах, расположенных в океане, и проведено сравнение с экспериментальными данными.

В настоящей работе рассмотрена дифракция плоской волны на плоской решетке, состоящей из импедансных тел вращения, которая расположена в симметричном жидком слое, ограниченном

одинаковыми жидкими полупространствами. Одним из эффективных методов решения задач дифракции является метод дискретных источников (МДИ) или метод вспомогательных источников [22, 25]. Основная идея этого метода состоит в том, что вспомогательная поверхность, являющаяся носителем дискретных источников, и поверхность рассеивателя разнесены на некоторое расстояние. Существует много вариантов МДИ. В настоящей работе использовался модифицированный метод дискретных источников (ММДИ) [26–29]. Отметим, что данная работа по существу является обобщением работ [12–14] применительно к акустической задаче дифракции на плоской решетке, расположенной в плоскослоистой среде. Настоящую работу можно также считать обобщением работы [23] на трехмерную задачу дифракции.

Основное отличие ММДИ от других вариантов метода дискретных источников состоит в следующем. Во-первых, носитель вспомогательных источников должен охватывать особенности продолжения волнового поля внутрь рассеивателя. Во-вторых, для быстрой сходимости численного алгоритма вспомогательная поверхность должна выбираться при помощи аналитической деформации границы рассеивателя [26–29]. Еще один важный шаг, позволяющий получать высокую точность результатов, использование различных систем координат для построения носителя дискретных источников. В частности, в настоящей работе применяли сферические, сфероидальные и тороидальные координаты [14, 28, 29].

Как известно [26–29], в рамках ММДИ задача дифракции сводится к решению интегрального уравнения первого рода относительно некоторой неизвестной функции, носителем которой является вспомогательная поверхность, расположенная внутри поверхности рассеивателя. Для алгебраизации поверхностного интегрального уравнения можно использовать два подхода. Первый вариант ММДИ основан на алгебраизации задачи при помощи непосредственного применения метода коллокации. При таком подходе, во-первых, возможно обобщение метода на произвольные тела (не тела вращения), во-вторых, проще вычислять функцию Грина (ФГ), т. е. не требуется находить коэффициенты Фурье для ФГ. Второй подход аналогичен алгоритму, предложенному в работах [12, 13], причем для сведения задачи к алгебраической системе использовалась осевая симметрия элементов



решетки. При этом поверхностное интегральное уравнение решалось при помощи разложения неизвестной функции и ядра в ряд Фурье по угловой координате с последующим применением метода коллокации. Как показывают расчеты, при таком подходе размер возникающих алгебраических систем существенно меньше, чем при использовании первой методики.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую решетку, составленную из одинаковых тел вращения, имеющую два периода – d_x и d_y . Предполагаем, что «центры» тел вращения лежат в одной плоскости, а оси симметрии тел перпендикулярны этой плоскости. Введем декартову систему координат, причем ось z направим перпендикулярно плоскости решетки. Начало координат выберем внутри одного из элементов, который будем называть центральным элементом решетки. Для упрощения выкладок предполагаем, что плоскость, в которой лежат «центры» элементов решетки, совпадает с плоскостью $z = 0$. Считаем, что решетка расположена внутри симметричного жидкого слоя толщины h с характеристиками (плотностью и скоростью звука) ρ_2 и c_2 (рис. 1). Характеристики среды вне жидкого слоя ρ_1 и c_1 . Случай, когда решетка расположена несимметрично относительно границ жидкого слоя, рассматривается аналогичным образом. Занумеруем поверхности элементов решетки S_{ij} в порядке возрастания осей x и y , где $i, j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Центральный элемент решетки ограничен поверхностью S_{00} .

Предполагаем, что структура облучается плоской волной

$$U_{nad} = \exp(-ik_1 r (\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta)), \quad (1)$$

где U_{nad} – поле (давление) падающей волны; $k_1 = \omega/c_1$ – волновое число среды, внешней по отношению к слою; (r, θ, φ) – сферические координаты; θ_0, φ_0 – углы падения. Рассеянное поле U^1 вне решетки удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta U^1 + k_2^2 U^1 = 0, \quad (2)$$

внутри жидкого слоя и вне жидкого слоя:

$$\Delta U^1 + k_1^2 U^1 = 0, \quad (3)$$

Здесь $k_2 = \omega/c_2$. Для дальнейшего удобно считать, что в рассматриваемых средах имеется малое поглощение, т. е. $\text{Im} k_1 < 0$ и $\text{Im} k_2 < 0$.

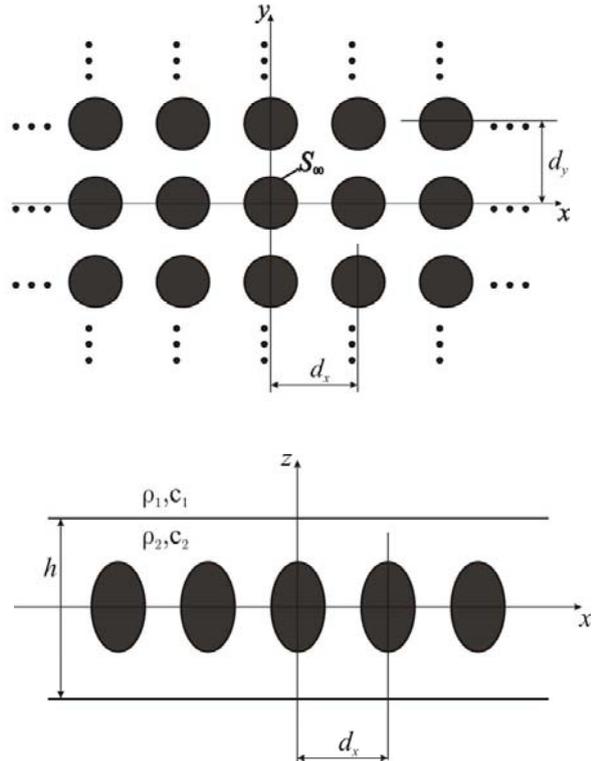


Рис. 1. Геометрия задачи
Fig.1. Geometry of the problem

На границах раздела сред выполнены условия сопряжения

$$U^1 \Big|_{y=h/2-0} = U^1 \Big|_{y=h/2+0},$$

$$\frac{1}{v_{21}} \frac{\partial U^1}{\partial z} \Big|_{y=h/2-0} = \frac{\partial U^1}{\partial z} \Big|_{y=h/2+0}, \quad (4)$$

где $v_{21} = \rho_2 / \rho_1$. На поверхности каждого элемента решетки выполнено импедансное краевое условие:

$$U = W_0 \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (5)$$

где $\partial / \partial n$ – производная по нормали, внешней к поверхности тела; $U = U^0 + U^1$ – полное поле вне области, занимаемой решеткой (U^0 – первичное поле, определяемое из задачи дифракции на жидком слое в отсутствие решетки); W_0 – импеданс элемента решетки. Отметим, что в случае $W_0 = 0$ имеем решетку, составленную из абсолютно мягких тел, а в случае $W_0 = \infty$ – из абсолютно жестких.

Вторичное поле в области вне решетки удовлетворяет условиям периодичности Флоке:

$$U^1(x + d_x, y, z) = U^1(x, y, z) \exp(-i\tau_x), \quad (6)$$



$$U^1(x, y + d_y, z) = U^1(x, y, z) \exp(-i\tau_y), \quad (7)$$

где $\tau_x = k_1 d_x \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $\tau_y = k_1 d_y \sin \theta_0 \sin \varphi_0$ – параметры Флоке. На бесконечности полное поле удовлетворяет условиям излучения:

$$U(x, y, z) = U_{nao}(x, y, z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{pq}^- \exp(-i\mathbf{\kappa}_{pq}^- \mathbf{r}), \quad (8)$$

$$z < -h/2,$$

$$U(x, y, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{pq}^+ \exp(-i\mathbf{\kappa}_{pq}^+ \mathbf{r}), \quad z > h/2, \quad (9)$$

где $\mathbf{\kappa}_{pq}^{\pm} = u_p \mathbf{i}_x + v_q \mathbf{i}_y \pm \Gamma_{pq}^1 \mathbf{i}_z$, $u_p = \frac{\tau_x + 2\pi p}{d_x}$,

$$v_q = \frac{\tau_y + 2\pi q}{d_y}, \quad \Gamma_{pq}^1 = \sqrt{k_1^2 - u_p^2 - v_q^2},$$

причем знак квадратного корня выбирается из условия неположительности его мнимой части. В формулах (8) и (9) A_{pq}^+ и A_{pq}^- – неизвестные коэффициенты. Заметим, что величины $|A_{00}^-|$ и $|A_{00}^+|$ представляют собой модули коэффициентов отражения и прохождения плоской волны (1) от слоя с решеткой.

$$G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\gamma_2(z+z')) + V(\kappa) \exp(-i\gamma_2 h) \cos(\gamma_2(z-z'))] \times \quad (13)$$

$$\times \frac{V(\kappa) \exp(-i\gamma_2 h)}{\sigma(\kappa)\gamma_2} \exp(-i\xi(x-x' - pd_x) - i\eta(y-y' - qd_y)) d\xi d\eta \cdot \exp(-ip\tau_x - iq\tau_y).$$

В формулах (12) и (13)

$$G_0(R_{pq}) = \frac{\exp(-ik_2 R_{pq})}{4\pi R_{pq}}, \quad R_{pq} = \sqrt{(x-x' - pd_x)^2 + (y-y' - qd_y)^2 + (z-z')^2}, \quad (14)$$

$$V(\kappa) = \frac{\gamma_2 - v_{21}\gamma_1}{\gamma_2 + v_{21}\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - \kappa^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - \kappa^2}, \quad \sigma(\kappa) = 1 - V^2(\kappa) \exp(-i2\gamma_2 h), \quad \kappa = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (15)$$

В формуле (11) $G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – ФГ решетки в безграничной среде с волновым числом k_2 , а $G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – добавочная ФГ, обусловленная наличием границ раздела сред. Заметим, что величина $V(\kappa)$ имеет смысл коэффициента отражения плоской волны от границ жидкого слоя. Из приведенных формул следует, что волновое поле, записанное в виде (10), с учетом формул (11) – (15) удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям сопряжения на границах жидкого слоя и условию периодичности Флоке.

2. Вывод интегрального уравнения

Будем решать поставленную задачу с помощью метода вспомогательных токов, который в дальнейшем сводится к ММДИ [12–14]. Для этого представим волновое поле вне области, занимаемой решеткой в виде

$$U(\mathbf{r}) = U^0(\mathbf{r}) + \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds'. \quad (10)$$

В этой формуле Σ – вспомогательная поверхность, расположенная внутри исходной поверхности центрального элемента решетки S_{00} , а J – неизвестная функция, заданная на поверхности Σ . Отметим, что функция J имеет смысл плотности вспомогательных источников вторичного поля. Функция G представляет собой периодическую функцию Грина (ФГ) решетки, которая имеет вид [30]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (11)$$

где

$$G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_0(R_{pq}) \exp(-ip\tau_x - iq\tau_y), \quad (12)$$

Рассмотрим вопрос о построении носителя для неизвестной функции J . Как было указано во введении, для быстрой сходимости численного алгоритма вспомогательная поверхность должна выбираться при помощи аналитической деформации границы рассеивателя. Поясним это подробнее.

Предположим вначале, что поверхность центрального элемента решетки S_{00} задана в сферических координатах:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (16)$$



где $r = r(\theta)$ и $\theta \in [0, \pi]$. Введем переменную $\xi(\theta) = r(\theta) \exp(i\theta) = z + i\rho$, где (ρ, φ, z) – цилиндрические координаты. Основная идея ММДИ состоит в том, чтобы считать угол θ комплексным, т. е. положить вместо угла θ угол $\theta + i\delta$ в формуле для $\xi(\theta)$. Здесь δ – положительный параметр, определяющий степень деформации исходной поверхности тела. Выбор этого параметра подробно описан в работах [26–29]. С увеличением δ точки вспомогательной поверхности будут перемещаться внутрь исходной поверхности элемента решетки, двигаясь по ортогональным траекториям [26, 27]. При этом уравнения вспомогательной поверхности Σ в сферической системе координат примут вид

$$r_\Sigma = |\xi|, \theta_\Sigma = \arg \xi, \xi(\theta + i\delta) = r(\theta + i\delta) \exp(i\theta - \delta). \quad (17)$$

Для нахождения декартовых координат точки на вспомогательной поверхности используем формулы

$$x_\Sigma = \text{Im } \xi \cos \varphi, \quad y_\Sigma = \text{Im } \xi \sin \varphi, \quad z_\Sigma = \text{Re } \xi. \quad (18)$$

Пусть далее поверхность центрального элемента решетки задана в вытянутых сфероидальных координатах:

$$\begin{aligned} x &= f \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, & y &= f \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z &= f \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{aligned} \quad (19)$$

причем уравнение S_{00} имеет вид $\alpha = \alpha(\beta)$, где $\beta \in [0, \pi]$. Тогда вспомогательная поверхность определяется соотношениями [28]

$$\alpha_\Sigma = \operatorname{Re} Z, \quad \beta_\Sigma = \operatorname{Im} Z, \quad Z(\beta) = \alpha(\beta + i\delta) + i(\beta + i\delta), \quad (20)$$

где $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \varphi)$ – сфероидальные координаты «образа» точки с координатами (α, β, φ) на исходной поверхности. Для получения декартовых координат точки на вспомогательной поверхности нужно вновь использовать формулы (18), в которых в данном случае $\xi(\beta) = z + i\rho = f \operatorname{ch} Z(\beta)$. Для иллюстрации выбора носителя вспомогательной поверхности предположим, что элементы решетки представляют собой вытянутые сфероиды, при этом поверхность центрального элемента описывается уравнением $\alpha = \alpha_0$. Тогда в соответствии с формулой (20) имеем $Z(\beta) = \alpha_0 - \delta + i\beta$ и $\alpha_\Sigma = \alpha_0 - \delta$, $\beta_\Sigma = \beta$. То есть

вспомогательная поверхность Σ также будет сфероидом, лежащим внутри S_{00} и софокусным с поверхностью центрального элемента.

В случае сплюснутых сфероидальных координат $\xi(\beta) = f \operatorname{sh} Z(\beta)$. Приведем также формулы выбора вспомогательной поверхности для случая тороидальных координат. Как известно, тороидальные координаты задаются формулами [31]

$$x = \frac{f \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{f \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{f \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad (21)$$

где уравнение S_{00} вновь имеет вид $\alpha = \alpha(\beta)$, причем $\beta \in [0, 2\pi]$. Для нахождения декартовых координат точек вспомогательной поверхности используем формулы (18), в которых

$\xi(\beta) = if \operatorname{cth} \left(\frac{Z(\beta)}{2} \right)$. В дальнейших формулах будем считать, что поверхность центрального элемента решетки задана в ортогональных координатах (α, β, φ) уравнением $\alpha = \alpha(\beta)$, где $\beta \in [0, \beta_{\max}]$ ($\beta_{\max} = \pi$ или $\beta_{\max} = 2\pi$).

В силу периодичности рассматриваемой структуры и падающего поля задача сводится к определению функции J только на поверхности Σ центрального элемента решетки. Для нахождения этой функции подставим выражение для волнового поля в виде (10) в граничное условие (5) на поверхности центрального элемента решетки. В результате получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - W_0 \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) J(\mathbf{r}') ds' = \\ & = - \left(U^0(\mathbf{r}) - W_0 \frac{\partial U^0(\mathbf{r})}{\partial n} \right), \quad \mathbf{r} \in S_{00}. \end{aligned} \quad (22)$$

Сделаем замену неизвестной функции J по формуле [14]:

$$I = J h_\varphi h_\Sigma \sqrt{1 + (\dot{\alpha}_\Sigma)^2}. \quad (23)$$

В формуле (23) h_φ и $h_\Sigma = h_\alpha = h_\beta$ – коэффициенты Ламе соответствующей системы координат в точке с координатами $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \varphi)$ на вспомогательной поверхности Σ . Точка в формуле (23) означает дифференцирование по β_Σ .

Заметим, что первичное поле внутри и вне жидкого слоя имеет вид

$$U^0 = \begin{cases} \left(\exp(-i\gamma_1^0 z) + R_0 \exp(i\gamma_1^0 z) \right) \exp(-ik_1 x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - ik_1 y \sin \theta_0 \sin \varphi_0), & z < -h/2, \\ \left(A \cos(\gamma_2^0 z) + B \sin(\gamma_2^0 z) \right) \exp(-ik_1 x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - ik_1 y \sin \theta_0 \sin \varphi_0), & -h/2 < z < h/2, \\ T_0 \exp(-i\gamma_1^0 z) \exp(-ik_1 x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - ik_1 y \sin \theta_0 \sin \varphi_0), & z > h/2, \end{cases} \quad (24)$$



где $\gamma_1^0 = k_1 \sin \theta_0$, $\gamma_2^0 = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}$. В этих формулах коэффициенты отражения R_0 , прохождения T_0 плоской волны от слоя (в отсутствие решетки), а также постоянные A и B находятся подстановкой формул (24) в граничные условия при $z = \pm h/2$ (на границах раздела сред). Выражения для указанных величин не приводятся в данной работе, поскольку они общеизвестны.

3. Алгебраизация задачи (два подхода)

Интегральное уравнение (22) можно решать методом коллокации. Для этого заменим поверхностные интегралы в (22) на двойные интегралы по прямоугольнику $[0, \beta_{\max}] \times [0, 2\pi]$. Выберем в области интегрирования прямоугольную сетку:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\beta_{\max}}{N} \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad n = \overline{1, N}, \\ \varphi_m &= \frac{2\pi}{M} \left(m - \frac{1}{2} \right), \quad m = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее заменим двойные интегралы в формуле (22) суммами Римана. Приравняем полученные равенства в точках коллокации, которые выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{\nu\mu}^* &= \rho(\alpha(\beta_\nu), \beta_\nu) \cos \varphi_\mu, \\ y_{\nu\mu}^* &= \rho(\alpha(\beta_\nu), \beta_\nu) \sin \varphi_\mu, \quad z_{\nu\mu}^* = z(\alpha(\beta_\nu), \beta_\nu). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\nu = \overline{1, N}$ и $\mu = \overline{1, M}$. В результате перейдем от интегрального уравнения к следующей алгебраической системе относительно неизвестных значений функции I в точках \mathbf{r}_{nm} на вспомо-

$$W_{sl}^{I,II} = \frac{i^{s-l}}{\pi k_2^{|l|+1}} \int_0^\infty dw \int_{-\infty}^\infty \tilde{P}_s^l(w/k_2) (i \operatorname{sign}(l) \kappa \pm \chi)^{|l|} \frac{1 - g^{2Q+1} \exp(-iQ_1(d_y \chi \pm \tau_y))}{g^Q (1-g) 1 - \exp(-i(d_y \chi \pm \tau_y))} \frac{d\kappa}{\chi}, \quad (32)$$

$$W_{sl}^{III,IV} = \frac{2i^{s-l}}{k_2^{|l|+1} d_y} \sum_{q=-\infty}^\infty \int_0^\infty \tilde{P}_s^l(w/k_2) (-v_q \pm i \operatorname{sign}(l) \chi_q)^{|l|} \frac{\exp(-iQ_1(d_x \chi_q \pm \tau_x))}{1 - \exp(-i(d_x \chi_q \pm \tau_x))} \frac{dw}{\chi_q}, \quad (33)$$

где $\chi_q = \sqrt{k_2^2 - v_q^2 - w^2}$, а знаки «+» и «-» относятся к W_{sl}^I, W_{sl}^{III} и W_{sl}^{II}, W_{sl}^{IV} соответственно. В (32) и (33) $Q_1 = Q+1$ и $g = \exp(i(\tau_x - wd_x))$.

$$\begin{aligned} G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{4\pi i}{d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^\infty \sum_{q=-\infty}^\infty \left[\cos(\Gamma_{pq}(z+z')) + V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq}h) \cos(\Gamma_{pq}(z-z')) \right] \times \\ &\times \frac{V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq}h)}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}} \exp(-iu_p(x-x') - iv_q(y-y')), \end{aligned} \quad (34)$$

гательной поверхности центрального элемента решетки:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{nm}^{\nu\mu} c_{nm} = b^{\nu\mu}. \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{nm}^{\nu\mu} &= G(\mathbf{r}_{\nu\mu}^*, \mathbf{r}_{nm}) - W_0 \frac{\partial G(\mathbf{r}_{\nu\mu}^*, \mathbf{r}_{nm})}{\partial n}, \\ b^{\nu\mu} &= -\left(U^0(\mathbf{r}_{\nu\mu}^*) - W_0 \frac{\partial U^0(\mathbf{r}_{\nu\mu}^*)}{\partial n} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В формуле (28) $c_{nm} = I(\mathbf{r}_{nm}) \sigma_0$, где σ_0 – площадь элементарных ячеек, на которые разбивается область интегрирования в уравнении (22). Точки \mathbf{r}_{nm} (координаты дискретных источников) в (28) выбираются как описано выше.

В соответствии с [14] ФГ $G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ вычисляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{|p| \leq Q} \sum_{|q| \leq Q} G_0(R_{pq}) \exp(-ip\tau_x - iq\tau_y) + \\ &+ \frac{k_2}{4\pi i} \sum_{s=0}^\infty \sum_{l=-s}^s (2s+1) \frac{(s-l)!}{(s+l)!} \tilde{W}_{sl} \Psi_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Psi_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j_s(k_2 R) P_s^l(\cos \Theta) \exp(il\Phi), \quad (30)$$

причем R, Θ, Φ – сферические координаты вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $P_s^l(x)$ – присоединенные функции Лежандра, $j_s(x)$ – сферические функции Бесселя. Величины \tilde{W}_{sl} выражаются по формуле

$$\tilde{W}_{sl} = W_{sl}^I + W_{sl}^{II} + W_{sl}^{III} + W_{sl}^{IV}, \quad (31)$$

в которой

Для вычисления добавочной ФГ $G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ применим формулу суммирования Пуассона. Тогда из (13) имеем



где $\Gamma_{pq} = \sqrt{k_2^2 - u_p^2 - v_q^2}$, $V_{pq} = V(\lambda_{pq})$, $\lambda_{pq} = \sqrt{u_p^2 + v_q^2}$. Данный ряд сходится с экспоненциальной скоростью за счет убывания величины $\exp(-i\Gamma_{pq}h)$.

Рассмотрим альтернативный подход для решения задачи. Будем вновь исходить из уравнения (22). Учтем осевую симметрию элементов решетки. Разложим неизвестную функцию в ряд Фурье:

$$I(\beta', \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\beta') \exp(in\varphi'). \quad (35)$$

ФГ также можно разложить в ряд

$$G(\alpha, \beta, \varphi, \alpha', \beta', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{mn}(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \exp(im\varphi - in\varphi'), \quad (36)$$

где $\tilde{S}_{mn} = S_{mn}^{\infty} + S_{mn}^l$, причем

$$S_{mn}^{\infty} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp(-im\varphi + in\varphi') d\varphi d\varphi', \quad (37)$$

$$S_{mn}^l = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp(-im\varphi + in\varphi') d\varphi d\varphi'. \quad (38)$$

$$S_{mn}^{\infty} = \frac{i^{m-n-1}}{2d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_{pq}\rho) J_n(\lambda_{pq}\rho') \exp(-i\Gamma_{pq} |z - z'| + i(n-m)\gamma_{pq}) / \Gamma_{pq}, \quad (41)$$

где ρ, z, ρ', z' – цилиндрические координаты точки наблюдения и источника, $J_m(x)$ – функция Бесселя,

Подставим далее формулы (35) и (36) в интегральное уравнение (22). В результате проектирования полученного равенства на базис Фурье получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\beta_{\max}} K_{mn}(\beta, \beta') I_n(\beta') d\beta' = b_m(\beta), \quad (39)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$K_{mn}(\beta, \beta') = 2\pi \left(\tilde{S}_{mn} - W_0 \frac{\partial \tilde{S}_{mn}}{\partial n} \right),$$

$$b_m(\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(U^0 - W_0 \frac{\partial U^0}{\partial n} \right) \exp(-im\varphi) d\varphi. \quad (40)$$

Таким образом, исходная краевая задача сведена к системе одномерных интегральных уравнений (39). Для решения системы (39) применяли метод коллокации, причем точки коллокации выбирали при помощи первой формулы в (25).

Для нахождения величин \tilde{S}_{mn} использовали два алгоритма [12, 13]. При условии $k_2 |z - z'| > 1$ ряд (12) функции G_{∞} преобразовывали по формуле Пуассона с последующим интегрированием по угловой координате, т. е.

$u_p = \lambda_{pq} \cos \gamma_{pq}$, $v_q = \lambda_{pq} \sin \gamma_{pq}$. В случае малых значений величины $k_2 |z - z'|$ применяли формулы

$$S_{mn}^{\infty} = S_m^0 \delta_{mn} + \frac{k_2}{4\pi i} \sum_{s=|m-n|}^{\infty} (2s+1) \frac{(s-m+n)!}{(s+m-n)!} \tilde{W}_{s,m-n}^s F_{mn}^s, \quad (42)$$

где

$$S_m^0 = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ik_2 R)}{R} \exp(-im\psi) d\psi, \quad \psi = \varphi - \varphi', \quad (43)$$

$$F_{mn}^s(\rho, z, \rho', z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{s,m-n}^1(\rho, z, \rho', z', \psi) \exp(-im\psi) d\psi, \quad (44)$$

$$\Psi_{sl}^1(\rho, z, \rho', z', \psi) = j_s(k_2 R) P_s^l(\cos \Theta) \exp(il\Phi_1), \quad \Phi_1 = \Phi - \varphi'. \quad (45)$$

В формуле (42) предполагается, что параметр $Q = 0$ (см. (32) и (33)). Как видно из формул (43) и (44), величины S_{mn}^{∞} выражаются через однократные интегралы по угловой координате. Для вычисления этих интегралов можно применить формулу прямоугольников с последующим нахождением интегральных сумм при помо-

щи алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Коэффициенты Фурье S_{mn}^l части ФГ, обусловленной наличием слоистой среды, вычисляли только по одному алгоритму, основанному на применении формулы Пуассона с последующим интегрированием по угловой координате. В результате указанных преобразований будем иметь:



$$S_{mn}^l = \frac{i^{m-n-1}}{d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_{pq} \rho) J_n(\lambda_{pq} \rho') \left[\cos(\Gamma_{pq}(z+z')) + V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq} h) \times \right. \\ \left. \times \cos(\Gamma_{pq}(z-z')) \right] \frac{V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq} h + i(n-m)\gamma_{pq})}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}}. \quad (46)$$

В качестве выходных характеристик задачи рассмотрим амплитуды пространственных гармоник, обусловленных дифракцией на решетке. Для нахождения этих величин преобразуем ФГ решетки при помощи формулы Пуассона и под-

ставим ее в формулу (10). В результате получим представление волнового поля по плоским волнам вида (8) и (9). При этом амплитуды плоских волн, распространяющихся в верхнем и нижнем полупространствах, будут иметь вид

$$A_{pq}^+ = T_0 \delta_{p0} \delta_{q0} - \frac{i}{2d_x d_y \Gamma_{pq}} \left[g_+(u_p, v_q) + V_{pq} g_-(u_p, v_q) \exp(-i\Gamma_{pq} h) \right] \times \\ \times \frac{\exp(-i\Gamma_{pq} h_1 + i\Gamma_{pq}^1 h_1)(1 + V_{pq})}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}}, \quad (47)$$

$$A_{pq}^- = R_0 \delta_{p0} \delta_{q0} - \frac{i}{2d_x d_y \Gamma_{pq}} \left[g_-(u_p, v_q) + V_{pq} g_+(u_p, v_q) \exp(-i\Gamma_{pq} h) \right] \times \\ \times \frac{\exp(-i\Gamma_{pq} h_1 + i\Gamma_{pq}^1 h_1)(1 + V_{pq})}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}}. \quad (48)$$

Здесь

$$g_{\pm}(u_p, v_q) = \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_{pq}^{\pm} \mathbf{r}') ds', \quad (49)$$

$h_1 = h/2$ и δ_{pq} – символ Кронекера.

4. Результаты расчетов

С целью проиллюстрировать преимущества ММДИ, а также проверить работу этого метода рассмотрим вначале рассеяние плоской волны на одиночном абсолютно мягком суперэллипсоиде вращения, поверхность которого в декартовых координатах задается соотношением

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^{q_s/2} + \left| \frac{z}{b} \right|^{q_s} = 1, \quad (50)$$

где параметр q_s – четное натуральное число. Геометрия контура осевого сечения суперэллипсоида и вспомогательного контура приведена на рис. 2. Рассматривался вытянутый суперэллипсоид вращения, у которого $b/a > 1$. Величина параметра b/a принимала значения 2, 4, 8, 16, 32 и 64, а остальные параметры $kb = 4$, $q_s = 16$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. На рис. 2 изображена геометрия контура осевого сечения суперэллипсоида и контура осевого сечения вспомогательной поверхности для $b/a = 64$ (наихудший в смысле сходимости

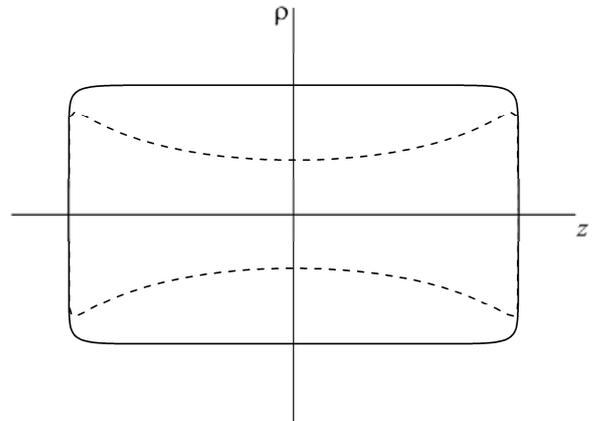


Рис. 2. Осевое сечение суперэллипсоида и вид вспомогательного контура (пунктир)

Fig. 2. Axial section of the superellipsoid and view of the auxiliary contour (dotted line)

случай). На рис. 3, а приведены угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния суперэллипсоида для различных значений отношения b/a , полученные с использованием ММДИ. Для построения вспомогательной поверхности выбирались вытянутые сфероидальные координаты (см. например, [28]). Значение параметра δ выбиралось из условия охвата вспомогательным контуром особенностей продолжения волнового поля внутрь рассеивателя.

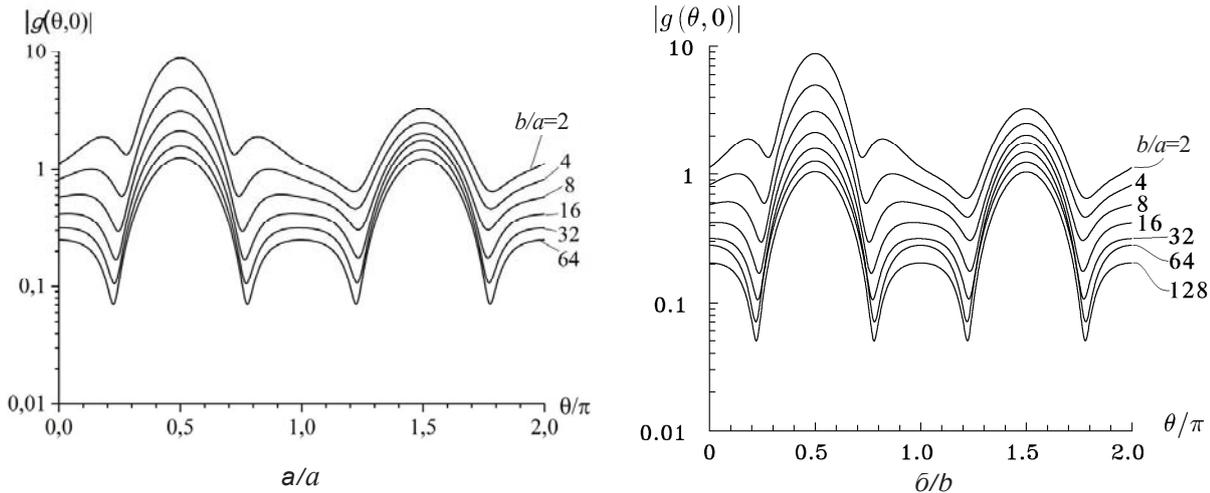


Рис. 3. Угловые зависимости диаграммы рассеяния суперэллипсоида вращения в свободном пространстве: *a* – решение при помощи метода дискретных источников (ММДИ), *b* – решение при помощи метода диаграммных уравнений (МДУ) [32]

Fig. 3. Angular dependences of the pattern of the superellipsoid of revolution in free space: solution by means of the modified method of discrete sources (MMDS) (*a*) and by means of the method of diagram equations (MDE) (*b*)

Данные особенности определяются уравнением [28, 29]

$$\alpha'(\beta) = -i, \quad (51)$$

где $\alpha(\beta)$ – уравнение контура осевого сечения суперэллипсоида в сфероидальных координатах. Величина δ_{\max} , т. е. максимально возможное значение параметра деформации δ вспомогательного контура суперэллипсоида, равна мнимой части корня уравнения (51). Соответствующее выражение для параметра δ_{\max} , а также способ построения вспомогательного контура описан в работе [29].

Рассматриваемая задача дифракции решалась с учетом осевой симметрии тела, т. е. при помощи разложения неизвестной функции в ряд Фурье по угловой координате. В случае сильно вытянутого тела (при $b/a = 64$) число дискретных источников составляло 250, а максимальный номер гармоники по угловой координате $N_{\varphi} = 2$. В случае меньших значений b/a число источников было меньше 250. Значение параметра δ было равно $\delta = (1 - 10^{-7})\delta_{\max}$ (при $b/a = 64$), т. е. вспомогательный контур был плотно «натянут» на особенности, определяемые уравнением (51). При таком выборе параметров задачи максимальный уровень невязки краевого условия не превосходил $1.5 \cdot 10^{-3}$ и точность выполнения оптической теоремы составила $5 \cdot 10^{-9}$. Отметим, что в работе [32] также рассмотрена дифракция плоской волны на суперэллипсоиде вращения для тех же параметров геометрии рассеивателя. В этой работе краевая задача решалась при помощи метода диаграммных уравнений (МДУ). На

рис. 3, *b* приведены соответствующие зависимости диаграммы рассеяния вытянутого суперэллипсоида, представленные в работе [32]. Из сравнения рис. 3, *a* и 3, *b* следует хорошее совпадение результатов, полученных при применении МДУ и ММДИ. Заметим, что в случае использования МДУ приходится полностью видоизменять весь алгоритм решения задачи при применении сфероидального базиса (вместо сферических гармоник). В то же время при использовании ММДИ базис не меняется при переходе к другим ортогональным координатам. Необходимо лишь использовать другой вспомогательный контур, получаемый при помощи методики, описанной выше.

Рассмотрим далее результаты расчета дифракции плоской волны на решетке, расположенной в жидком слое. Отметим, что в силу большого времени счета характеристик решетки (коэффициентов отражения и прохождения) для сильно деформированных тел будем исследовать дифракцию на решетках, которые состоят из элементов, имеющих гладкую границу, например, на решетке из сфер, сфероидов вращения (с небольшим отношением осей), круговых торов и т.д. При этом для выбора оптимального числа дискретных источников контролировалась невязка граничного условия на поверхности центрального элемента решетки и проводилась проверка выполнения закона сохранения энергии. Как показывают численные эксперименты, значение параметра деформации δ вспомогательной поверхности следует выбирать равным $\delta = 0.5\delta_{\max}$ для указанных форм элементов решетки.



Для того чтобы протестировать разработанные алгоритмы решения задачи дифракции на решетке, сравнивались результаты расчета модулей коэффициентов отражения и прохождения плоской волны, полученные при применении обоих методов. В табл. 1 приведены значения модулей коэффициентов отражения и прохождения плоской волны для нескольких значений волнового параметра d/λ , где $d = \min(d_x, d_y)$, λ – длина волны. Рассматривался случай абсолютно мягких элементов решетки. Во всех приведенных ниже расчетах $k_1 = 1$, $k_2 = 1.5$ и $\rho_2/\rho_1 = 0.5$. Результаты, приведенные в табл. 1, относятся к случаю решетки из сфер, причем толщина жидкого слоя h равнялась малому периоду решетки, $d_y = 2d_x$,

диаметр сфер $2a = 0.9d_x$. Плоская волна падала нормально к поверхности слоя. Заметим, что в случае применения первой методики $N = 30$ и $M = 55$, а в случае использования второго подхода число точек коллокации составляло $N = 30$ и максимальный номер гармоники по угловой координате $N_\varphi = 9$. Параметр Q в случае применения первого метода был равен 5. Таким образом, число неизвестных в первом случае примерно в три раза больше числа неизвестных при применении второго метода. Как видно из таблицы, результаты расчетов отличаются в четвертом знаке после запятой в случае, когда волновой параметр равен $d/\lambda = 0.7178$. В остальных случаях разность полученных результатов еще меньше.

Таблица 1 / Table 1

Сравнение коэффициентов отражения и прохождения, полученных двумя методами
Comparison of the reflection and transmission coefficients obtained by two methods

d/λ	Первый метод / First method $ A_{00}^- $	Второй метод / Second method $ A_{00}^- $	Первый метод / First method $ A_{00}^+ $	Второй метод / Second method $ A_{00}^+ $
0.5	0.8324232	0.8324232	0.5541403	0.5541403
0.5544	0.8143582	0.8143582	0.4753944	0.4753944
0.6089	0.7407287	0.7407285	0.5590662	0.5590664
0.6633	0.3874374	0.3874343	0.7895191	0.7895201
0.7178	0.07355883	0.07355346	0.2477113	0.2477071
0.7722	0.7351840	0.7351814	0.08407766	0.08407727
0.8267	0.6969352	0.6969334	0.4313189	0.4313190
0.8811	0.5406348	0.5406338	0.4750221	0.4750237
0.9356	0.3993314	0.3993333	0.6684422	0.6684409
0.99	0.5043882	0.5044002	0.6378213	0.6378138

В качестве еще одного теста разработанных методик была проведена проверка выполнения закона сохранения энергии (см. [14]). Толщина жидкого слоя равнялась малому периоду решетки, $d_y = 2d_x$, волновой параметр $d/\lambda = 0.99$. Рассматривалось нормальное падение плоской волны. Закон сохранения энергии был проверен для задачи дифракции на решетке, состоящей из абсолютно мягких сфер, сплюснутых сфероидов и круговых торов. Параметры геометрии элементов решетки имели значения: диаметр сфер $2a = 0.9d_x$, оси сфероидов $2a = 0.9d_x$, $a/b = 3$ (b – полуось сфероидов вдоль оси z), диаметры тора составляли $0.9d_x$ – внешний и $0.3d_x$ – внутренний. Число точек коллокации и максимальный номер гармоники по угловой координате выбирались такими же, как для табл. 1. Параметр Q в случае применения первого метода был равен 5.

Как видно из табл. 2, в которой приведены результаты расчетов, точность выполнения закона сохранения не превосходит 10^{-5} в случае применения первого подхода и $5 \cdot 10^{-7}$ в случае использования второго метода.

Как показали вычисления, время счета по первой методике примерно на порядок больше, чем время счета по второму алгоритму. В силу больших временных затрат при использовании первого алгоритма дальнейшие результаты получены при помощи применения второй методики. Важно заметить, что данная методика позволяет получать корректные результаты при больших значениях коэффициента заполнения решетки (т. е. отношения диаметра тела к малому периоду решетки). Для иллюстрации этого на рис. 4 приведена зависимость невязки краевого условия на контуре осевого сечения центрально-



Таблица 2 / Table 2

Проверка выполнения закона сохранения энергии для разных геометрий элементов решетки
Check of the energy conservation law for different geometries of elements of the lattice

Форма элемента решетки / Shape of the lattice element	Первый метод / First method			Второй метод / Second method		
	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $	Относительная ошибка выполнения закона сохранения / Relative error of fulfilment of the conservation law	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $	Относительная ошибка выполнения закона сохранения / Relative error of fulfilment of the conservation law
Сфера / Sphere	0.5043882	0.6378213	$5.42 \cdot 10^{-7}$	0.5044002	0.6378136	$4.19 \cdot 10^{-7}$
Сфероид / Spheroid	0.5375950	0.6714867	$9.46 \cdot 10^{-6}$	0.5375466	0.6715329	$1.77 \cdot 10^{-7}$
Тор / Torus	0.5586938	0.6428214	$1.67 \cdot 10^{-7}$	0.5586945	0.6428208	$1.87 \cdot 10^{-7}$

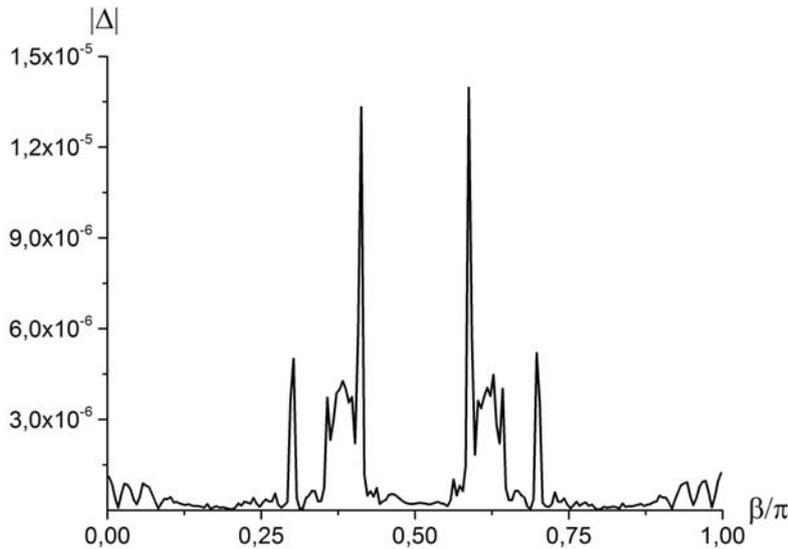


Рис. 4. Распределение невязки краевого условия на контуре осевого сечения центрального элемента решетки из сплюснутых сфероидов. Решение при помощи второй методики

Fig. 4. Distribution of the residual of boundary condition on the contour of axial section of the central element of the lattice consisting of flattened spheroids. Solution by means of the second technique

го элемента решетки, составленной из абсолютно мягких сплюснутых сфероидов с отношением полуосей $a/b = 3$. Толщина жидкого слоя равнялась малому периоду решетки, $d_y = 2d_x$,

волновой параметр $d/\lambda = 0.99$, диаметр сфероидов $2a = 0.95d_x$. Плоская волна падала под углами $\theta_0 = 45^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Невязка вычислялась по формуле

$$|\Delta(\beta, \varphi)| = \left| \sum_{m=-N_\varphi}^{N_\varphi} \left(\sum_{n=-N_\varphi}^{N_\varphi} \int_0^\pi K_{mn}(\beta, \beta') I_n(\beta') d\beta' \right) \exp(im\varphi) - \sum_{m=-N_\varphi}^{N_\varphi} b_m(\beta) \exp(im\varphi) \right|, \quad (52)$$

где N_φ – максимальный номер гармоники по угловой координате. Невязку находили в точках, расположенных на контуре осевого сечения центрального элемента решетки, причем угол $\varphi = 0$. Число точек, в которых находили невязку, составляло 200, а число дискретных источников $N = 30$. Максимальный номер гармоники по угловой

координате $N_\varphi = 9$. Как видно, максимальный уровень невязки не превосходит $1.5 \cdot 10^{-5}$, т. е. очень мал. Расчеты показывают, что увеличение числа источников до $N = 45$ приводит к уровню невязки примерно $7 \cdot 10^{-6}$. При этом кривая зависимости невязки становится более «изрезанной».



В табл. 3 приведены значения модуля коэффициента отражения и прохождения решетки для различных значений числа дискретных источников и числа гармоник по угловой координате. Все параметры задачи имели те же значения, что и для рис. 4. Видно, что результаты стабилизируются в третьем десятичном знаке уже при $N = 15$ (в этом случае $N_\varphi = 9$ для всех значений N) и при $N_\varphi = 5$ (в этом случае $N = 30$ для всех N_φ). Такая быстрая сходимость алгоритма обусловлена достаточной гладкостью границы элементов решетки.

лизируются в третьем десятичном знаке уже при $N = 15$ (в этом случае $N_\varphi = 9$ для всех значений N) и при $N_\varphi = 5$ (в этом случае $N = 30$ для всех N_φ). Такая быстрая сходимость алгоритма обусловлена достаточной гладкостью границы элементов решетки.

Таблица 3 / Table 3

Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от числа источников и числа угловых гармоник
Dependence of the reflection and transmission coefficients on the number of discrete sources and the number of angular harmonics

$N (N_\varphi = 9)$	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $	$N_\varphi (N = 30)$	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $
10	0.8991941	0.3239997	1	0.9092310	0.3327952
15	0.9022391	0.3226968	3	0.8795902	0.2998409
20	0.9025314	0.3225247	5	0.9023977	0.3222798
25	0.9025687	0.3225017	7	0.9025746	0.3224953
30	0.9025740	0.3224984	9	0.9025740	0.3224984

Рассмотрим далее поведение коэффициентов отражения и прохождения плоской волны в зависимости от параметра d/λ . На рис. 5, 6 изображены частотные зависимости модуля коэффициента отражения (см. рис. 5) и прохождения (см. рис. 6) плоской волны при дифракции на решетке из сфер (см. рис. 5, а, 6, а), сплюснутых сфероидов (см. рис. 5, б и 6, б) и круговых торов (см. рис. 5, в, 6, в). Рассматривалось нормальное падение плоской волны, $d_y = 2d_x$, $h = d_y$. Диаметр сфер составлял $2a = 0.9d$, оси сфероидов $2a = 0.9d$, $a/b = 3$, диаметры торов составляли $0.9d$ – внешний и $0.3d$ – внутренний. Сплошными кривыми на рисунках показаны зависимости коэффициентов отражения и прохождения для нулевого значения импеданса W_0 , а штриховые кривые иллюстрируют зависимости для случая $W_0 = -0.5i$. Таким образом, в последнем случае имеется поглощение энергии элементами решетки. Как видно из рисунков, имеются критические значения волнового параметра d/λ , при которых зависимости коэффициентов отражения и прохождения испытывают характерные скачки. Из сравнения приведенных рисунков с результатами работы [14] видно, что при нулевом значении импеданса зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения для решетки, расположенной в слое, имеют существенно более «изрезанный» характер, чем соответствующие зависимости для случая решетки, расположенной в свободном пространстве. Аналогично в случае импедансных краевых условий на поверхности элементов решетки кривые зависимостей коэф-

фициентов отражения и прохождения меняются гораздо более плавно, чем в случае нулевого импеданса (в обоих случаях решетка располагалась внутри слоя). Из рисунков также следует, что в случае абсолютно мягких элементов решетки на низких частотах коэффициент отражения близок по модулю к единице, а коэффициент прохождения близок к нулю в независимости от геометрии элементов решетки. На более высоких частотах имеются отдельные значения параметра d/λ , для которых коэффициент отражения практически равен нулю, а модуль коэффициента прохождения близок к единице.

На рис. 7 изображены зависимости модуля коэффициента отражения (рис. 7, а) и прохождения (рис. 7, б) плоской волны для решеток, составленных из сфер (кривые 1), сплюснутых сфероидов (кривые 2) и решеток из торов (кривые 3), описанных выше размеров. Рассматривались зависимости от коэффициента заполнения решетки τ (при этом $d_y = 2d_x$, $h = d_y$). Плоская волна падала нормально. Волновой параметр принимал значение $d/\lambda = 0.95$. Импеданс элементов решетки равнялся нулю. Как видно из рисунков, в случае решеток, составленных из сфероидов и круговых торов, зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения близки друг к другу. Для этих геометрий имеется значение коэффициента заполнения, при котором зависимости модуля коэффициента отражения имеют локальный минимум. В случае решетки из сфер зависимости коэффициентов отражения и прохождения имеют осциллирующий характер. Для сравнения были

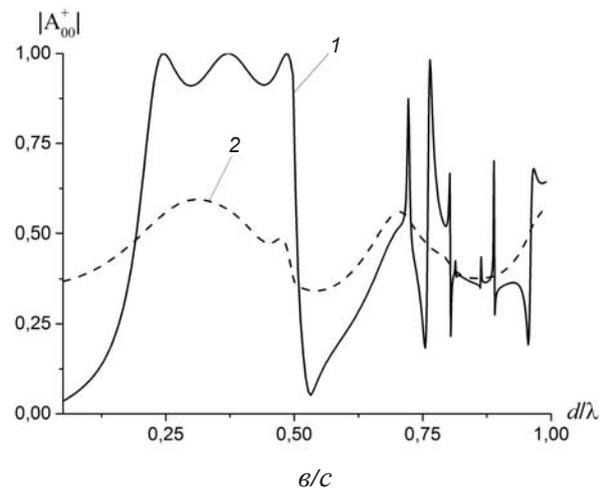
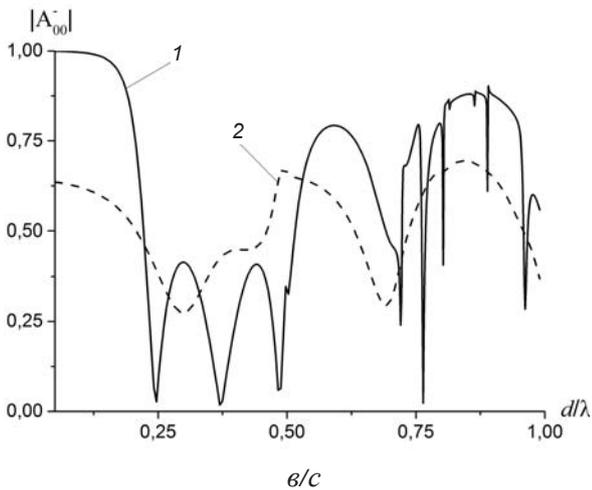
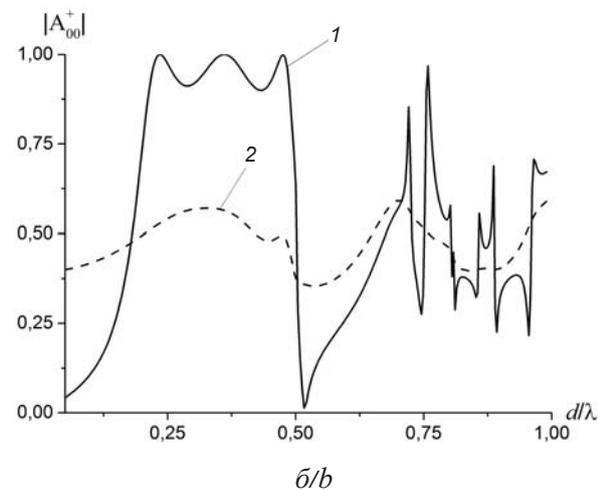
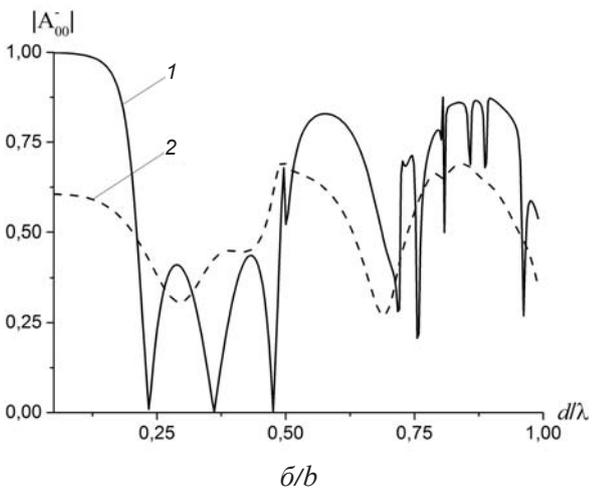
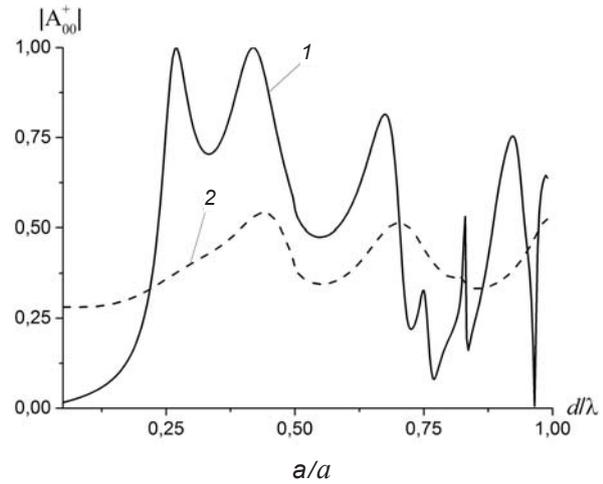
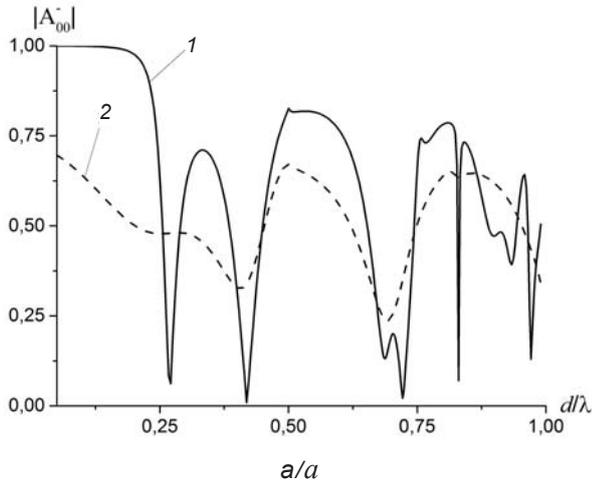


Рис. 5. Частотная зависимость модуля коэффициента отражения: a – решетка из сфер, b – решетка из сплюснутых сфероидов, v – решетка из круговых торов. Кривая 1 – $W_0 = 0$, кривая 2 – $W_0 = -0.5i$

Fig. 5. Frequency dependence of the module of reflection coefficient for the lattice from spheres (a), flattened spheroids (b) and circular torus (c). Curve 1 – $W_0 = 0$, curve 2 – $W_0 = -0.5i$

Рис. 6. Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения: a – решетка из сфер, b – решетка из сплюснутых сфероидов, v – решетка из круговых торов. Кривая 1 – $W_0 = 0$, кривая 2 – $W_0 = -0.5i$

Fig. 6. Frequency dependence of the module of transmission coefficient for the lattice from spheres (a), flattened spheroids (b) and circular torus (c). Curve 1 – $W_0 = 0$, curve 2 – $W_0 = -0.5i$

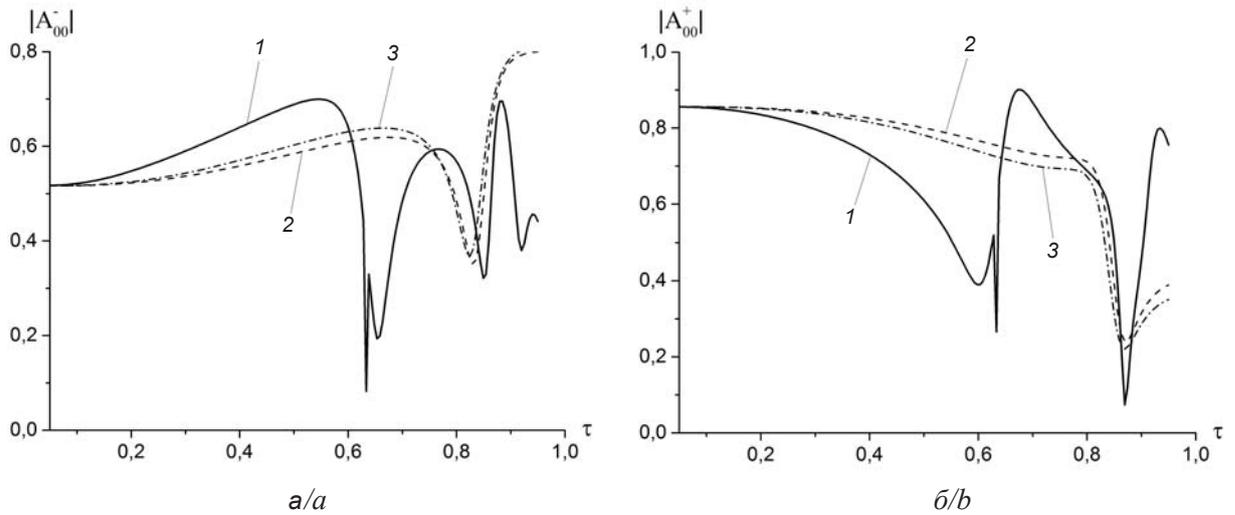


Рис. 7. Зависимость модуля коэффициента отражения (a) и коэффициента прохождения (b) от коэффициента заполнения решетки. Кривая 1 – решетка из сфер, кривая 2 – решетка из сплюснутых сфероидов, кривая 3 – решетка из круговых торов

Fig. 7. Dependence of the module of reflection coefficient (a) and the module of transmission coefficient (b) on fillings factor of the lattice. Curve 1 – the lattice from spheres, curve 2 – the lattice from flattened spheroids, curve 3 – the lattice from circular torus

также построены зависимости модуля коэффициента отражения и прохождения решетки от коэффициента заполнения для случая равных периодов решетки. Соответствующие кривые изображены на рис. 8. Все остальные параметры были такие же, как и для рис. 7. Как и следовало ожидать, в случае равных периодов решетки при

больших значениях коэффициента заполнения ($\tau \geq 0.9$) модуль коэффициента отражения близок к единице, а коэффициент прохождения имеет малое значение. Однако в отличие от случая однородной среды имеется «провал» модуля коэффициента отражения в области достаточно больших τ .

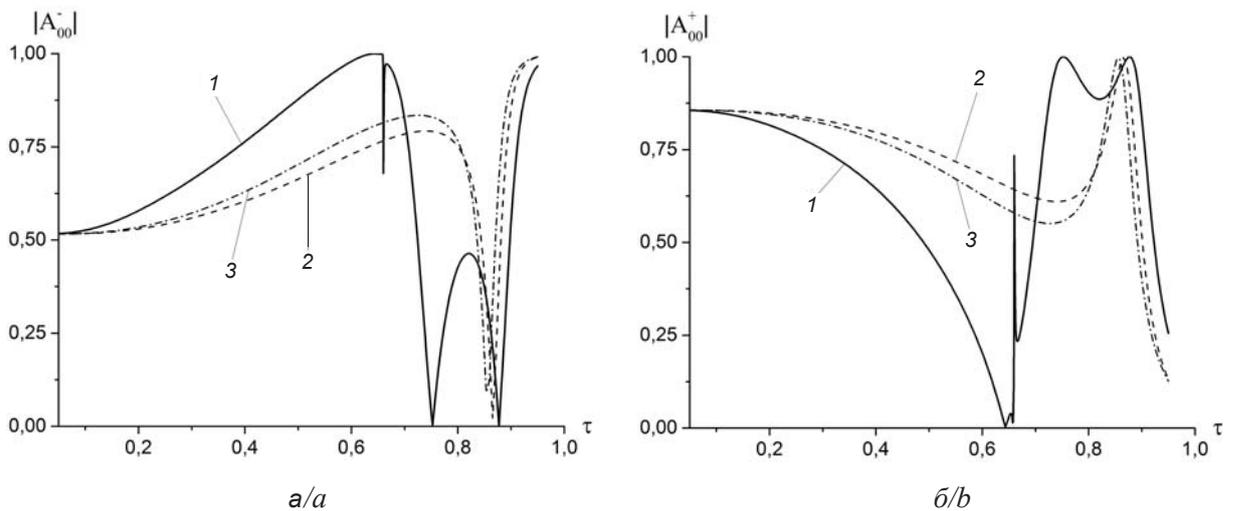


Рис. 8. Зависимость модуля коэффициента отражения (a) и коэффициента прохождения (b) от коэффициента заполнения решетки. Одинаковые периоды. Кривая 1 – решетка из сфер, кривая 2 – решетка из сплюснутых сфероидов, кривая 3 – решетка из круговых торов

Fig. 8. Dependence of the module of reflection coefficient (a) and the module of transmission coefficient (b) on filling factor of the lattice. Equal periods. Curve 1 – the lattice from spheres, curve 2 – the lattice from flattened spheroids, curve 3 – the lattice from circular torus



Заклучение

На основе ММДИ разработаны два подхода для решения трехмерной задачи дифракции плоской волны на решетке, состоящей из тел вращения, которая расположена в жидком слое. В работе выведено интегральное уравнение для импедансного граничного условия на поверхности элементов решетки. Приведен эффективный алгоритм нахождения ФГ решетки. Работа ММДИ проиллюстрирована на примере дифракции плоской волны на одиночном сильно вытянутом суперэллипсоиде вращения. Проиллюстрировано хорошее совпадение результатов расчета диаграммы рассеяния для сильно вытянутого суперэллипсоида вращения, найденной при помощи МДУ и ММДИ.

Показано, что результаты, полученные при применении двух подходов к решению задачи дифракции на решетке, совпадают с удовлетворительной точностью. Для проверки корректности разработанных методик решения задачи дифракции на решетке проведена проверка выполнения закона сохранения энергии. Показано, что в случае абсолютно мягких элементов решетки ошибка выполнения закона сохранения составляет не более чем 10^{-5} в случае использования первого подхода и $5 \cdot 10^{-7}$ при применении второго метода. Построена зависимость невязки краевого условия на контуре осевого сечения центрального элемента решетки, составленной из сплюснутых сфероидов, в случае решения задачи при помощи второго метода. Показано, что невязка граничного условия не превосходит $1.5 \cdot 10^{-5}$. В работе построены зависимости модуля коэффициента отражения и прохождения плоской волны от волнового параметра и коэффициента заполнения для решеток, составленных из сфер, сплюснутых сфероидов и круговых торов. Рассмотрены два вида краевых условий на поверхности элементов решетки: с нулевым импедансом и с ненулевым мнимым импедансом. Последний случай описывает поглощение энергии элементами решетки. Продемонстрировано существенное отличие поведения характеристик рассеяния решетки, расположенной в слое, от поведения этих величин в случае, когда решетка расположена в однородной среде, а также существенное отличие зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от волнового параметра для нулевого и ненулевого значения импеданса. Показано, что в случае решеток, составленных из акустически мягких сплюснутых

сфероидов и круговых торов, имеется значение коэффициента заполнения решетки, при котором модуль коэффициента отражения близок к нулю.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-02-00247, 18-02-00961).

Список литературы

1. Кобелев Ю. А. Рассеяние плоской звуковой волны сферическими частицами с монопольным типом колебаний, расположенными в узлах плоской безграничной сетки с одинаковыми ячейками // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 1. С. 3–12. DOI: 10.1134/S1063771013060092.
2. Кобелев Ю. А. Многократное рассеяние звуковых волн сферическими частицами с монопольным типом колебаний, расположенными в узлах трехмерной решетки с одинаковыми ячейками // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 4. С. 432–441. DOI: 10.1134/S1063771015030094.
3. Папкова Ю. И. Поле точечного источника в неоднородном гидроакустическом волноводе с плавающим на поверхности телом // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 4. С. 484–489. DOI: 10.1134/S1063771015040077.
4. Кудашева О. А., Севрюгова Н. В. Излучение звука бесконечной периодической решеткой с зазорами // Акуст. журн. 1976. Т. 22, № 3. С. 385–392.
5. Вовк И. В. Излучение звука периодической решеткой из стержневых преобразователей, звукоизолированной с тыльной стороны слоем // Акуст. журн. 1980. Т. 26, № 4. С. 522–527.
6. Вовк И. В. Дифракция звука на решетке из лент конечной прозрачности // Акуст. журн. 1985. Т. 32, № 3. С. 378–381.
7. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с.
8. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288 с.
9. Yasumoto K., Toyama H., Kushta T. Accurate analysis of two-dimensional electromagnetic scattering from multilayered periodic arrays of circular cylinders using lattice sums technique // IEEE Transactions on antennas and propagation. 2004. Vol. 52, № 10. P. 2603–2611. DOI: 10.1109/TAP.2004.834440.
10. Лапин А. Д. Поглощение звука решеткой резонаторов с диссипацией // Акуст. журн. 2002. Т. 48, № 3. С. 428–429.
11. Лапин А. Д., Миронов М. А. Поглощение звука плоской решеткой монопольно-дипольных рассеивателей // Акуст. журн. 2006. Т. 52, № 4. С. 497–501. DOI: 10.1134/S1063771006040087.
12. Маненков С. А. Дифракция плоской электромагнитной волны на трехмерной плоской решетке // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 4. С. 405–414. DOI: 10.1134/S1064226910040029.



13. Маненков С. А. Два подхода к решению задачи дифракции на плоской решетке, состоящей из диэлектрических тел вращения // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, № 8. С. 773–785. DOI: 10.1134/S1064226915080148.
14. Маненков С. А. Решение трехмерной задачи дифракции плоской волны на плоской двупериодической решетке // Акуст. журн. 2016. Т. 62, № 2. С. 143–152. DOI: 10.7868/S0320791916020118.
15. Maurel A., Mercier J.-F., Félix S. Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating // J. Acoust. Soc. Amer. 2014. Vol. 135, iss.1. P. 165–174. DOI: 10.1121/1.4836075.
16. Karimi M., Croaker P., Kessissoglou N. Acoustic scattering for 3D multi-directional periodic structures using the boundary element method // J. Acoust. Soc. Amer. 2017. Vol. 141, iss.1. P. 313–323. DOI: 10.1121/1.4973908.
17. Hassan A. Kalhor, Mohammad Ilyas. Scattering of plane electromagnetic waves by a grating of conducting cylinders embedded in a dielectric slab over a ground plane // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1982. Vol. AP-30, № 4. P. 576–579.
18. Hennion A. C., Bossut R., Decarpigny J. N., Audoly C. Application of the finite element method to analyze the scattering of a plane acoustic wave from doubly periodic structures // Physical acoustics / eds. O. Leroy, M. A. Breazeale. N.Y. : Plenum Press, 1991. P. 359–364.
19. Панин С. Б., Поединчук А. Е. Дифракция электромагнитной волны на решетке со слоем киральной среды // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 8. С. 690–701.
20. Groby J.-P., Duclos A., Dazel O., Boeckx L., Lauriks W. Absorption of a rigid frame porous layer with periodic circular inclusions backed by a periodic grating // J. Acoust. Soc. Amer. 2011. Vol. 129, iss. 5. P. 3035–3046. DOI: 10.1121/1.3561664.
21. Lagarrigue C., Groby J.-P., Tournat V., Dazel O., Umnova O. Absorption of sound by porous layers with embedded periodic arrays of resonant inclusions // J. Acoust. Soc. Amer. 2013. Vol. 134, iss. 6. P. 4670–4680. DOI: 10.1121/1.4824843.
22. Петов И. М., Табатадзе В. А., Заридзе Р. С. Применение метода вспомогательных источников к задачам дифракции электромагнитной волны на некоторых металлodieлектрических структурах // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 5. С. 451. DOI: 10.7868/S0033849413050069.
23. Кюркчан А. Г., Маненков С. А., Негорожина Е. С. Дифракция плоской волны на многорядной решетке, расположенной в диэлектрическом слое // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61, № 3. С. 214–223. DOI: 10.1134/S1064226916030104.
24. Abawi A. T., Krysl P., España A., Kargl S., Williams K., Plotnick D. Modeling the acoustic response of elastic targets in a layered medium using the coupled finite element/boundary element method // J. Acoust. Soc. Amer. 2016. Vol. 140, iss. 4. P. 2968. DOI: 10.1121/1.4969182.
25. Кунрадзе В. О приближенных методах решения задач математической физики // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, № 2. С. 59–107.
26. Кюркчан А. Г., Минаев С. А., Соловейчик А. Л. Модификация метода дискретных источников на основе априорной информации об особенностях дифракционного поля // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 6. С. 666–672.
27. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И. Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М. : Медиа Паблишер, 2014. 226 с.
28. Кюркчан А. Г., Маненков С. А. Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. Vol. 113. P. 2368–2378. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.05.010.
29. Маненков С. А. Новая версия модифицированного метода дискретных источников применительно к задаче дифракции на теле вращения // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 2. С. 129–136. DOI: 10.1134/S1063771014010102.
30. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М. : Наука, 1973. 343 с.
31. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. 798 с.
32. Клеев А. И., Кюркчан А. Г. Использование метода диаграммных уравнений в сферических координатах для решения задач дифракции на сильно вытянутых рассеивателях // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 1. С. 21–29. DOI: 10.1134/S1063771014060104.

Образец для цитирования:

Маненков С. А. Два подхода к решению скалярной задачи дифракции на плоской двупериодической решетке из тел вращения, расположенной в жидком слое // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 46–63. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-46-63.

Two Approaches to the Solution of the Scalar Problem of Diffraction on the Plane Two-periodic Lattice From Bodies of Revolution Located in the Liquid Layer

S. A. Manenkov

Sergey A. Manenkov, ORCID 0000-0002-7500-460X, Moscow Technical University of Communications and Informatics. 8a, Aviamotornaya Str., Moscow, 111024, Russia, mail44471@mail.ru

Background, Objectives and Methods: The problem of diffraction of acoustic waves on the lattices located in the layered media is of great scientific interest in hydroacoustics. There are many methods of the solution of this diffraction problem, such as the method of the surface integral equations, finite element method, boundary element method, etc. One of universal method of solution of diffraction problems is the modified method of discrete sources (MMDS). Earlier this method was applied to the solution of the problems of wave scattering on a single body of revolution, on a group of bodies and on lattices located in free



space. The purpose of this study is to develop the numerical algorithms based on MMDS for solution of the scalar problem of diffraction of acoustic waves on the planar grating consisting of identical impedance bodies of revolution which is immersed in a liquid layer. **Results:** Based on MMDS two techniques of the solution of the scalar three-dimensional problem of diffraction on the planar lattice consisting of identical impedance bodies of revolution located in a liquid layer are developed. The correctness of MMDS is illustrated on the example of diffraction of the plane wave on the single strongly elongated superellipsoid of revolution. Comparison of the results of calculation of the reflection and transmission coefficients for the lattice consisting of spherical elements obtained by means of both techniques offered in the paper is carried out. For validation of MMDS the check of the accuracy of fulfillment of the energy conservation law is executed and the dependence of the residual of the boundary condition on the contour of axial section of the central element of the lattice is plotted. It is shown that the residual has the order $1.5 \cdot 10^{-5}$ at the chosen model parameters. Frequency dependences for various geometries of the elements of the lattice (for two types of boundary conditions) and dependences of the absolute value of reflection and transmission coefficients on the filling factor of the lattice are obtained. **Conclusion:** There is an essential difference between the behavior of the scattered field under diffraction on the lattices located in homogeneous medium and the behavior of the scattered field under diffraction on the lattices immersed in layered medium. **Key words:** wave diffraction on the lattices located in stratified media, method of discrete sources, analytical continuation of wave fields.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (projects nos. 16-02-00247, 18-02-00961).

References

1. Kobelev Yu. A. Scattering of a plane sound wave by spherical particles performing monopole oscillations and positioned at the sites of an infinite plane lattice with identical cells. *Acoustical Physics*, 2014, vol. 60, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1134/S1063771013060092.
2. Kobelev Yu. A. Multiple sound wave scattering by spherical particles performing monopole oscillations and located at the sites of a three-dimensional lattice with identical cells. *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, no. 4, pp. 392–401. DOI: 10.1134/S1063771015030094.
3. Papkova Y. I. The field of a point source in an inhomogeneous hydroacoustic waveguide with a body drifting on the surface. *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, no. 4, pp. 440–445. DOI: 10.1134/S1063771015040077.
4. Kudasheva O. A., Sevryugova N. V. Izluchenie zvuka beskonechnoi periodicheskoi reshetkoi s zazorami [Sound radiation an infinite periodic lattice with gaps]. *Akusticheskii Zhurnal*, 1976, vol. 22, no. 3, pp. 385–392 (in Russian).
5. Vovk I. V. Izluchenie zvuka periodicheskoi reshetkoi iz sterzhnevnykh preobrazovatelei, zvukoizolirovannoi s tyl'noi storony sloem [Sound radiation the periodic lattice from rod converters soundproofed from the back by a layer]. *Akusticheskii Zhurnal*, 1980, vol. 26, no. 4, pp. 522–527 (in Russian).
6. Vovk I. V. Difraktsiia zvuka na reshetke iz lent konechnoi prozrachnosti [Diffraction of a sound on a lattice from stripes of finite transparency]. *Akusticheskii Zhurnal*, 1985, vol. 32, no. 3, pp. 378–381 (in Russian).
7. Shestopalov V. P. *Metod zadachi Rimana–Gil'berta v teorii difraktsii i rasprostraneniia elektromagnitnykh voln* [Method of Riman Hylbery problem in theory of diffraction and electromagnetic wave propagation]. Kharkov, Izd-vo Khar'k. un-ta, 1971. 400 p. (in Russian).
8. Shestopalov V. P., Litvinenko L. N., Masalov S. A., Sologub V. G. *Difraktsiia voln na reshetkakh* [Wave diffraction on lattices]. Kharkov, Izd-vo Khar'k. un-ta, 1973. 288 p. (in Russian).
9. Yasumoto K., Toyama H., Kushta T. Accurate analysis of two-dimensional electromagnetic scattering from multilayered periodic arrays of circular cylinders using lattice sums technique. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 2004, vol. 52, iss. 10, pp. 2603–2611. DOI: 10.1109/TAP.2004.834440.
10. Lapin A. D. Pogloshchenie zvuka reshetkoi rezonatorov s dissipatsiei [Absorption of a sound a lattice of resonators with dissipation]. *Akusticheskii Zhurnal*, 2002, vol. 48, no. 3, pp. 428–429 (in Russian).
11. Lapin A. D., Mironov M. A. Sound absorption by a planar array of monopole-dipole scatterers. *Acoustical Physics*, 2006, vol. 52, no.4, pp. 425–428. DOI: 10.1134/S1063771006040087.
12. Manenkov S. A. Diffraction of an electromagnetic wave by a three dimensional planar lattice. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2010, vol. 55, no. 4, pp. 375–384. DOI: 10.1134/S1064226910040029.
13. Manenkov S. A. Two approaches to the solution of the problem of diffraction by a plane grating of dielectric bodies of revolution. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2015, vol. 60, no. 8, pp. 809–821. DOI: 10.1134/S1064226915080148.
14. Manenkov S. A. Solution of the three dimensional problem of plane wave diffraction by a two-period plane grating. *Acoustical Physics*, 2016, vol. 62, no. 2, pp. 133–142. DOI: 10.7868/S0320791916020118.
15. Maurel A., Mercier J.-F., Félix S. Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2014, vol. 135, iss.1, pp. 165–174. DOI: 10.1121/1.4836075.
16. Karimi M., Croaker P., Kessissoglou N. Acoustic scattering for 3D multi-directional periodic structures using the boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2017, vol. 141, iss.1, pp. 313–323. DOI: 10.1121/1.4973908.
17. Hassan A. Kalhor, Mohammad Ilyas. Scattering of plane electromagnetic waves by a grating of conducting cylinders embedded in a dielectric slab over a ground plane. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 1982, vol. AP-30, no. 4, pp. 576–579.
18. Hennion A. C., Bossut R., Decarpigny J. N., Audoly C. Application of the finite element method to analyze the scattering of a plane acoustic wave from doubly periodic structures. *Physical acoustics*. Eds. O. Leroy, M. A. Breazeale. New York, Plenum Press, 1991. P. 359–364.
19. Panin S. B., Poyedinchuk A. Ye. Electromagnetic-wave diffraction by a grating with a chiral layer. *Izv. Vuzov. Radiophysics and Quantum Electronics*, 2002, vol. 45, no. 8, pp. 629–639.



20. Groby J.-P., Duclos A., Dazel O., Boeckx L., Lauriks W. Absorption of a rigid frame porous layer with periodic circular inclusions backed by a periodic grating. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2011, vol. 129, iss. 5, pp. 3035–3046. DOI: 10.1121/1.3561664.
21. Lagarrigue C., Groby J.-P., Tournat V., Dazel O., Umnova O. Absorption of sound by porous layers with embedded periodic arrays of resonant inclusions. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2013, vol. 134, iss. 6, pp. 4670–4680. DOI: 10.1121/1.4824843.
22. Petoev I. M., Tabatadze V. A., Zaridze R. S. Application of the method of auxiliary sources to the problems of diffraction of electromagnetic wave on some metal-dielectric structures. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2013, vol. 58, no. 5, pp. 404–416. DOI: 10.7868/S0033849413050069.
23. Kurkchan A. G., Manenkov S. A., Negorozhina E. S. Diffraction of a plane wave by a multiseriate lattice located in a dielectric layer. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2016, vol. 61, no. 3, pp. 224–233. DOI: 10.1134/S1064226916030104.
24. Abawi A. T., Krysl P., España A., Kargl S., Williams K., Plotnick D. Modeling the acoustic response of elastic targets in a layered medium using the coupled finite element/boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2016, vol. 140, iss. 4, pp. 2968–2977. DOI: 10.1121/1.4969182.
25. Kupradze V. O priblizhennykh metodakh resheniia zadach matematicheskoi fiziki [About approximate methods of the solution of problems of mathematical physics]. *Uspekhi mat. nauk*, 1967, vol. 22, no. 2, pp. 59–107 (in Russian).
26. Kurkchan A. G., Minaev S. A., Soloveichik A. L. A modification of the method of discrete sources based on prior information about the singularities of the diffracted field. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2001, vol. 46, no. 6, pp. 615–621.
27. Kyurkchan A. G., Smirnova N. I. *Mathematical modeling in diffraction theory based on a priori information on the analytic properties of the solution*. Amsterdam, Elsevier, 2015. 268 p.
28. Kyurkchan A. G., Manenkov S. A. Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2012, vol. 113, pp. 2368–2378. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.05.010.
29. Manenkov S. A. A new version of the modified method of discrete sources in application to the problem of diffraction by a body of revolution. *Acoustical Physics*, 2014, vol. 60, no. 2, pp. 127–133. DOI: 10.1134/S1063771014010102.
30. Brekhovskikh L. M. *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered media]. Moscow, Nauka, 1973. 343 p. (in Russian).
31. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Izd-vo Mosk. un-ta, 1999. 798 p. (in Russian).
32. Kleev A. I., Kyurkchan A. G. Application of the pattern equation method in spheroidal coordinates to solving diffraction problems with highly prolate scatterers. *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, no. 1, pp. 19–27. DOI: 10.1134/S1063771014060104.

Cite this article as:

Manenkov S. A. Two Approaches to the Solution of the Scalar Problem of Diffraction on the Plane Two-periodic Lattice From Bodies of Revolution Located in the Liquid Layer. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 46–63 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-46-63.
