



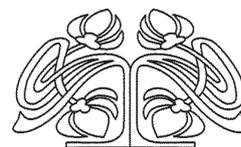
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ

САРАТОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
Новая серия

Серия Физика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2018 Том 18

ISSN 1817-3020 (Print)

ISSN 2542-193X (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Оптика и спектроскопия. Лазерная физика

**Зимняков Д. А., Алонова М. В., Ювченко С. А.,  
Ушакова Е. В.** Математическое моделирование  
переноса зондирующего излучения в низкокогерентной  
рефлектометрии случайно-неоднородных сред

4

**Конюхов А. И., Маврин П. А., Щуркин Е. В.**  
Мультиплексирование сигналов в оптоволоконных  
линиях связи с использованием дискретного  
солитонного спектра

16

#### Теоретическая и математическая физика

**Цой В. И.** Электромагнитные импульсы  
при преломлении волны в среду с дисперсией

23

#### Биофизика и медицинская физика

**Башкатов А. Н., Генина Э. А., Тучин В. В.**  
Определение коэффициента диффузии глюкозы  
в твердой мозговой оболочке человека

32

#### Радиофизика, электроника, акустика

**Маненков С. А.** Два подхода к решению скалярной задачи  
дифракции на плоской двупериодической решетке  
из тел вращения, расположенной в жидком слое

46

### Приложения

#### Из истории физики

**Аникин В. М.** Физико-математический факультет  
Саратовского университета (1917–1945)

64

Журнал включен в Перечень рецензи-  
руемых научных изданий, в которых  
должны быть опубликованы основные  
научные результаты диссертаций на  
соискание ученой степени кандидата  
наук, на соискание ученой степени  
доктора наук (группы научных специ-  
альностей: 01.04.00 – физика)

Зарегистрировано в Федеральной  
службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и мас-  
совых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ  
№ ФС77-56150 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном  
каталоге «Пресса России» 36015,  
раздел 30 «Научно-технические изда-  
ния. Известия РАН. Известия вузов».  
Журнал выходит 4 раза в год

**Директор издательства**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Верстка**  
Ковалева Наталья Владимировна

**Технический редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Корректор**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Адрес учредителя, издателя  
и издательства:**  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
**Тел.:** (845-2) 51-45-49, 52-26-89  
**E-mail:** izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 22.02.2018.  
Формат 60×84 1/8.  
Усл. печ. л. 9,39 (10,0).  
Тираж 500 экз. Заказ 18-Т.

Отпечатано в типографии  
Саратовского университета.  
**Адрес типографии:**  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2018



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует на русском и английском языках научные статьи по физике, содержащие новые результаты исследований, статьи учебно-методического характера, содержащие инновационную компоненту, статьи по методологии разделов физической науки, статьи, отражающие хронику научных мероприятий и важных событий в жизни физического сообщества. Материалы, ранее опубликованные или представленные для публикации в другие журналы, к рассмотрению не принимаются.

Рекомендуемый объем статьи – до 25 страниц текста, 5 рисунков и 4 таблицы. На русском языке статья содержит: УДК, заглавие, инициалы и фамилии авторов, название их места работы, электронный адрес авторов, аннотацию (200–250 слов), ключевые слова (не более 15), текст, благодарности и ссылки на гранты, список литературы.

На английском языке необходимо продублировать: заглавие, инициалы и фамилии авторов, структурированную, информативную аннотацию (250–600 слов), ключевые слова, список литературы (references). Для каждого автора указать ORCID.

Редколлегия рекомендует авторам структурировать текст, используя подзаголовки. Текст должен быть набран и напечатан через 1,5 интервала на бумаге формата А4 с полями 2,5 см, шрифт Times New Roman, размер шрифта основного текста – 14, второстепенного (аннотация, ключевые слова, сноски, таблицы, подписи к рисункам и надписи на них, приложения, список литературы, примечания) – 12; все страницы рукописи, таблицы, рисунки, следует пронумеровать. Иллюстрации и таблицы предоставляются дополнительно отдельным файлом. Рисунки должны быть в формате TIFF, JPG, CDR, BMP с разрешением не меньше 300 dpi. Нумерация источников в списке литературы должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте, ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Все рукописи, поступившие в редколлегию серии и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор. Плата за публикацию рукописей не взимается. Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://fizika.sgu.ru>.

Адрес редколлегии серии: 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ имени Н. Г. Чернышевского, физический факультет.

Тел. / факс: +7(845-2) 51-14-30.

E-mail: [fizika.sgu@bk.ru](mailto:fizika.sgu@bk.ru)

Website: <http://fizika.sgu.ru>

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Optics and Spectroscopy. Laser Physics

- Zimnyakov D. A., Alonova M. V., Yuvchenko S. A., Ushakova E. V.** Mathematical Modeling of Light Transfer in Low-Coherence Reflectometry of Random Media 4

- Konyukhov A. I., Mavrin P. A., Shchurkin E. B.** Discrete-Eigenvalue Multiplexing for Soliton Fiber-Optic Communication Links 16

#### Theoretical and Mathematical Physics

- Tsoy V. I.** Electromagnetic Momenta at Wave Refraction into Dispersive Medium 23

#### Biophysics and Medical Physics

- Bashkatov A. N., Genina E. A., Tuchin V. V.** Estimation of Glucose Diffusion Coefficient in Human *Dura Mater* 32

#### Radiophysics, Electronics, Acoustics

- Manenkov S. A.** Two Approaches to the Solution of the Scalar Problem of Diffraction on the Plane Two-periodic Lattice From Bodies of Revolution Located in the Liquid Layer 46

### Appendices

#### From the History of Physics

- Anikin V. M.** Faculty of Physics and Mathematics of Saratov State University (1917–1945) 64



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: ФИЗИКА»**

**Главный редактор**

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместители главного редактора**

Анищенко Вадим Семенович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Тучин Валерий Викторович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Скрипаль Анатолий Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Аникин Валерий Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Бабков Лев Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Вадивасова Татьяна Евгеньевна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Вениг Сергей Борисович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Винницкий Сергей Ильич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Дубна, Россия)  
Горохов Александр Викторович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Самара, Россия)  
Грибов Лев Александрович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)  
Давидович Михаил Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Дюбуа Арно, Ph.D, профессор Университета Париж-Сакле (Сент-Обен, Франция)  
Кузнецов Сергей Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Мальшев Сергей Александрович, доктор физ.-мат. наук (Минск, Беларусь)  
Мельников Леонид Аркадьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Модельский Иосиф, Ph.D, профессор Варшавского Технологического университета (Варшава, Польша)  
Нефёдов Игорь Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник Университета Аалто (Хельсинки, Финляндия)  
Никитов Сергей Аполлонович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия) Пирогов Юрий Андреевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)  
Сербино Роберто, Ph.D, профессор Миланского университета (Милан, Италия)  
Скрипаль Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Сухоруков Глеб Борисович, профессор Университета Королевы Марии (Лондон, Великобритания)  
Трубецков Дмитрий Иванович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)  
Филимонов Юрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Хлебцов Николай Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Шараевский Юрий Павлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Шиманский-Гайер Лутц, Ph.D, профессор Гумбольдтского университета (Берлин, Германия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.  
SERIES: PHYSICS»**

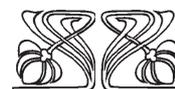
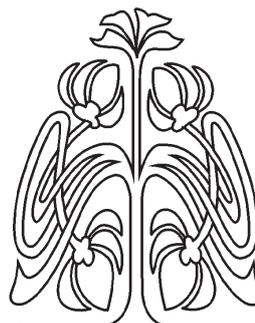
**Editor-in-Chief** – Dmitry A. Usanov (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Vadim S. Anishchenko (Saratov, Russia)  
Valery V. Tuchin (Saratov, Russia)

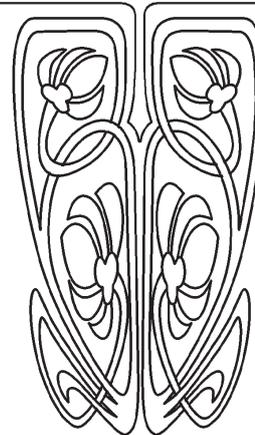
**Executive Secretary** – Anatoly V. Skripal (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Valery M. Anikin (Saratov, Russia)	Sergey A. Malyshev (Minsk, Belarus)
Lev M. Babkov (Saratov, Russia)	Leonid A. Melnikov (Saratov, Russia)
Roberto Cerbino (Milan, Italy)	Joseph W. Modelski (Warsaw, Poland)
Michael V. Davidovich (Saratov, Russia)	Yuri A. Pirogov (Moscow, Russia)
Arnaud Dubois (Saint-Aubin, France)	Yuri P. Sharaevsky (Saratov, Russia)
Yuri A. Filimonov (Saratov, Russia)	Lutz Shimansky-Geier (Berlin, Germany)
Alexander V. Gorokhov (Samara, Russia)	Alexander V. Skripal (Saratov, Russia)
Lev A. Gribov (Moscow, Russia)	Gleb B. Sukhorukov (London, UK)
Nikolai G. Khlebtsov (Saratov, Russia)	Dmitry I. Trubetskov ((Saratov, Russia)
Sergey P. Kuznetsov (Saratov, Russia)	Tatyana E. Vadivasova (Saratov, Russia)
Igor S. Nefedov (Helsinki, Finland)	Sergey I. Vinitzky (Dubna, Russia)
Sergey A. Nikitov (Moscow, Russia)	Sergey B. Venig (Saratov, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**





## ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 535.36:51.73:681.785.57

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ЗОНДИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НИЗКОКОГЕРЕНТНОЙ РЕФЛЕКТОМЕТРИИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Д. А. Зимняков, М. В. Алонова, С. А. Ювченко, Е. В. Ушакова

Зимняков Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.; главный научный сотрудник лаборатории проблем лазерной диагностики технических и живых систем, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), zimnyakov@mail.ru

Алонова Марина Васильевна, ассистент кафедры физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.; инженер-исследователь лаборатории проблем лазерной диагностики технических и живых систем, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), alonova\_marina@mail.ru

Ювченко Сергей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.; научный сотрудник лаборатории проблем лазерной диагностики технических и живых систем, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), yuv-sergej@yandex.ru

Ушакова Екатерина Владимировна, магистрант кафедры физики, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., katushakova96@yandex.ru

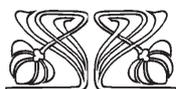
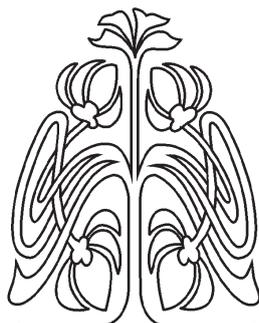
Разработана математическая модель, описывающая статистические свойства пространственных флуктуаций многократно рассеянного узкополосного излучения, получаемого в результате спектральной селекции флуоресценции случайно-неоднородной среды, накачиваемой непрерывным лазерным излучением. Модель предназначена для количественной интерпретации экспериментальных данных, получаемых с использованием безопорного низкокогерентного рефлектометрического зондирования случайно-неоднородных сред. В данной модели в качестве зондирующего излучения используется излучение флуоресценции среды при её возбуждении непрерывным лазерным излучением. Показано существование универсальной взаимосвязи между универсальными параметрами, вводимыми в модели и характеризующими перенос зондирующего излучения в среде в условиях спектральной селекции. Представленные экспериментальные данные подтверждают адекватность разработанной модели.

**Ключевые слова:** низкокогерентная рефлектометрия, стохастическая интерференция, математическое моделирование переноса излучения.

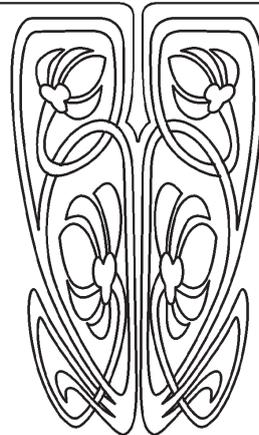
DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-4-15

#### Введение

В настоящее время одним из перспективных направлений в оптической диагностике объектов со сложной случайно-неоднородной структурой является применение в качестве зондирующего излучения света с длиной когерентности, сравнимой с характерными масштабами неоднородности объекта. Одним из наиболее ярких



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





примеров использования подобного подхода является оптическая когерентная томография (ОКТ), впервые предложенная в качестве диагностического метода для биомедицинских применений в девяностых годах прошлого века [1–3] и в настоящее время являющаяся одним из наиболее востребованных подходов в диагностике морфофункционального состояния поверхностных слоев биологических тканей. Применение ОКТ не ограничивается только биомедициной; известны работы, посвященные материаловедческим применениям данного метода (в частности, для анализа материалов с выраженной стратифицированной структурой [4–7]). Основным физическим принципом функционирования ОКТ систем, заключающийся в использовании зондируемого объекта в качестве отражателя в объектном плече интерферометра Майкельсона с источником частично-когерентного излучения и периодическим изменением оптической длины опорного плеча, в последнее время претерпел существенные изменения в части формирования интерференционного сигнала и его обработки. Это относится, в частности, к недавно появившимся ОКТ системам с лазерными источниками с периодически варьируемой частотой зондирующего излучения (см.: Swept Source OCT [8, 9]). Тем не менее физическая интерпретация формируемых в подобных системах интерференционных сигналов осталась прежней.

Традиционно в оптической когерентной томографии и аналогичных методах информативная составляющая регистрируемого сигнала связана с так называемой баллистической, или когерентной, составляющей зондирующего излучения, поступающей из зондируемого объекта в приемную апертуру системы. Эта составляющая обусловлена, как правило, френелевскими отражениями от границ слоев с различными показателями преломления в объекте. При этом диффузная составляющая регистрируемого сигнала, обусловленная многократным рассеянием света в объекте, играет негативную роль и приводит к спаду отношения «сигнал–шум» по мере увеличения глубины зондирования. Другим негативным фактором, обусловленным многократным рассеянием зондирующего света в среде, является стохастическая интерференция диффузно-рассеянных волн, распространяющихся по различным случайным траекториям в среде с различающимися длинами пути, но при этом попадающих в «окно когерентности» системы. Поскольку ширина «окна когерентно-

сти» существенно превышает среднее значение длины волны зондирующего излучения, а число статистически независимых парциальных составляющих диффузно-рассеянного света очень велико, это приводит к стохастической модуляции регистрируемого интерференционного сигнала. Значительное количество работ в последние два десятилетия были посвящены проблеме подавления стохастического шума в ОКТ изображениях; рассматривались различные решения, начиная от тривиальной усредняющей обработки интерференционного сигнала и заканчивая применением скользящих оконных фильтров различной степени сложности [10–12].

Вместе с тем следует отметить, что несмотря на негативную роль диффузных составляющих выходящего из среды зондирующего излучения в «классической» оптической когерентной томографии, эти составляющие содержат полезную информацию об оптических транспортных параметрах зондируемой среды, а также о некоторых процессах при взаимодействии света со средой (например, о спонтанном усилении распространяющегося света во флуоресцирующих средах). Возможность получения подобной информации из анализа «шумовых» составляющих сигналов в низкокогерентной рефлектометрии (НКР) случайно-неоднородных сред показана в работах [13–16], где рассмотрены два различных подхода к реализации «диффузионной» НКР – с применением классической интерференционной схемы с опорным и объектным пучками и с использованием принципа безопорной стохастической интерферометрии со спектральной селекцией широкополосного излучения флуоресценции, которое используется в качестве зондирующего.

Важной составляющей НКР зондирования случайно-неоднородных сред является установление количественных взаимосвязей между параметрами регистрируемых сигналов и характеристиками среды, контролирующими процесс распространения зондирующего излучения (в частности, ее оптическими параметрами). Подобные взаимосвязи, выраженные в аналитической или численной форме, используются в решении прямых или обратных задач НКР зондирования и в качестве ключевых составляющих содержат интегральные преобразования функции плотности вероятности оптических путей зондирующего излучения в среде  $\rho(s)$  либо саму функцию, в зависимости от того, какие характеристики рассеянного светового поля



анализируются (средняя интенсивность, функция когерентности, функция корреляции и т.д.). Эта функция, ассоциируемая с временным откликом среды при воздействии короткого светового импульса для заданной геометрии зондирования [17], может быть получена путем решения нестационарного уравнения переноса излучения [18]. В большинстве случаев это решение не может быть получено в аналитической форме и требует применения численных методов; в частности, одним из наиболее эффективных методов решения подобных задач является метод статистического моделирования (Монте–Карло). С другой стороны, такие информативные характеристики, измеряемые при НКР или спекл-коррелометрическом зондировании [19, 20], как пространственные и временные корреляционные функции, а также статистические моменты флуктуаций интенсивности детектируемого излучения связаны с  $\rho(s)$  линейными интегральными преобразованиями с соответствующим образом выбранными ядрами (см., например, [21, 22]). Подобная взаимосвязь следует из фундаментальных соотношений между характеристиками переноса излучения в среде, вводимыми в рамках теории переноса излучения, и статистическими и корреляционными характеристиками светового поля, используемыми в аналитической теории многократного рассеяния [18].

Таким образом, решение прямой задачи НКР или спекл-корреляционного зондирования (нахождение информативных характеристик детектируемого излучения по априори известным оптическим и геометрическим параметрам среды) может быть осуществлено с применением «гибридного» подхода. В данном подходе с помощью метода Монте–Карло моделируется ансамбль значений оптических путей составляющих зондирующего излучения в среде; производится частотный анализ этого ансамбля, на основании которого восстанавливается модельная функция  $\rho(s)$  для исследуемой системы; вычисляются интегральные преобразования функции  $\rho(s)$  при различных значениях управляющих параметров, используемых в зондировании. Результаты численного моделирования затем сопоставляются с полученными экспериментальными данными. Для решения обратной задачи (восстановление значений оптических параметров среды по измеренным в эксперименте информативным характеристикам детектируемого излучения) может быть применен инверсный гибридный подход, в котором задаются начальные значения

оптических параметров, по ним вычисляются информативные характеристики и сравниваются с полученными в эксперименте данными. По результатам сравнения производится коррекция начальных значений, после чего цикл повторяется. После определенного числа итераций достигается требуемая точность восстановления оптических параметров; подобная итеративная процедура может основываться на численных методах Ньютона, Левенберга–Марквардта (см., например, [23]) и др.

В данной работе упомянутый выше гибридный подход обсуждается применительно к безопорной низкокогерентной рефлектометрии случайно-неоднородных сред, использующей в своей основе эффект стохастической интерференции спектрально селективируемого широкополосного зондирующего излучения.

### **1. Математическая модель стохастической интерференции спектрально селективируемого излучения в безопорном НКР зондировании**

Схема безопорного НКР зондирования, физические основы которой обсуждались в работах [14–16], приведена на рис. 1. Зондируемая среда насыщается флуорофором с достаточно высоким квантовым выходом флуоресценции и накачивается непрерывным лазерным излучением. Используемое в качестве зондирующего флуоресцентное излучение регистрируется с помощью конфокальной системы и попадает на входную щель спектрометра с заданным спектральным разрешением  $\Delta\lambda$ . В процессе измерений производится сканирование зондируемого образца в направлении, перпендикулярном оси конфокальной системы. Вследствие высокой спектральной селективности и малой угловой апертуры системы детектирования регистрируемые диффузные составляющие интерферируют друг с другом на детекторе, давая в результате некоторое значение интенсивности интерференционного сигнала на длине волны  $\lambda$ , определяемой настройкой спектрометра, в спектральной полосе  $\Delta\lambda$ . Поперечное смещение образца приводит к случайным изменениям интенсивности на детекторе, которые связаны со стохастической интерференцией рассеянного средой зондирующего излучения в узкой полосе длин волн. В качестве информативных параметров могут быть выбраны статистические моменты различных порядков пространственных флуктуаций интенсивности, регистрируемых в ходе эксперимента.

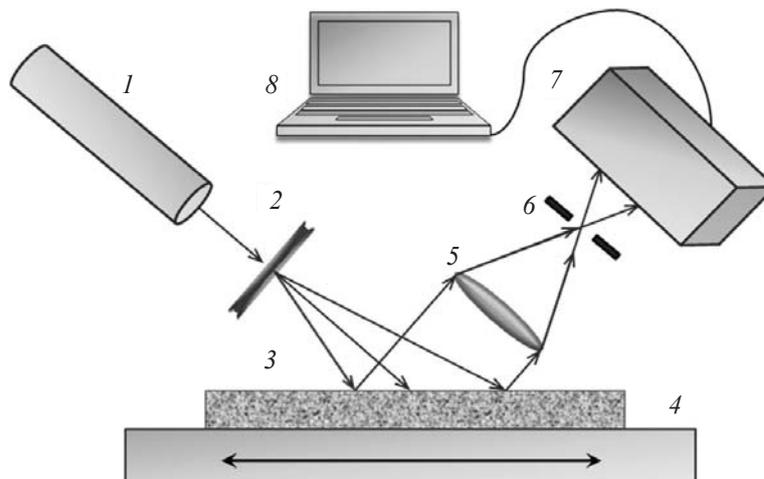


Рис. 1. Схема безопорного НКР зондирования с использованием эффекта стохастической интерференции спектрально селектуемых диффузных составляющих широкополосного излучения флуоресценции: 1 – лазер накачки, 2 и 5 – система линз, 3 – зондируемая среда, насыщенная флуорофором; 4 – однокоординатный микропозиционер, 6 – входная щель спектрометра, 7 – спектрометр, 8 – персональный компьютер

Fig. 1. Scheme of the reference-free low-coherence probe with the use of a stochastic interference of spectrally selected diffusing components of a broadband fluorescence radiation: 1 – pumping laser, 2, 5 – lenses, 3 – dye-saturated probed medium, 4 – 1D translator, 6 – entrance slit of a spectrometer, 7 – spectrometer, 8 – PC

Рассмотрим следующую модель формирования детектируемого сигнала: измеряемое значение интенсивности при фиксированном положении образца есть результат суперпозиции  $N$  квазимонохроматических световых волн с длинами волн, находящимися в интервале от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , причем  $\Delta\lambda \ll \lambda$ . Рассмотрим вначале случай детектирования «скалярных» волн, предполагая регистрируемые диффузные составляющие характеризуемыми одинаковыми состояниями линейной поляризации. Правомерность применения подобного подхода была ранее неоднократно подтверждена [13–16]. Полученные в рамках подобной модели выражения могут быть модифицированы для случая детектирования неполяризованного света. Усредненное по времени значение интенсивности для произвольно выбранной точки регистрации сигнала представим как

$$\overline{I(t)} = \overline{E(t)E^*(t)} = \overline{|E(t)|^2} = \overline{\left| \sum_i^N E_i(t) \exp\{j\varphi_i(t)\} \right|^2}, \quad (1)$$

где усреднение проводится по временному интервалу  $T$ , удовлетворяющему условию  $T \gg 2\pi/\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  – ширина спектра детектируемого излучения,  $E_i(t) = \sqrt{I_i(t)}$  и  $\varphi_i(t)$  – зависящие от

времени амплитуда и фаза  $i$ -й диффузной составляющей ( $E_i(t)$  – неотрицательная величина, а  $I_i(t)$  – медленно изменяющаяся интенсивность соответствующей диффузной составляющей). Фазовый член  $\varphi_i(t)$  может быть представлен в виде:  $\varphi_i(t) = \bar{\omega}t - ks_i + \phi(t - ks_i/\bar{\omega})$ , где  $\bar{\omega}$  – среднее значение частоты регистрируемых волн,  $k$  – волновое число излучения, распространяющегося в среде,  $s_i$  – путь в среде, проходимый  $i$ -й диффузной составляющей от источника до детектора,  $\phi(t)$  – флуктуационная составляющая фазы, обусловленная конечной шириной спектра регистрируемого излучения. Уравнение (1) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\overline{I(t)} = \sum_i^N \overline{I_i(t)} + \sum_i^N \sum_{i' \neq i}^N \overline{\sqrt{I_i(t)} \sqrt{I_{i'}(t)} \cos[k(s_i - s_{i'}) + \Delta\phi(t, s_i - s_{i'})]}, \quad (2)$$

где введено обозначение

$$\Delta\phi(t, s_i - s_{i'}) = \phi(t - ks_i/\bar{\omega}) - \phi(t - ks_{i'}/\bar{\omega}).$$

С использованием предположения о статистической независимости интерферирующих диффузных составляющих выражение (2) можно представить как



$$\overline{I(t)} = I = \sum_i^N E_{0i}^2 + \sum_i^N \sum_{i'}^N E_{0i} E_{0i'} \cos\{k(s_i - s_{i'})\} |g(s_i - s_{i'})|, \quad (3)$$

где  $g(s_i - s_{i'})$  – функция когерентности регистрируемого излучения, определяемая формой и шириной его спектра. В общем виде функция когерентности является комплексной и рассчитывается из следующих соотношений (о взаимосвязи функции когерентности и спектральной плотности излучения см., например, [24]):

$$\begin{aligned} s_i - s_{i'} &= vt; \\ \Omega &= \omega - \bar{\omega}; \\ a(t) &= \frac{\int_0^\infty I(\Omega) \cos \Omega t d\Omega}{\int_0^\infty I(\Omega) d\omega}, \\ b(t) &= \frac{\int_0^\infty I(\Omega) \sin \Omega t d\Omega}{\int_0^\infty I(\Omega) d\omega}, \\ |g(t)| &= \sqrt{a^2 + b^2(t)}, \\ \psi(t) &= \arctg \frac{b(t)}{a(t)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $v$  – фазовая скорость света в среде (дисперсия среды предполагается несущественной),  $\bar{\omega}$  – средняя частота в спектре,  $I(\Omega)$  – спектральная плотность излучения,  $|g(t)|$  и  $\psi(t)$  – соответственно модуль и аргумент функции когерентности.

Рассмотрим далее статистические моменты второго и третьего порядка флуктуаций интенсивности детектируемого излучения, обусловленных переходами между различными точками детектирования, полагая при этом зондируемую систему эргодической; знак  $\langle \rangle$  используем для усреднения величин по ансамблю:

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \left\langle \left( \sum_i^N E_{0i}^2 + \sum_i^N \sum_{i'}^N E_{0i} E_{0i'} \cos\{k(s_i - s_{i'})\} |g(s_i - s_{i'})| \right)^2 \right\rangle, \\ \langle I^3 \rangle &= \left\langle \left( \sum_i^N E_{0i}^2 + \sum_i^N \sum_{i'}^N E_{0i} E_{0i'} \cos\{k(s_i - s_{i'})\} |g(s_i - s_{i'})| \right)^3 \right\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

Без нарушения общности, полагая амплитуды интерферирующих волн одинаковыми и равными 1 и вводя обозначение  $\Delta s_{i'} = s_i - s_{i'}$ , представим (5) как

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \left\langle \left( N + 2 \sum_m^{N(N-1)/2} \cos(k\Delta s_m) |g(\Delta s_m)| \right)^2 \right\rangle, \\ \langle I^3 \rangle &= \left\langle \left( N + 2 \sum_m^{N(N-1)/2} \cos(k\Delta s_m) |g(\Delta s_m)| \right)^3 \right\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

где индекс  $m$  соответствует разности  $i - i'$ .

Допущение об одинаковых значениях амплитуд интерферирующих волн, равных 1, представляется правомерным в силу следующих соображений:

- при суммировании большого числа статистически независимых слагаемых статистические свойства сумм определяются центральной предельной теоремой и не зависят от распределений суммируемых величин; при этом математическое ожидание и дисперсия суммы равны соответственно суммам математических ожиданий и дисперсий слагаемых; в связи с этим вместо реальных распределений амплитуд интерферирующих волн могут быть рассмотрены одинаковые детерминированные величины;

- в дальнейшем анализе рассматриваются нормированные на соответствующие степени  $\langle I \rangle$  статистические моменты флуктуаций интенсивности ( $\langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2$  и  $\langle I^3 \rangle / \langle I \rangle^3$ ), что позволяет принять значения амплитуды интерферирующих волн равными 1.

В дальнейшем рассмотрим следующую форму функции когерентности, соответствующую спектральной фильтрации широкополосного излучения узким прямоугольным спектральным окном:

$$g\left(\frac{\Delta s}{l_c}\right) = \frac{\sin(\pi \Delta s / l_c)}{\pi \Delta s / l_c}. \quad (7)$$

Здесь  $l_c$  – длина когерентности спектрально селектируемого широкополосного излучения ( $l_c \approx \lambda^2 / \Delta \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны, соответствующая центру спектрального окна,  $\Delta \lambda$  – его ширина); форма функции когерентности, определяемая выражением (7), непосредственно следует из выражений (4).

Проводя преобразования выражений (6), переходя от дискретного распределения  $\Delta s_m$  к непрерывному при  $N \rightarrow \infty$  и рассматривая нормированные значения статистических моментов  $M_2 = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2$  и  $M_3 = \langle I^3 \rangle / \langle I \rangle^3$ , получим:



$$\begin{aligned}
 M_2 &= 1 + \frac{N-1}{N} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) \approx 1 + \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s), \\
 M_3 &= 1 + 3 \frac{N-1}{N} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) + 2 \frac{(N-1)^2}{N^2} \left( \int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3 \approx \\
 &\approx 1 + 3 \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) + 2 \left( \int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь  $\rho(\Delta s)$  – функция плотности вероятности значений разностей оптических путей диффузных составляющих детектируемого излучения в среде.

Полученные выражения соответствуют интерференции «скалярных» волн; в эксперименте подобный режим может быть реализован путем поляризационной дискриминации рассеянного неполяризованного света с использованием поля-

ризатора. Отметим, что в данном случае максимальные значения нормированных статистических моментов, достигаемые в случае  $l_c \rightarrow \infty$  или  $\Delta s \rightarrow 0$ , равны соответственно 2 и 6. В случае детектирования неполяризованного света, рассматриваемого как некогерентная смесь ортогонально поляризованных диффузных составляющих с одинаковыми значениями интенсивности, выражения (8) должны быть модифицированы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \langle I \rangle &= 2 \langle I_{\perp, \parallel} \rangle, \\
 \langle I^2 \rangle &= \langle (I_{\perp} + I_{\parallel})^2 \rangle = \langle I_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle I_{\perp} \rangle \langle I_{\parallel} \rangle + \langle I_{\parallel}^2 \rangle, \\
 \langle I^3 \rangle &= \langle (I_{\perp} + I_{\parallel})^3 \rangle = \langle I_{\perp}^3 \rangle + 3 \langle I_{\perp}^2 \rangle \langle I_{\parallel} \rangle + 3 \langle I_{\perp} \rangle \langle I_{\parallel}^2 \rangle + \langle I_{\parallel}^3 \rangle.
 \end{aligned} \tag{9}$$

При этом имеет место равенство статистических моментов для двух ортогональных состояний поляризации. Это позволяет получить:

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \frac{1}{2} \frac{\langle I_{\perp, \parallel}^2 \rangle}{\langle I_{\perp, \parallel} \rangle^2} + \frac{1}{2}, \\
 M_3 &= \frac{1}{4} \frac{\langle I_{\perp, \parallel}^3 \rangle}{\langle I_{\perp, \parallel} \rangle^3} + \frac{3}{4} \frac{\langle I_{\perp, \parallel}^2 \rangle}{\langle I_{\perp, \parallel} \rangle^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Соответственно выражения (8) при детектировании неполяризованного света преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 M_2 &\approx 1 + \frac{1}{2} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s), \\
 M_3 &\approx 1 + \frac{3}{2} \int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, предельные значения статистических моментов в данном случае равны 1.5 и 3.0.

## 2. Статистическое моделирование переноса диффузных составляющих в случайно-неоднородной среде

Таким образом, как в случае детектирования поляризованного излучения, так и в случае неполяризованного света, нормированные значения статистических моментов флуктуаций интенсивности, рассматриваемые в безопорной НКР случайно-неоднородных сред как информативные параметры, выражаются в приближенной аналитической форме как линейные комбинации несобственного интеграла  $\int_0^\infty |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s)$  и куба несобственного интеграла  $\int_0^\infty |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s)$ . Данные конструкции по сути представляют собой интегральные преобразования функции плотности вероятности разностей путей диффузных составляющих в среде с ядрами, равными  $|g(\Delta s)|^2$  и  $|g(\Delta s)|$ . Для определения функции  $\rho(\Delta s)$  можно воспользоваться тем обстоятельством, что случайная величина  $\Delta s$  представляет собой разность двух статистически независимых случайных величин  $s_i$  и  $s_{i'}$ , каждая из которых характеризуется



функцией плотности вероятности  $\rho(s)$  (см. введение). Это позволяет нам выразить  $\rho(\Delta s)$  следующим образом:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} \rho(s + \Delta s) \rho(\Delta s) ds, \Delta s \geq 0, \\ 0, \Delta s \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, решение прямой задачи безопорного НКР зондирования случайно-неоднородной среды с известными оптическими характеристиками (коэффициентом рассеяния  $\mu_s$ , коэффициентом поглощения  $\mu_a$  и параметром анизотропии рассеяния  $g$  [18]) может быть осуществлено по следующему алгоритму:

- 1) статистическое (Монте–Карло) моделирование переноса зондирующего излучения в среде для заданной геометрии зондирования и детектирования рассеянного света; создание массива значений оптических путей  $s_i$  диффузных составляющих зондирующего излучения в среде;
- 2) частотный анализ сформированного массива значений  $s_i$  с целью получения выборочной плотности распределения:

$$\rho(s_m) = N_m / \Delta s N_{\Sigma}; \Delta s = (s_{max} - s_{min}) / M;$$

$$s_m = s_{min} + \Delta s (m + 0.5); m = 0, 1, \dots, M - 1;$$

здесь  $M$  – число интервалов, используемых для частотного анализа;  $N_m$  – число значений  $s_i$ , попадающих в  $m$ -й интервал;  $N_{\Sigma}$  – полное число значений  $s_i$  в выборке (объем сгенерированного массива данных);  $\Delta s$  – ширина интервала; значение  $M$  целесообразно выбирать равным  $\sqrt{N_{\Sigma}}$  [25]; вычисляемая подобным образом выборочная плотность распределения удовлетворяет условию нормировки  $\sum_{m=0}^{M-1} \rho(s_m) \Delta s = 1$ ;

3) по полученной выборочной плотности вероятности  $\{\rho(s_m)\}$  в соответствии с выражением (12) вычисляется выборочная плотность вероятности разностей оптических путей  $\{\rho(\Delta s_k)\}$  путем замены несобственного интеграла конечной суммой дискретных значений и применения одного из методов численного интегрирования (например, метода Симпсона);

4) аналогично пункту 3 по полученной выборочной плотности распределения  $\{\rho(\Delta s_k)\}$  и заданной функции когерентности детектируемого излучения (например, в форме (7)) вы-

числяются значения  $J_1 = \int_0^{\infty} |g(\Delta s)|^2 \rho(\Delta s) d(\Delta s)$  и

$$J_2 = \left( \int_0^{\infty} |g(\Delta s)| \rho(\Delta s) d(\Delta s) \right)^3;$$

5) по найденным величинам  $J_1$  и  $J_2$  с использованием выражений (8) или (9) (в зависимости от наличия или отсутствия поляризационного фильтра в канале детектирования рассеянного излучения) вычисляются нормированные статистические моменты флуктуаций интенсивности  $M_2$  и  $M_3$ .

В качестве примера рис. 2 и 3 иллюстрируют промежуточные результаты решения прямой задачи НКР зондирования, соответствующие пунктам 2 и 3 рассмотренного алгоритма. При реализации процедуры Монте–Карло моделирования использовался подход, описанный ранее в работах [21, 22]. В качестве фазовой функции в модели принята функция Хеньи–Гринштейна [26], хорошо зарекомендовавшая себя при решении задач переноса излучения в случайно-неоднородных средах различной природы (начиная от биологических тканей и заканчивая композитными материалами). Учет поглощения среды производился для каждого «фотонного» пакета, распространяющегося по случайной трассе длиной  $s_i$ , путем коррекции значения его исходного веса, равного 1, бугеровским множителем  $\exp(-\mu_a s_i)$ . Представленные на рис. 2 распределения  $\{\rho(s_m)\}$  соответствуют случаю детектирования излучения, обратно рассеянного оптически толстым слоем среды, зондируемой широким коллимированным пучком (подобная геометрия представляет значительный интерес для решения прикладных задач безопорного НКР зондирования). Отметим, что в данном случае характерной особенностью является смещение моды распределений  $\{\rho(s_m)\}$  относительно нулевого значения  $s_m$ , зависящее от оптических характеристик среды. Это смещение обусловлено существованием наиболее вероятной глубины проникновения зондирующего излучения в среду, определяемой величиной транспортной длины распространения света в среде.

Для распределений  $\{\rho(\Delta s_k)\}$  вне зависимости от величины сдвига модального значения соответствующей функции  $\{\rho(s_m)\}$  всегда характерна

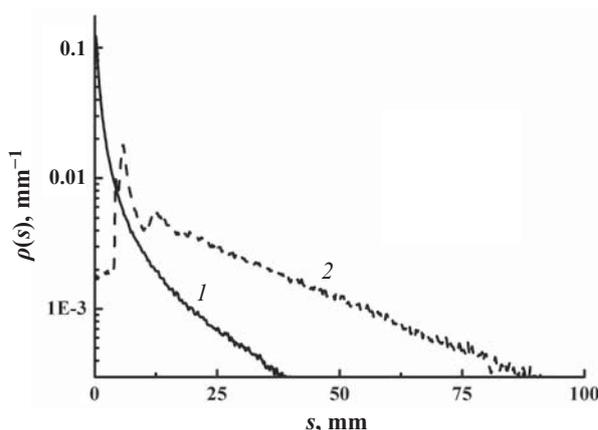


Рис. 2. Функции плотности вероятности  $\rho(s)$  оптических путей диффузных составляющих зондирующего излучения, полученные в результате Монте-Карло моделирования. Случай детектирования обратно рассеянного излучения. Произведение геометрической толщины слоя на транспортный коэффициент рассеяния  $L\mu'_s$  равно: 1 – 12 (оптически плотная среда); 2 – 0.16 (оптически тонкая среда). Коэффициент поглощения среды мал:  $\mu_a < \mu'_s$ . Пики на зависимости (2) соответствуют однократному и двукратному отражению зондирующего излучения от нижней границы слоя среды. Толщина модельной среды 2 мм

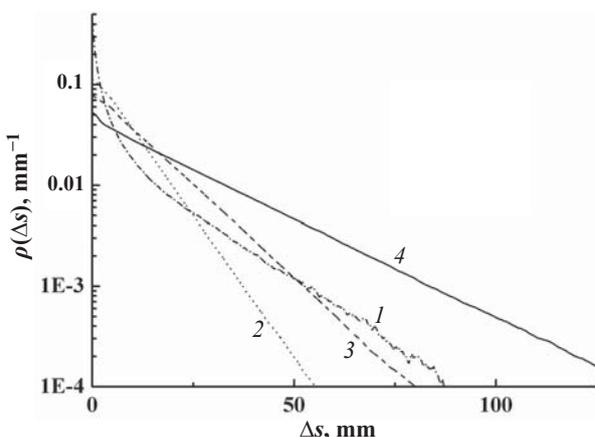


Рис. 3. Функции плотности вероятности разностей оптических путей  $\rho(\Delta s)$  диффузных составляющих зондирующего излучения, полученные в результате преобразования Монте-Карло данных с использованием выражения (11). Детектирование обратно рассеянного излучения. Значения параметра  $L\mu'_s$ : 1 – 12; 2 – 1.6; 3 – 0.4; 4 – 0.16. Толщина модельной среды 2 мм

Fig. 3. Probability density functions  $\rho(\Delta s)$  of the pathlength differences of diffusing components of probe radiation obtained using transformation (11) of the Monte Carlo-simulated pathlength distributions. The case of backward detection. The factor  $L\mu'_s$  equals: 1 – 12; 2 – 1.6; 3 – 0.4; 4 – 0.16. The layer thickness is 2 mm

мода (наиболее вероятное значение) при  $\Delta s_k = 0$  и монотонный спад плотности вероятности с ростом  $\Delta s_k$ . Это обусловлено взаимосвязью функций плотности вероятности  $\{\rho(\Delta s_k)\}$  и  $\{\rho(s_m)\}$ , описываемой выражением (12).

Вычисление параметров  $J_1$  и  $J_2$  для функции когерентности, соответствующей прямоугольному спектральному окну (выражение (7)), для меняющихся в широких пределах значений оптических параметров среды и длины когерентности детектируемого излучения позволило установить, что между этими параметрами существует достаточно универсальная взаимосвязь, описываемая степенной функцией вида

$$J_2 \cong (J_1)^{2,26}. \quad (13)$$

Более того, численное моделирование поведения параметров  $J_1$  и  $J_2$  при изменении отношения средней разности оптических путей к длине когерентности  $l_c$  для различных модельных форм распределений  $\rho(\Delta s)$  («односторонней» треугольной, экспоненциальной и «односторонней» гауссовой), достаточно далеких от распределений  $\Delta s$  при реальном переносе излучения в оптически плотных случайно-неоднородных средах в режиме обратного рассеяния, показали выполнимость соотношения (13) и в этих случаях (рис. 4). Используемые модельные распределения задавались следующими выражениями:

а) «одностороннее» треугольное распределение:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} \left( \frac{2}{3\langle \Delta s \rangle} \right) \left( 1 - \frac{\Delta s}{3\langle \Delta s \rangle} \right), & 0 \leq \Delta s \leq 3\langle \Delta s \rangle; \\ 0, & \Delta s < 0, \Delta s > 3\langle \Delta s \rangle; \end{cases}$$

б) экспоненциальное распределение:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} \left( \frac{1}{\langle \Delta s \rangle} \right) \exp \left( -\frac{\Delta s}{\langle \Delta s \rangle} \right), & \Delta s \geq 0; \\ 0, & \Delta s \leq 0; \end{cases}$$

в) «одностороннее» гауссово распределение:

$$\rho(\Delta s) = \begin{cases} \left( \frac{2}{\pi \langle \Delta s \rangle} \right) \exp \left( -\frac{\{\Delta s\}^2}{\pi \langle \Delta s \rangle^2} \right), & \Delta s \geq 0; \\ 0, & \Delta s \leq 0. \end{cases}$$

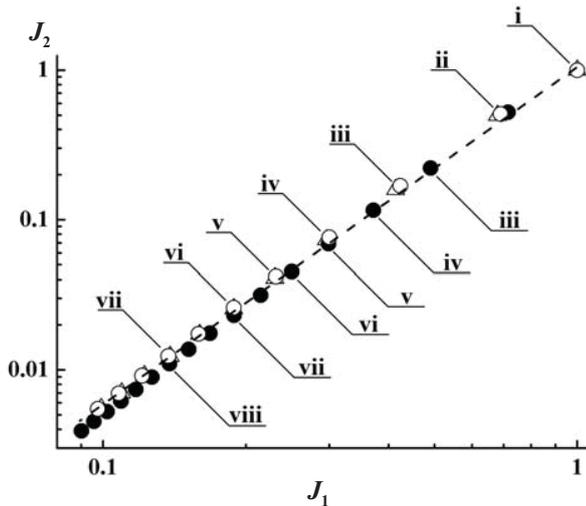


Рис. 4. Взаимосвязь параметров  $J_1$  и  $J_2$  для различных модельных форм распределений  $\rho(\Delta s)$  при различных значениях отношения  $\langle \Delta s \rangle / l_c$ . Пунктирная линия – аппроксимирующая степенная зависимость (13). «Открытые» треугольники – распределение а), сплошные круговые символы – распределение б), «открытые» круговые символы – распределение в). Значения отношений  $\langle \Delta s \rangle / l_c$ : i – 0; ii – 0.318; iii – 0.637; iv – 0.955; v – 1.273; vi – 1.592; vii – 2.228; viii – 3.183

Fig. 4. The plot of values  $J_1$  and  $J_2$  for various shapes of  $\rho(\Delta s)$  and various values of the ratio  $\langle \Delta s \rangle / l_c$ . Dotted line is the approximation (13); a) – open triangles; b) – closed circles; c) – open circles. The  $\langle \Delta s \rangle / l_c$  ratios are equal to: i – 0; ii – 0.318; iii – 0.637; iv – 0.955; v – 1.273; vi – 1.592; vii – 2.228; viii – 3.183

### 3. Сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными

Проверка гипотезы универсальности взаимосвязи  $J_1$  и  $J_2$  (и соответственно  $M_2$  и  $M_3$ ), следующей из представленных выше результатов математического моделирования переноса диффузных составляющих зондирующего излучения в случайно-неоднородных средах, производилась с использованием двух наборов эмпирических данных безпорного НКР зондирования насыщенных флуоресцентным красителем слоев плотноупакованных частиц диоксида кремния. Часть данных, полученная в условиях узкополосной селекции спектра флуоресцентного излучения с высоким разрешением ( $\Delta\lambda = 0.052$  нм, в качестве системы детектирования применялся конфокальный рамановский микроскоп LabRam HR800 (Horiba Jobin Yvon, США), была представлена ранее в работах [14–16]. Другая часть данных была получена с существенно меньшим спектральным разрешением (спектрометр QE65000 (Ocean Optics, США);  $\Delta\lambda \approx 1$  нм;

конфокальная система на основе  $100\times$  микрообъектива (NiKon, США). В обоих случаях в качестве флуорофора использовался краситель Родамин 6Ж, накачка зондируемой среды производилась непрерывным лазерным излучением 532 нм с плотностью мощности порядка 80 мВт/см<sup>2</sup>. Анализ флуктуационных составляющих спектрально селективируемого флуоресцентного излучения производился для различных длин волн в полосе флуоресценции насыщенных Родамином 6Ж сред (от 560 до 700 нм). По измеренным в экспериментах значениям статистических моментов восстанавливались значения  $J_1$  и  $J_2$  с использованием выражений (11), представленные на рис. 5. Здесь же приведена аппроксимирующая степенная зависимость (13). Несмотря на существенный случайный разброс

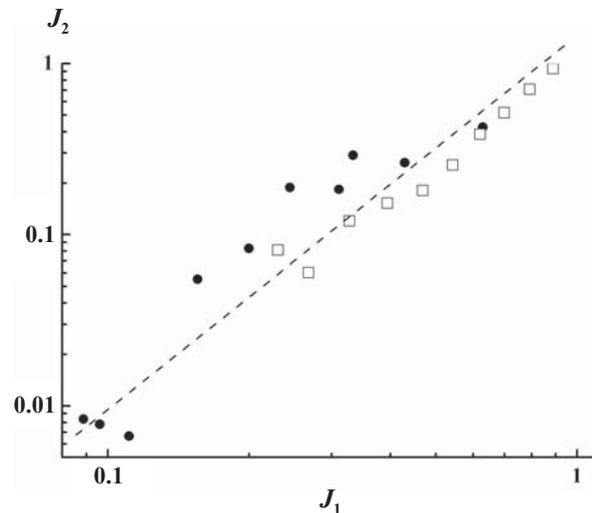


Рис. 5. Взаимосвязь параметров  $J_1$  и  $J_2$ , восстановленных из эмпирических данных безпорного НКР зондирования случайно-неоднородных сред со спектральной селекцией широкополосного зондирующего излучения (круговые символы – спектральная фильтрация с  $\Delta\lambda \approx 1$  нм, «мелкозернистая» матричная среда со средним размером частиц диоксида кремния  $\approx 3$  мкм; квадратные символы – спектральная фильтрация с  $\Delta\lambda = 0.052$  нм, «крупнозернистая» матричная среда со средним размером частиц диоксида кремния  $\approx 150$  мкм). Толщина зондируемых слоев в обоих случаях 2 мм, объемная доля частиц  $\approx 0.35$ . Точки соответствуют различным значениям средней длины волны детектируемого излучения

Fig. 5. Interrelation between the parameters  $J_1$  and  $J_2$  retrieved from the empirical data on the reference-free low-coherence reflectometry with spectral selection of broadband probe light. Circles correspond to the spectral window of  $\Delta\lambda \approx 1$  nm and a fine-grained matrix medium with the average size of  $\text{SiO}_2$  particles  $\approx 3$   $\mu\text{m}$ . Squares correspond to the spectral window of  $\Delta\lambda = 0.052$  nm and a coarse-grained matrix medium with the average size of  $\text{SiO}_2$  particles  $\approx 150$   $\mu\text{m}$



исходных эмпирических значений, обусловленный конечностью анализируемых выборок и измерительными шумами, можно утверждать, что представленные на рисунке данные можно рассматривать как подтверждение гипотезы универсальности взаимосвязи параметров  $J_1$  и  $J_2$ .

Отметим, что наблюдаемая особенность в поведении  $J_1$  и  $J_2$  (существенное убывание вблизи максимума флуоресценции и возрастание на краях спектра) предположительно обусловлена нелинейным эффектом спонтанного усиления флуоресцентного излучения в спектральном интервале, характеризуемом высоким квантовым выходом флуоресценции при высоких концентрациях красителя. Это должно приводить к возрастанию средней разности оптических путей диффузных составляющих для данного спектрального интервала. В частности, оценки значений  $\langle \Delta s \rangle$  на основании результатов математического моделирования переноса спектрально селективируемого излучения в зондируемых средах позволяют предположить более чем трехкратное возрастание данной величины вблизи максимума флуоресценции по сравнению с краями спектра.

### Заключение

Разработанная методология анализа данных безопорного НКР зондирования с использованием спектральной селекции широкополосного зондирующего излучения представляет интерес с точки зрения создания и развития новых подходов во флуоресцентной и спекл-коррелометрической диагностике случайно-неоднородных сред для различных приложений в биомедицине и физическом материаловедении. С другой стороны, достаточно высокая чувствительность разработанного подхода к изменениям условий переноса света в случайно-неоднородных средах, обусловленных различными нелинейными и резонансными эффектами при взаимодействии излучения со средами, позволяет применить эту методологию к анализу фундаментальных процессов взаимодействия света с активными случайно-неоднородными средами (в частности, к анализу перехода от режима усиления спонтанного излучения к стохастической лазерной генерации в среде).

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10455).

### Список литературы

1. Fujimoto J. G., Brezinski M. E., Tearney G. J., Boppart S. A., Bouma B., Hee M. R., Southern J. F., Swanson E. A. Optical biopsy and imaging using optical coherence tomography // *Nature Medicine*. 1995. Vol. 1, № 9. P. 970–972.
2. Youngquist R. C., Carr S., Davies D. E. N. Optical coherence-domain reflectometry: a new optical evaluation technique // *Optics Letters*. 1987. Vol. 12, № 3. P. 158–160.
3. Schmitt J. M., Knüttel A., Bonner R. F. Measurement of optical properties of biological tissues by low-coherence reflectometry // *Applied Optics*. 1993. Vol. 32, № 30. P. 6032–6042.
4. Webster P. J. L., Yu J. X. Z., Leung B. Y. C., Anderson M. D., Yang V. X. D., Fraser J. M. *In situ* 24 kHz coherent imaging of morphology change in laser percussion drilling // *Optics Letters*. 2010. Vol. 35. P. 646–648.
5. Walecki W., Wei F., Van P., Lai K., Lee T., Lau S.H., Koo A. Novel low coherence metrology for nondestructive characterization of high-aspect-ratio microfabricated and micromachined structures // *Proc. SPIE*. 2003. Vol. 5343. P. 55–63. DOI:10.1117/12.530749.
6. Walecki W. J., Lai K., Souchkov V., Van P., Lau S., Koo A. Novel noncontact thickness metrology for backend manufacturing of wide bandgap light emitting devices // *Physica status solidi (c)*. 2005. Vol. 2, № 3. P. 984–989. DOI:10.1002/pssc.200460606.
7. Walecki W., Pravdivtsev A., Santos M., Koo A. High-speed high-accuracy fiber optic low-coherence interferometry for *in situ* grinding and etching process monitoring // *Proc. SPIE*. 2006. Vol. 6293. P. 62930D. DOI:10.1117/12.675592.
8. Wang J., Gao X., Huang W., Wang W., Chen S., Du Sh., Li X., Zhang X. Swept-source optical coherence tomography imaging of macular retinal and choroidal structures in healthy eyes // *BMC Ophthalmology*. 2015. Vol. 15, № 1. P. 122.
9. Fathipour V., Schmoll T., Bonakdar A., Wheaton S., Mohseni H. Demonstration of Shot-noise-limited Swept Source OCT Without Balanced Detection // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7. P. 1183.
10. Ozcan A., Bilenca A., Desjardins A. E., Bouma B. E., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography images using digital filtering // *JOSA A*. 2007. Vol. 24, № 7. P. 1901–1910.
11. Puvanathan P., Bizheva K. Speckle noise reduction algorithm for optical coherence tomography based on interval type II fuzzy set // *Optics Express*. 2007. Vol. 15, № 24. P. 15747–15758.
12. Bouma B. E., Iftimia N., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography by path length encoded angular compounding // *Journal of Biomedical Optics*. 2003. Vol. 8. P. 260–263.
13. Зимняков Д. А., Сина Д. С., Ювченко С. А., Исаева Е. А., Чекмасов С. П. Измерение транспортного коэффициента рассеяния случайно-неоднородных сред методом низкокогерентной рефлектометрии // *Письма в Журнал технической физики*. 2014. Т. 40, вып. 3. С. 76–82.



14. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Asharchuk I. A., Sviridov A. P. Stochastic interference of fluorescence radiation in random media with large inhomogeneities // Optics Communications. 2017. Vol. 387. P. 121–127.
15. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Pavlova M. V., Alonova M. V. Reference-free path length interferometry of random media with the intensity moments analysis // Optics Express. 2017. Vol. 25, № 13. P. 13953–13972.
16. Зимняков Д. А., Ашарчук И. А., Ювченко С. А., Свиридов А. П. Спекл-спектроскопия флуоресцирующих случайно-неоднородных сред // Квантовая электроника. 2016. Т. 46, № 11. С. 1047–1054.
17. Johnson P. M., Imhof A., Bret B. P., Rivas J. G., Legendijk A. Time-resolved pulse propagation in a strongly scattering material // Physical Review E. 2003. Vol. 68, № 1. P. 016604.
18. Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media. N.Y.: Academic Press, 1978. Vol. 2. P. 349–351.
19. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Sviridov A. P., Bagratashvili V. N. Optical clearing and laser light dynamic scattering near the critical point of fluid in mesoporous materials // Laser Physics Letters. 2013. Vol. 10, № 4. P. 045601.
20. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Isaeva E. A., Bagratashvili V. N., Yermolenko S. B. Laser speckle probes of relaxation dynamics in soft porous media saturated by near-critical fluids // Applied Optics. 2014. Vol. 53, № 10. P. B12–B21.
21. Zimnyakov D. A. On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light // Waves in Random Media. 2000. Vol. 10, № 4. P. 417–434.
22. Zimnyakov D. A. Similarity effects in multiple scattering of coherent radiation: phenomenology and experiments // Optics and Spectroscopy. 2000. Vol. 89, № 3. P. 453–462.
23. Levenberg K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares // Quarterly of applied mathematics. 1944. Vol. 2, № 2. P. 164–168.
24. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000. 896 с.
25. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. 304 с.
26. Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the galaxy // Astrophysical Journal. 1941. Vol. 93. P. 70–83.

#### Образец для цитирования:

Зимняков Д. А., Алонова М. В., Ювченко С. А., Ушакова Е. В. Математическое моделирование переноса зондирующего излучения в низкокогерентной рефлектометрии случайно-неоднородных сред // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 4–15. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-4-15.

#### Mathematical Modeling of Light Transfer in Low-Coherence Reflectometry of Random Media

D. A. Zimnyakov, M. V. Alonova,  
S. A. Yuvchenko, E. V. Ushakova

Dmitry A. Zimnyakov, ORCID 0000-0002-9787-7903, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia, zimnykov@mail.ru

Marina V. Alonova, ORCID 0000-0001-7772-3985, Institute of Precision Mechanics and Control of Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya Str., 410028, Saratov, Russia, alonova\_marina@mail.ru

Sergey A. Yuvchenko, ORCID 0000-0001-7863-8600, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia, yuv-sergej@yandex.ru

Ekaterina V. Ushakova, ORCID 0000-0003-3674-301X Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia, katushakova96@yandex.ru

**Background and Objectives:** The mathematical model of stochastic interference of spectrally selected fluorescence radiation in multiple scattering random media is considered. The expressions for the normalized second- and third-order moments of spatial intensity fluctuations of detected probe light are derived. The developed model establishes the relationships between the normalized second- and third-order statistical moments of the intensity fluctuations of detected probe light and the probability density function of the pathlength differences of fluorescence radiation in probed media. The obtained theoretical results

are compared with the experimental data on the reference-free low-coherence reflectometry of dye-saturated model random media pumped with a continuous-wave laser radiation. **Materials and Methods:** The discrete scattering model is applied to derive the basic relationships between the normalized statistical moments of intensity fluctuations and the probability density function of the pathlength differences. The Monte-Carlo technique is applied to obtain the pathlength distributions in probed media for used illumination and detection conditions. The experimental data used for verification of the developed model are obtained using model scattering systems on the base of densely packed silica grains, which are saturated by a water solution of Rhodamine 6G and pumped by continuous-wave laser radiation at the wavelength of 532 nm. **Results:** The adequacy of the developed mathematical model is confirmed by the obtained experimental data. The universal relationship is established between the integral parameters dependent on the probability density function of the pathlength differences and the coherence function of spectrally selected probe radiation is established. **Conclusion:** The obtained results can be used as the physical base for the development of novel low-coherence probes for applications in biomedical optics and material science. **Key words:** low-coherent reflectometry, stochastic interference, mathematical modeling of radiative transfer.

*Acknowledgements:* This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-19-10455).

#### References

1. Fujimoto J. G., Brezinski M. E., Tearney G. J., Boppart S. A., Bouma B., Hee M. R., Southern J. F., Swanson E. A.



- Optical biopsy and imaging using optical coherence tomography. *Nature Medicine*, 1995, vol. 1, no. 9, pp. 970–972.
2. Youngquist R. C., Carr S., Davies D. E. N. Optical coherence-domain reflectometry: a new optical evaluation technique. *Optics Letters*, 1987, vol. 12, no. 3, pp. 158–160.
  3. Schmitt J. M., Knüttel A., Bonner R. F. Measurement of optical properties of biological tissues by low-coherence reflectometry. *Applied Optics*, 1993, vol. 32, no. 30, pp. 6032–6042.
  4. Webster P. J. L., Yu J. X. Z., Leung B. Y. C., Anderson M. D., Yang V.X.D., Fraser J. M. *In situ* 24 kHz coherent imaging of morphology change in laser percussion drilling. *Optics Letters*, 2010, vol. 35, pp. 646–648.
  5. Walecki W., Wei F., Van P., Lai K., Lee T., Lau S. H., Koo A. Novel low coherence metrology for nondestructive characterization of high-aspect-ratio microfabricated and micromachined structures. *Proc. SPIE*, 2003, vol. 5343, pp. 55–63. DOI:10.1117/12.530749.
  6. Walecki W. J., Lai K., Souchkov V., Van P., Lau S., Koo A. Novel noncontact thickness metrology for backend manufacturing of wide bandgap light emitting devices. *Physica status solidi (c)*, 2005, vol. 2, no. 3, pp. 984–989. DOI:10.1002/pssc.200460606.
  7. Walecki W., Pravdivtsev A., Santos M., Koo A. High-speed high-accuracy fiber optic low-coherence interferometry for *in situ* grinding and etching process monitoring. *Proc. SPIE*, 2006, vol. 6293, pp. 62930D. DOI: 10.1117/12.675592.
  8. Wang J., Gao X., Huang W., Wang W., Chen S., Du Sh., Li X., Zhang X. Swept-source optical coherence tomography imaging of macular retinal and choroidal structures in healthy eyes. *BMC Ophthalmology*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 122.
  9. Fathipour V., Schmoll T., Bonakdar A., Wheaton S., Mohseni H. Demonstration of Shot-noise-limited Swept Source OCT Without Balanced Detection. *Scientific Reports*, 2017, vol. 7, pp. 1183.
  10. Ozcan A., Bilenca A., Desjardins A. E., Bouma B. E., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography images using digital filtering. *JOSA A*, 2007, vol. 24, no. 7, pp. 1901–1910.
  11. Puvanathan P., Bizheva K. Speckle noise reduction algorithm for optical coherence tomography based on interval type II fuzzy set. *Optics Express*, 2007, vol. 15, no. 24, pp. 15747–15758.
  12. Bouma B. E., Ifimia N., Tearney G. J. Speckle reduction in optical coherence tomography by path length encoded angular compounding. *Journal of Biomedical Optics*, 2003, vol. 8, pp. 260–263.
  13. Zimnyakov D. A., Sina J. S., Yuvchenko S. A., Isaeva E. A., Chekmasov S. P. Measurement of the transport-scattering coefficient in random inhomogeneous media using the method of low-coherence reflectometry. *Technical Physics Letters*, 2014, vol. 40, iss. 2, pp. 132–134 (in Russian).
  14. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Asharchuk I. A., Sviridov A. P. Stochastic interference of fluorescence radiation in random media with large inhomogeneities. *Optics Communications*, 2017, vol. 387, pp. 121–127.
  15. Zimnyakov D. A., Yuvchenko S. A., Pavlova M. V., Alonova M. V. Reference-free path length interferometry of random media with the intensity moments analysis. *Optics Express*, 2017, vol. 25, no. 13, pp. 13953–13972.
  16. Zimnyakov D. A., Asharchuk I. A., Yuvchenko S. A., Sviridov A. P. Speckle spectroscopy of fluorescent randomly inhomogeneous media. *Quantum Electronics*, 2016, vol. 46, no. 11, pp. 1047–1054 (in Russian).
  17. Johnson P. M., Imhof A., Bret B. P., Rivas J. G., Lagendijk A. Time-resolved pulse propagation in a strongly scattering material. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 1, pp. 016604.
  18. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media*. New York, Academic Press, 1978, vol. 2, pp. 349–351.
  19. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Sviridov A. P., Bagratashvili V. N. Optical clearing and laser light dynamic scattering near the critical point of fluid in mesoporous materials. *Laser Physics Letters*, 2013, vol. 10, no. 4, pp. 045601.
  20. Zimnyakov D. A., Chekmasov S. P., Ushakova O. V., Isaeva E. A., Bagratashvili V. N., Yermolenko S. B. Laser speckle probes of relaxation dynamics in soft porous media saturated by near-critical fluids. *Applied Optics*, 2014, vol. 53, no. 10, pp. B12–B21.
  21. Zimnyakov D. A. On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light. *Waves in Random Media*, 2000, vol. 10, no. 4, pp. 417–434.
  22. Zimnyakov D. A. Similarity effects in multiple scattering of coherent radiation: phenomenology and experiments. *Optics and Spectroscopy*, 2000, vol. 89, no. 3, pp. 453–462.
  23. Levenberg K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 1944, vol. 2, no. 2, pp. 164–168.
  24. Mandel L., Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. 1192 p.
  25. Novickij P. V., Zograf I. A. *Oценка pogreshnostej rezul'tatov izmerenij* [An estimate of measurement data errors]. Leningrad, Jenergoatomizdat, 1991. 304 p. (in Russian).
  26. Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the galaxy. *Astrophysical Journal*, 1941, vol. 93, pp. 70–83.

**Cite this article as:**

Zimnyakov D. A., Alonova M. V., Yuvchenko S. A., Ushakova E. V. Mathematical Modeling of Light Transfer in Low-Coherence Reflectometry of Random Media. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 4–15 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-4-15.



УДК 535.2:621.391

## МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ОПТОВОЛОКОННЫХ ЛИНИЯХ СВЯЗИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО СОЛИТОННОГО СПЕКТРА

А. И. Конюхов, П. А. Маврин, Е. В. Щуркин

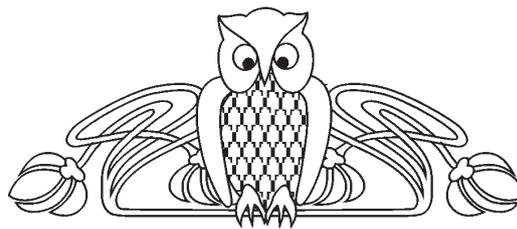
Конюхов Андрей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала ИРЭ имени В. К. Котельникова РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; старший научный сотрудник лаборатории нелинейной оптики, Институт общей физики имени А. М. Прохорова РАН (Москва), kai@optics.sgu.ru

Маврин Петр Анатольевич, студент 1-го курса магистратуры, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, mra95@mail.ru

Щуркин Евгений Владимирович, студент 1-го курса магистратуры, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, haifisch1986@gmail.com

**Объект исследования.** Нелинейное преобразования Фурье для лазерных импульсов, распространяющихся в оптических волокнах, позволяет анализировать солитонную составляющую сигнала. Оптические солитоны описываются набором параметров, образующих так называемый дискретный солитонный спектр. В настоящее время обработка данных с использованием нелинейного преобразования Фурье осуществляется при помощи электронно-цифровых устройств. При передаче информации при помощи оптических солитонов кодирование каналов может реализовываться при помощи изменения параметров солитонов или так называемого солитонного спектра, который рассчитывается при помощи нелинейного преобразования Фурье. В работе рассмотрена передача данных при помощи модуляции дискретной части солитонного спектра.

**Цель.** Разработка способа модуляции дискретной составляющей солитонного спектра с использованием специальных оптических волокон. **Использованные методы и подходы.** В работе проанализировано взаимодействие оптических солитонов в волокне с периодическим изменением диаметра. Использовалось численное моделирование на основе нелинейного уравнения Шредингера. Дискретный солитонный спектр рассчитывался на основе данных обратной задачи рассеяния. **Основные результаты.** Предложена схема уплотнения каналов в оптоволоконных линиях связи, работающих с использованием нелинейного преобразования Фурье. Показано, что управление дискретным солитонным спектром может быть реализовано при помощи оптического волокна, имеющего периодическую модуляцию дисперсии вдоль его длины. Изменение расстояния между исходными солитонами, периода модуляции волокна позволяет создавать солитонные пары с уникальным дискретным солитонным спектром. Этот эффект можно использовать для кодирования сигнала оптическими методами.



**Ключевые слова:** оптический солитон, обратная задача рассеяния, нелинейное преобразование Фурье, мультиплексирование каналов связи.

DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-16-22

### Введение

Системы оптоволоконных каналов связи составляют основу глобальных телекоммуникационных сетей и в настоящее время осуществляют передачу более 99% мирового информационного трафика [1]. Системы связи реализуются как многоканальные системы, используя различные методы уплотнения каналов (мультиплексирование). Уплотнение каналов позволяет организовать передачу данных от нескольких независимых абонентов. Сигналы сообщений всех каналов смешиваются на передающем пункте и поступают в линию. На приемном пункте сигналы снова разделяются и преобразуются в независимые сообщения. В оптических линиях связи применяют временной, частотный, кодовый и комбинированный методы разделения каналов [1, 2]. Быстрое увеличение скорости передачи данных в основных системах волоконной связи в настоящее время приближается к пределам технологий передачи, многие из которых были первоначально разработаны для линейных (радио) каналов связи [2]. Предел спектральной эффективности канала накладывается нелинейностью волокон [3, 4]. Поэтому использование «линейных методов» при передаче данных по реальному оптоволокну ограничено нелинейными свойствами среды. Увеличение мощности сигнала для улучшения отношения сигнал/шум приводит к нелинейному искажению сигнала. Таким образом, нелинейность является важным компонентом в разработке усовершенствованных волоконно-оптических систем связи, но инженеры, как правило, стараются уменьшить влияние нелинейности из-за сложности контроля нелинейного сигнала.

Существует очевидная необходимость в разработке новых подходов к кодированию, передаче



и обработке информации в каналах волоконной связи, которые учитывали бы нелинейные свойства оптического волокна. В оптических волокнах нелинейность керровского типа совместно с аномальной дисперсией второго порядка могут приводить к формированию устойчивых импульсов – солитонов. Солитоны не изменяют своей формы при распространении на большие расстояния и являются привлекательными объектами для организации скоростных линий связи. Однако принципиальным ограничением в использовании солитонов является их взаимодействие [3, 5]. Два синфазных солитона притягиваются друг к другу, что приводит к изменению временного интервала между импульсами. Однако данное обстоятельство может быть преодолено с использованием нелинейного солитонного спектра. Солитонные параметры, являющиеся решением обратной задачи рассеяния, не изменяются при упругом взаимодействии солитонов и могут быть использованы для кодирования каналов связи. Впервые такой подход был предложен в работе [6]. Солитонный спектр можно получить из решения обратной задачи рассеяния, поставленной для нелинейного уравнения Шредингера [5, 6]. Процедура нахождения солитонного спектра получила название нелинейного преобразования Фурье [7, 8]. Солитонный спектр содержит непрерывную часть, связанную с дисперсионными волнами, и дискретную часть, соответствующую отдельным солитонам. Было показано, что для организации канала связи можно использовать как непрерывную [9], так и дискретную часть солитонного спектра [10].

Для организации нескольких каналов требуется реализовать наборы импульсов с различным дискретным солитонным спектром. В настоящее время такие импульсы синтезируются при помощи цифровых электронных устройств. Минимальная длительность таких импульсов – несколько наносекунд, что существенно ограничивает скорость передачи данных. Для пикосекундных импульсов требуются полностью оптические методы. Для реализации набора импульсов с заданным дискретным солитонным спектром предлагается способ, основанный на разделении солитонных импульсов в оптическом волокне с периодическим изменением дисперсии [11]. Предложена схема с временным разделением каналов.

Структура статьи следующая. В первом разделе рассмотрены нелинейное уравнение Шредингера и дискретный солитонный спектр.

Во втором разделе представлен способ изменения дискретной составляющей солитонного спектра. В третьем разделе предложена схема мультиплексирования каналов передачи данных. В заключении дано резюме полученных результатов и перспективы их применения.

### 1. Нелинейное уравнение Шредингера и дискретный солитонный спектр

Солитон представляет собой одно из решений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [3, 5]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = i\gamma |A|^2 A(z, \tau), \quad (1)$$

где  $A(z, \tau)$  – комплексная огибающая амплитуды электрического поля,  $z$  – дистанция распространения,  $\tau$  – время в бегущей системе координат  $\tau = t - z/u$ ,  $u = (\partial\omega / \partial\beta)$  – групповая скорость импульса, рассчитанная для несущей частоты импульса  $\omega_0$ ,  $\beta$  – постоянная распространения основной моды оптоволоконна,  $\beta_2 = (\partial^2\beta / \partial\omega^2)$  – коэффициент дисперсии второго порядка [5, глава 1], определенный для несущей частоты импульса  $\omega_0$ ,  $\gamma = (\omega_0/c)n_2/A_{eff}$  – эффективный коэффициент керровской нелинейности волокна,  $n_2$  – нелинейный показатель преломления материала,  $A_{eff}$  – эффективная площадь основной моды оптоволоконна [3, 5]. Для нахождения солитонных решений (1) необходимо воспользоваться методом обратной задачи рассеяния [5, 8]. Для потенциала  $q(\tau) = A(z, \tau)(\gamma / |\beta_2|)^{1/2}$ , заданного при фиксированном  $z$ , решается система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} - q(\tau)v_1 = -i\lambda v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - q^*(\tau)v_2 = i\lambda v_1, \quad (2)$$

где  $v_{1,2}(z, \tau)$  – собственные функции,  $\lambda$  – комплексное собственное значение (спектральный параметр), “\*” обозначает комплексное сопряжение. При численном решении системы (3) потенциал  $q(\tau)$  задан на конечном интервале  $T_1 \leq \tau \leq T_2$ . Система (2) решается при начальных условиях  $v_1(T_1, \lambda) = \exp(-i\lambda T_1)$ ,  $v_2(T_1, \lambda) = 0$ . Коэффициенты матрицы рассеяния определяются как  $a(\lambda) = v_1(T_2, \lambda)\exp(i\lambda T_2)$  и  $b(\lambda) = v_2(T_2, \lambda)\exp(-i\lambda T_2)$ . Дискретные значения  $\lambda_j$ , являющиеся корнями уравнения  $a(\lambda_j) = 0$ , представляют собой дискретный солитонный спектр. Каждое решение  $\lambda_j$  соответствует солитону. В общем случае полное поле является нелинейной суперпозицией таких



солитонов. Для пояснения физического смысла параметра  $\lambda_j$  отметим, что если групповые скорости всех солитонов различны, то при  $z \rightarrow \infty$

$$A(z, \tau) = \sum_{j=1}^N A_j \operatorname{sech} \left[ \frac{u_j}{2} (\tau - z \cdot v_j) \right] \exp \left[ i \left( \phi_0 + \frac{v_j}{2} \tau + \frac{u_j^2 - v_j^2}{4} z \right) \right]. \quad (3)$$

Здесь  $A_j = 2\tau_0(|\beta_2|/\gamma)^{1/2} \operatorname{Im}(\lambda_j)$  – амплитуда солитона,  $v_j = 2\tau_0^{-1} \operatorname{Re}(\lambda_j)$  определяет сдвиг частоты солитона  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 2v_j$  где  $\omega_0$  – несущая частота солитона,  $u_j = 2\tau_0^{-1} \operatorname{Im}(\lambda_j)$ ,  $\phi_0$  – начальная фаза. Импульс, заданный в виде

$$A(0, \tau) = (N/\tau_0) \sqrt{|\beta_2|/\gamma} \operatorname{sech}(\tau/\tau_0), \quad (4)$$

имеет корни  $\lambda_j = i(N - j + 1/2)$ , где  $j = 1, 2, \dots$ . При этом  $j < N + 1/2$ . Поскольку солитонный спектр (4) представлен чисто мнимыми числами, то несущие частоты всех солитонов совпадают и все солитоны распространяются с одинаковыми групповыми скоростями, сохраняя волновой пакет. При изменении действительной части  $\operatorname{Re}(\lambda_j)$  несущая частота изменяется и за счет дисперсии изменяется групповая скорость солитона. Такой солитон отделяется от основного пакета. Отметим, что в классическом НУШ величины  $\lambda_j$  сохраняются при распространении и взаимодействии солитонов. Тогда как расстояние между солитонами и их фазы могут изменяться. Именно факт сохранения параметров  $\lambda_j$  в нелинейных оптических волокнах является ключевым для использования в солитонных системах уплотнения каналов [6–10].

## 2. Способ изменения дискретной составляющей солитонного спектра

Известно, что волокно с периодическим изменением дисперсии позволяет разделять оптический солитон высшего порядка  $N > 1.5$  (4) на несколько отдельных импульсов [11]. Возможно объединение солитонов в интенсивный импульс [12]. Рассмотрим возможность изменения параметров  $\lambda_j$  для двух синфазных солитонов. Начальное поле зададим в виде

$$A(z, \tau) = A_0 \operatorname{sech}(\tau/\tau_0 + T) + A_0 \operatorname{sech}(\tau/\tau_0 - T), \quad (5)$$

где  $\tau_0$  – длительность импульса,  $T$  – безразмерный параметр, определяющий расстояние между начальными импульсами,  $A_0 = (1/\tau_0) \sqrt{|\beta_2|/\gamma}$  – амплитуда односолитонного импульса. Для

поля этих солитонов не будут перекрываться и полное поле можно представить суммой отдельных импульсов:

НУШ (1) существует асимптотическое решение с двумя спектральными параметрами обратной задачи рассеяния

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sinh(T) \pm 1}{\cosh(T)} \right). \quad (6)$$

При  $T$ , стремящемся к бесконечности, солитоны не взаимодействуют и дискретный солитонный спектр вырожден  $\lambda_1 = \lambda_2 = i0.5$ . При распространении в волокне солитоны (5) периодически притягиваются и отталкиваются. Период изменений формы импульсов определяется формулой

$$z_p = 2z_0(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1}, \quad (7)$$

где  $z_0 = (\pi/2)(\tau_0^2 |\beta_2|^{-1})$  – период солитона [5].

Эволюция начального поля, определяемого формулой (5), показана на рис. 1. При указанных параметрах точка столкновения солитонов располагается на расстоянии  $z_c = z_p/2 = 31.97$  км,  $\lambda_1 = i0.4975$ ,  $\lambda_2 = i0.5025$ . В волокне с постоянным коэффициентом нелинейности  $\gamma$  и коэффициентом дисперсии второго порядка  $\beta_2$  параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (см. формулу (6)) остаются неизменными, несмотря на взаимодействие солитонов.

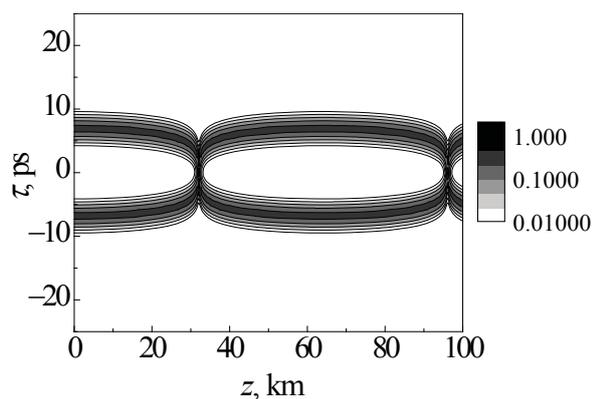


Рис. 1. Эволюция двух синфазных солитонов (см. Формулу (5)) при  $\tau_0 = 1.14$  пс,  $\beta_2 = -12.76$  пс<sup>2</sup>/км,  $\gamma = 8.2$  (Вт · км)<sup>-1</sup>,  $T = 6$ ,  $z_m = \infty$ . Шкала показывает диапазон изменения интенсивности в отн. ед.

Fig. 1. Evolution of two in-phase solitons (5),  $\tau_0 = 1.14$  ps,  $\beta_2 = -12.76$  ps<sup>2</sup>/km,  $\gamma = 8.2$  (W · km)<sup>-1</sup>,  $T = 6$ ,  $z_m = \infty$ . The color bar shows the range of intensity change in arb. un.



Для изменения параметров  $\lambda_j$  необходимо ввести возмущение в НУШ (1). Роль такого возмущения может играть периодическое изменение дисперсии в волокне с переменным диаметром. Рассмотрим распространение импульсов в волокне с дисперсией и нелинейностью, подчиняющихся синусоидальному закону [11]:

$$\begin{aligned} \beta_2(z) &= -12.76[1 + 0.2 \sin(2\pi z / z_m)], \\ \gamma(z) &= 8.2[1 + 0.028 \sin(2\pi z / z_m)], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\beta_2$  имеет размерность  $\text{пс}^2/\text{км}$ ,  $\gamma$  указана в единицах  $(\text{Вт} \cdot \text{км})^{-1}$ . При изменении диаметра волокна коэффициент нелинейности  $\gamma(z)$  изменяется достаточно слабо в сравнении с изменением коэффициента дисперсии  $\beta_2(z)$ , определяемого формулой (8). Поэтому изменение параметров солитонов происходит в первую очередь из-за модуляции дисперсии. На рис. 2 показана динамика импульсов и изменение действительной и мнимой части параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Как видно из рис. 2, *а* столкновение солитонов происходит гораздо раньше ( $z_c = 18.83$  км), чем это происходит в модели НУШ с постоянными коэффициентами  $\beta_2$  и  $\gamma$  ( $z_c = z_p/2 = 31.97$  км) (см. рис. 1). В момент столкновения изменяется действительная часть коэффициентов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (рис. 2, *б*). Амплитуда солитонов, определяемая мнимой частью  $\text{Im}(\lambda)$ , практически не изменяется. После прохождения отрезка волокна длиной 30 км солитонные параметры принимают значения  $\lambda_1 = -0.17 + i0.46$ ,  $\lambda_2 = 0.17 + i0.46$ . Изменяя расстояние между начальными импульсами (5), можно изменять их величины. На рис. 3 показана динамика изменения солитонов при исходном расстоянии, определяемом параметром  $T = 4$ . Солитоны после столкновения формируют двухсолитонный бризер (рис. 3, *а*). Сдвиг частоты солитонов остаётся неизменным  $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$ . Однако амплитуды солитонов, определяемые величиной  $\text{Im}(\lambda)$ , перераспределяются (рис. 3, *б*). При  $z = 30$  км  $\lambda_1 = i0.64$ ,  $\lambda_2 = i0.1$ .

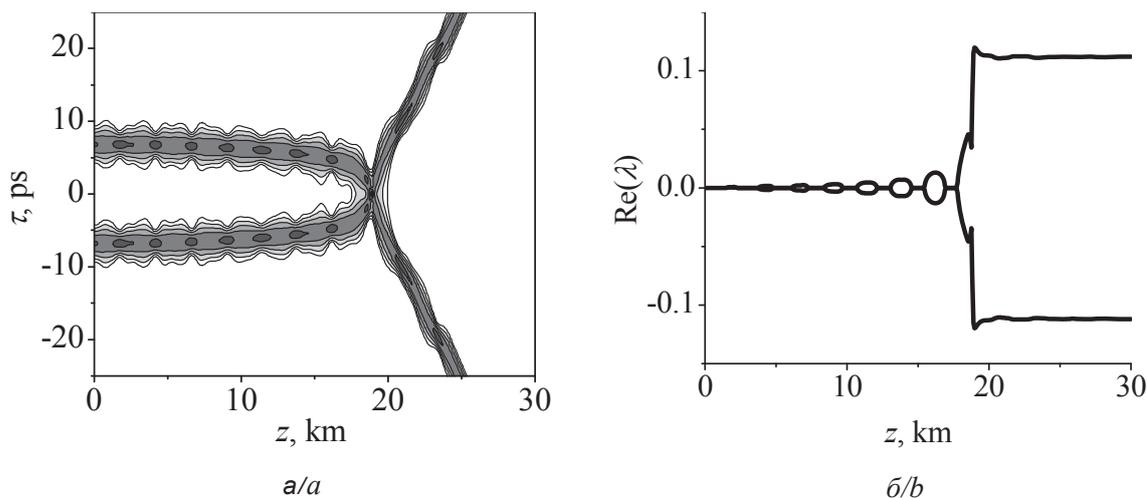


Рис. 2. Столкновение двух солитонов в волокне с периодическим изменением дисперсии: *а* – интенсивность  $I = |A(z, \tau)|^2$ ; *б* – действительная часть параметра  $\lambda$ . Начальное расстояние между импульсами  $T = 6$ . Коэффициенты  $\beta_2$  и  $\gamma$  НУШ (1) определяются формулой (8). Остальные параметры см. рис. 1

Fig. 2. Collision of two solitons in dispersion oscillating fiber: *a* – intensity  $I = |A(z, \tau)|^2$ ; *b* – real part of the parameter  $\lambda$ . Time separation between initial pulses is  $T = 6$ . Coefficients  $\beta_2$  and  $\gamma$  of nonlinear Schrödinger Eq. (1) are given by Eq. (8). Other parameters are the same as in the Fig. 1

Таким образом, используя задающий генератор лазерных импульсов, на выходе из волокна с периодическим изменением дисперсии можно создавать различные наборы солитонных параметров  $\lambda_j$ . Каждый из таких наборов можно использовать для организации канала связи.

### 3. Схема мультиплексирования каналов передачи данных

На схеме, приведенной на рис. 4, *а*, импульсы от волоконного лазера подаются на линию задержки для генерации солитонной пары. После усиления волокно с периодическим изменением дисперсии используется для создания солитонно-

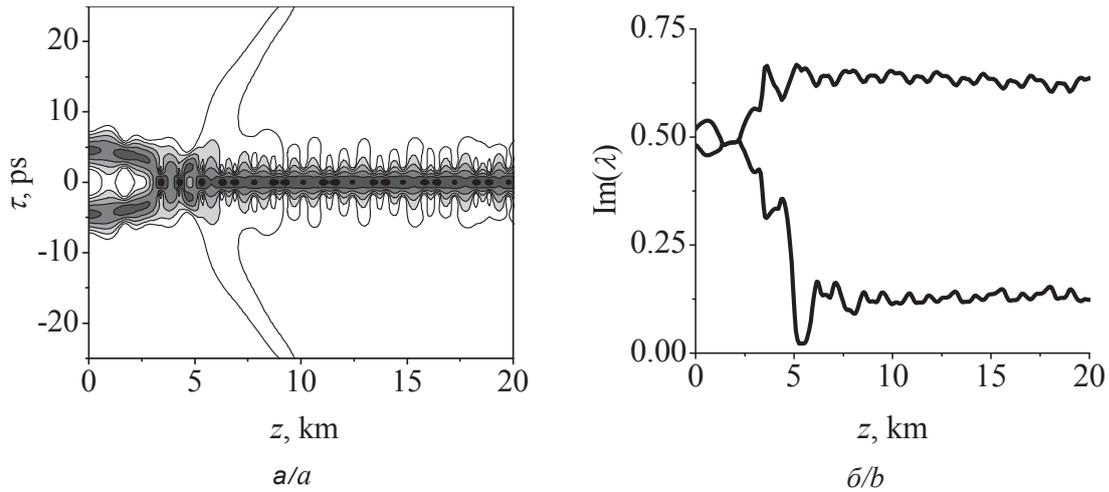


Рис. 3. Столкновение двух солитонов в волокне с периодическим изменением дисперсии (8): *a* – интенсивность  $I = |A(z, \tau)|^2$ ; *b* – мнимая часть параметра  $\lambda$ . Начальное расстояние между импульсами  $T = 4$ . Остальные параметры см. рис. 1

Fig. 3. Collision of two solitons in dispersion oscillating fiber (8): *a* – intensity  $I = |A(z, \tau)|^2$ ; *b* – imaginary part of the parameter  $\lambda$ . Other parameters are the same as in the Fig. 1

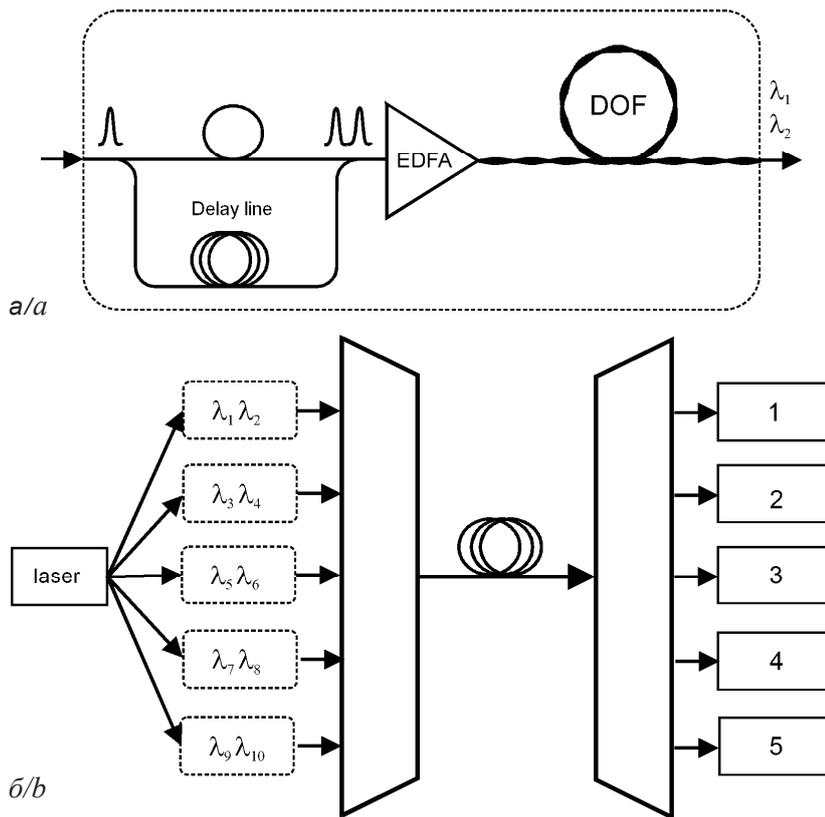


Рис. 4. Схема уплотнения каналов на основе дискретного солитонного спектра: *a* – генерация заданных солитонных состояний с использованием волокна с периодическим изменением дисперсии (DOF), EDFA – волоконный эрбиевый усилитель; *b* – схема объединения каналов для передачи по одному оптическому волокну

Fig. 4. A multiplexing scheme for eigenvalue based fiber-optic transmission line: *a* – generation of given eigenvalue states using dispersion oscillating fiber (DOF), EDFA is erbium-doped fiber amplifier; *b* – scheme for combining channels for transmission over a single optical fiber



го состояния с заданными параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Объединяя несколько таких блоков (см. рис. 4, а) в одну передающую систему (рис. 4, б), можно получить многоканальную систему. Каждый из наборов  $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$  транслируется в определенный промежуток времени. Аналогичный подход был реализован при кодировании каналов с использованием действительной части спектрального параметра  $\text{Re}(\lambda)$  солитона первого порядка [13]. Генерация солитона осуществлялась при помощи электронного генератора произвольной формы сигнала. В предлагаемом нами подходе солитонные параметры  $\lambda$  изменяются оптическим методом.

Демультимплексирование сигнала на оконечном пункте может осуществляться с использованием когерентного детектирования [14] и последующим нелинейным преобразованием Фурье [8–10]. После прохождения волокна с периодическим изменением дисперсии солитоны приобретают различные групповые скорости. Временной интервал между исходными импульсами должен быть достаточно большим, чтобы исключить перекрытие соседних импульсов. Данная особенность ограничивает скорость передачи.

### Заключение

Показано, что периодическая модуляция дисперсии волокна может использоваться как средство управления солитонами. Такое оптоволоконно позволяет изменять дискретный солитонный спектр. Солитонные параметры могут использоваться для кодирования каналов связи в нелинейных оптоволоконных сетях. Важным преимуществом предложенного подхода является использование полностью волоконной системы для генерации заданных солитонных состояний. Помимо практических применений резонансные явления в динамике солитонов позволяют использовать новую платформу для изучения физики солитонных взаимодействий.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-12-01564).

### Список литературы

1. Cvijetic M., Djordjevic I. B. Advanced optical communication systems and networks. Norwood : Artech House, 2013. 804 p.
2. Wong E. Next-generation broadband access networks and technologies // Journ. of Lightwave Technol. 2012. Vol. 30. P. 597–608. DOI:10.1109/JLT.2011.2177960.
3. Agrawal G. P. Fiber-optic communication systems. 3rd ed. N.Y. : John Wiley & Sons Inc., 2002. 548 p.
4. Essiambre R. J., Kramer G., Winzer P. J., Foschini G. J., Goebel B. Capacity limits of optical fiber networks // J. of Lightwave Technol. 2010. Vol. 28. P. 662–701. DOI: 10.1109/JLT.2009.2039464.
5. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М. : Наука, 1988. 312 с.
6. Hasegawa A., Nyu T. Eigenvalue communication // J. of Lightwave Technol. 1993. Vol. 11. P. 395–399. DOI: 10.1109/50.219570.
7. Turitsyn S. K., Prilepsky J. E., Le S. T., Wahls S., Frumin L. L., Kamalian M., Derevyanko S. A. Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission : advances and perspectives // Optica. 2017. Vol. 4. P. 307–322. DOI: 10.1364/OPTICA.4.000307.
8. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear Fourier transform. Part II : numerical methods // IEEE Transactions on Information Theory. 2014. Vol. 60. P. 4329–4345. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321151.
9. Le S. T., Aref V., Buelow H. Nonlinear signal multiplexing for communication beyond the Kerr nonlinearity limit // Nature Photonics. 2017. Vol. 11. P. 1–8. DOI: 10.1038/nphoton.2017.118.
10. Dong Z., Hari S., Gui T., Zhong K., Yousefi M. I., Lu C., Wai P.-K. A. Nonlinear frequency division multiplexed transmissions based on NFT // IEEE Photon. Technol. Lett. 2015. Vol. 27. P. 1621–1623. DOI: 10.1109/LPT.2015.2432793.
11. Sysoliatin A. A., Senatorov A. K., Konyukhov A. I., Melnikov L. A., Stasyuk V. A. Soliton fission management by dispersion oscillating fiber // Optics Express. 2007. Vol. 15. P. 16302–16307. DOI: 10.1364/OE.15.016302.
12. Дорохова М. А., Конюхов А. И., Мельников Л. А., Пластун А. С. Конструктивная интерференция оптических солитонов в волокне с периодическим изменением дисперсии // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 32–35.
13. Gui T., Lu C., Lau A. P. T., Wai P.-K. A. High-order modulation on a single discrete eigenvalue for optical communications based on nonlinear Fourier transform // Optics Express. 2017. Vol. 25. P. 20286–20297. DOI: 10.1364/OE.25.020286.

### Образец для цитирования:

Конюхов А. И., Маврин П. А., Шуркин Е. В. Мультиплексирование сигналов в оптоволоконных линиях связи с использованием дискретного солитонного спектра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 16–22. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-16-22.



## Discrete-Eigenvalue Multiplexing for Soliton Fiber-Optic Communication Links

A. I. Konyukhov, P. A. Mavrin, E. B. Shchurkin

Andrey I. Konyukhov, ORCID 0000-0001-6502-7405, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, kai@optics.sgu.ru

Petr A. Mavrin, ORCID 0000-0003-2563-5267, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, mpa95@mail.ru

Evgeny B. Shchurkin, ORCID 0000-0003-0545-6181, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, haifisch1986@gmail.com

**Background and Objectives:** The nonlinear Fourier transform gives a powerful tool to analyze fiber-optics solitons. The solitons are described by a discrete set of eigenvalues of two coupled differential equations, which gives the nonlinear Fourier transform. Using the discrete eigenvalues for optical signal coding can increase the signal-to-noise ratio and reduce the effect of fiber nonlinearity. In the present paper an all-fiber-optics method is proposed to modulate the discrete eigenvalues. When the information is transmitted using optical solitons, the channel coding can be realized by changing the discrete eigenvalues which are calculated by means of the nonlinear Fourier transform. A modification of optical solitons and discrete eigenvalues in special optical fibers is considered. **Materials and Methods:** The interaction of optical solitons in a fiber with a periodic change in the dispersion was analyzed. Numerical simulations based on the nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients were used. The discrete eigenvalues were calculated using methods of the inverse scattering problem. **Results:** A multiplexing scheme for fiber-optic transmission lines has been proposed. **Conclusion:** It is shown that the discrete soliton spectrum can be controlled by using a dispersion oscillating fiber. After propagation in a fiber with a periodic change of the dispersion, two interacting solitons change their complex eigenvalues. The magnitude and sign of the change depends on the distances between the solitons and on the modulation period of the fiber. The usage of the dispersion oscillating fiber allows one to create soliton pairs with a unique discrete eigenvalues. This phenomenon can be used to encode a signal by applying all-optical methods.

**Key words:** optical soliton, inverse scattering problem, nonlinear Fourier transform, multiplexing of communication channels.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-12-01564).

## References

1. Cvijetic M., Djordjevic I. B. *Advanced optical communication systems and networks*. Norwood, Artech House, 2013. 804 p.
2. Wong E. Next-generation broadband access networks and technologies. *J. of Lightwave Technol.*, 2012, vol. 30, pp. 597–608. DOI: 10.1109/JLT.2011.2177960.
3. Agrawal G. P. *Fiber-optic communication systems*. 3rd ed. New York, John Wiley & Sons Inc., 2002. 548 p.
4. Essiambre R. J., Kramer G., Winzer P. J., Foschini G. J., Goebel B. Capacity limits of optical fiber networks. *J. of Lightwave Technol.*, 2010, vol. 28, pp. 662–701. DOI: 10.1109/JLT.2009.2039464.
5. Akhmanov S. A., Vysloukh V. A., Chirkin A. S. *Optics of femtosecond laser pulses*. New York, Am. Inst. of Physics, 1992. 366 p.
6. Hasegawa A., Nyu T. Eigenvalue communication. *J. of Lightwave Technol.*, 1993, vol. 11, pp. 395–399. DOI: 10.1109/50.219570.
7. Turitsyn S. K., Prilepsky J. E., Le S. T., Wahls S., Frumin L. L., Kamalian M., Derevyanko S. A. Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: advances and perspectives. *Optica*, 2017, vol. 4, pp. 307–322. DOI: 10.1364/OPTICA.4.000307.
8. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear Fourier transform. Part II: numerical methods. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, vol. 60, pp. 4329–4345. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321151.
9. Le S. T., Aref V., Buelow H. Nonlinear signal multiplexing for communication beyond the Kerr nonlinearity limit. *Nature Photonics*, 2017, vol. 11, pp. 1–8. DOI: 10.1038/nphoton.2017.118.
10. Dong Z., Hari S., Gui T., Zhong K., Yousefi M. I., Lu C., Wai P.-K. A. Nonlinear frequency division multiplexed transmissions based on NFT. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2015, vol. 27, pp. 1621–1623. DOI: 10.1109/LPT.2015.2432793.
11. Sysoliatin A. A., Senatorov A. K., Konyukhov A. I., Melnikov L. A., Stasyuk V. A. Soliton fission management by dispersion oscillating fiber. *Optics Expr.*, 2007, vol. 15, pp. 16302–16307. DOI: 10.1364/OE.15.016302.
12. Dorokhova M. A., Konyukhov A. I., Melnikov L. A., Plastun A. S. Constructive interference of optical solitons in a fiber with periodic variation of the dispersion. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics.*, 2014, vol. 15, iss. 3, pp. 32–35 (in Russian).
13. Gui T., Lu C., Lau A. P. T., Wai P.-K. A. High-order modulation on a single discrete eigenvalue for optical communications based on nonlinear Fourier transform. *Optics Express*, 2017, vol. 25, pp. 20286–20297. DOI: 10.1364/OE.25.020286.

## Cite this article as:

Konyukhov A. I., Mavrin P. A., Shchurkin E. B. Discrete-Eigenvalue Multiplexing for Soliton Fiber-Optic Communication Links. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-16-22.



# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 535.13:537.8

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИМПУЛЬСЫ ПРИ ПРЕЛОМЛЕНИИ ВОЛНЫ В СРЕДУ С ДИСПЕРСИЕЙ

В. И. Цой

Цой Валерий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиофизики и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, tsoyvi@info.sgu.ru

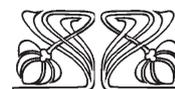
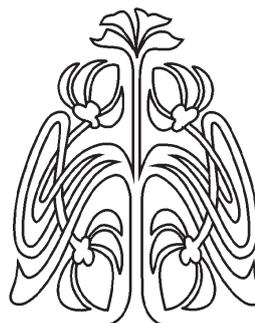
В классической электродинамике применяют по крайней мере два способа описания полевого импульса (linear momentum): по Абрагаму и по Минковскому. Представляет интерес, какой из этих способов необходим или предпочтителен для описания импульсов при преломлении волны. В статье выведены тензор напряжений и плотность импульса в прозрачной среде с дисперсией, включая среду с отрицательными проницаемостями, и рассмотрено преломление волны из вакуума в среду. Импульс падающей волны сохраняется как сумма полевого импульса Абрагама, импульса среды под действием силы Абрагама и импульса, обусловленного электромагнитным давлением на границу среды. При этом касательная к границе тангенциальная компонента импульса является импульсом Минковского. Такое различие и сосуществование импульсов можно объяснить симметрией системы среда–плоскость–среда относительно сдвига вдоль границы и отсутствием симметрии относительно сдвига, перпендикулярного к границе.

**Ключевые слова:** сосуществование импульсов Абрагама и Минковского, среда с дисперсией, левая среда.

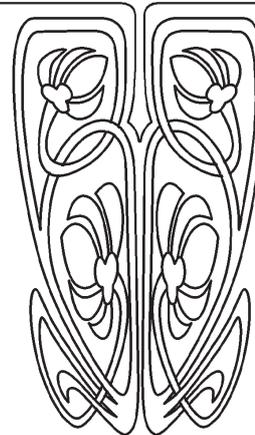
DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-23-31

### Введение

В связи с существенной ролью оптических сил в современных технологиях в настоящее время повышен интерес к проблеме описания сил и импульсов в среде с электромагнитным полем [1]. Во-первых, среда испытывает силу со стороны поля при поглощении излучения, и импульс поглощенной части излучения передается среде. Во-вторых, возникают силы при отражении и преломлении света на поверхности тела, когда возникает разность импульсов падающих на тело и уходящих от него волн, что передается телу соответствующей силой. В-третьих, внутри среды существуют действующие на нее со стороны поля объемные силы, в том числе сила Абрагама в прозрачном диэлектрике [2, 3]. Плотность электромагнитного импульса поля в системе с постоянной скоростью центра энергии определяется плотностью потока энергии  $\mathbf{S}$  излучения и равна плотности полевого импульса Абрагама  $\mathbf{g}^A = (\mathbf{S}/c^2)$ . Кроме того, в случае однородного диэлектрика с электрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon > 0$ ,  $\mu > 0$  без дисперсии возможно такое описание импульса электромагнитного поля, при котором никакие силы в среде не рассматриваются, а поле характеризуется сохраняющимся импульсом с плотностью импульса



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





по Минковскому  $\mathbf{g}^M = \varepsilon\mu\mathbf{g}^A$  [1]. Сохранение импульса Минковского внутри среды подтверждено экспериментально, в том числе при наличии дисперсии [4].

Совместимый с уравнениями электродинамики Максвелла баланс сил в среде без сторонних источников разные авторы интерпретируют по-своему, что приводит к разным выводам. Например, одни допускают, что плотность импульса Минковского  $\mathbf{g}^M$  направлена вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$  [5, 6], тогда как другие признают только плотность импульса  $\mathbf{g}$ , направленную в сторону плотности потока энергии  $\mathbf{S}$  [7]. Эти точки зрения приходят в противоречие в случаях, когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  и вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  взаимно противоположны, в частности, в случае отрицательных проницаемостей [8]. Попытки описать взаимодействие поля со средой с помощью обобщенных сил Лоренца на поляризационные токи, например, в работе [9], не вполне убедительны ввиду постулативного характера определения этих токов и сил.

То обстоятельство, что нужно рассматривать импульс поля иногда по Абрагаму, а иногда по Минковскому, привело к выводу о том, что эти импульсы просто соответствуют разным способам разложения полного импульса среды и поля на «кинетические» либо «канонические» импульсы [10]. При этом возможен несколько иной акцент, согласно которому важен не столько выбор способа разложения полного импульса, сколько то, что канонический импульс Минковского является квазиимпульсом. Действительно, в случае среды, характеристики взаимодействия с которой не меняются при сдвигах внутри среды, можно совсем не рассматривать те степени свободы, которые не относятся к полю. При этом выявляется сохраняющийся импульс в веществе – квазиимпульс, которым и является импульс Минковского [11].

В настоящей статье прослежен этот подход к волнам в средах с дисперсией в окнах прозрачности, в том числе в метаматериалах с отрицательными проницаемостями.

### Импульс и квазиимпульс электромагнитного поля в веществе

Электромагнитные силы в веществе в отсутствие в нем сторонних зарядов  $\rho_0 = 0$  и токов  $\mathbf{j}_0 = 0$ , т.е. в отсутствие в веществе силы Лоренца  $\rho_0\mathbf{E} + (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B})$ , можно найти из выражения этой силы через векторы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  поля с помощью уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = (\partial \mathbf{D} / \partial t) + \mathbf{j}_0, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B} / \partial t), \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_0. \quad (4)$$

Условие отсутствия внешних сил

$$\rho_0\mathbf{E} + (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}) = 0 \quad (5)$$

приобретает вид равновесия внутренних сил

$$\mathbf{E} \text{div } \mathbf{D} - (\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}) - (\partial / \partial t)(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (6)$$

Переходя в условии (6) к декартовым координатам, с использованием антисимметричного единичного тензора  $e_{\alpha\beta\gamma}$  получим баланс сил в виде

$$\delta_{\alpha\beta}(-B_\gamma \partial_\beta H_\gamma - D_\gamma \partial_\beta E_\gamma) + \partial_\beta (H_\alpha B_\beta + E_\alpha D_\beta) = (\partial / \partial t)e_{\alpha\beta\gamma} D_\beta B_\gamma, \quad (7)$$

где координатные индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  принимают значения  $x, y, z$ .

В однородной среде с материальными уравнениями  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  в отсутствие дисперсии равенство (7) приобретает вид

$$\begin{aligned} & (\partial / \partial x_\beta)[(E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta) - \\ & - \delta_{\alpha\beta}(1/2)(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \mu\mu_0\mathbf{H}^2)] = \\ & = (\partial / \partial t)(\mathbf{D} \times \mathbf{B})_\alpha = (\partial g_\alpha^M / \partial t), \quad (8) \end{aligned}$$

т.е. представляет собой закон сохранения импульса Минковского

$$(\partial \sigma_{\alpha\beta} / \partial x_\beta) = (\partial g_\alpha^M / \partial t). \quad (9)$$

Элементы тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  с обратным знаком имеют смысл компонент плотностей потоков импульса [12]. Импульс Минковского с плотностью  $\mathbf{g}^M = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$  в среде без дисперсии сохраняется как квазиимпульс, что обусловлено инвариантностью характеристик при сдвигах в однородной среде, как было показано в работе [11]. Так как в законе сохранения (7) учитываются только степени свободы электромагнитного поля в неподвижной среде, то и при наличии дисперсии этот закон остается законом сохранения квазиимпульса поля.

Чтобы учесть дисперсию проницаемостей в законах сохранения, рассматривают плоскую квазимонохроматическую волну в окрестности частоты  $\omega$  с комплексными напряженностями электрического и магнитного поля (наклонный шрифт)  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , характеризуемыми частотой  $\omega$ , волновым вектором  $\mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}(\omega/c)\mathbf{k}^0$  и медленно меняющимися амплитудами  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  [2, 6, 7]:



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (11)$$

Волновой фронт распространяется с фазовой скоростью  $\mathbf{v} = (\omega/k)\mathbf{k}^0$ , амплитуда – с групповой

скоростью  $\mathbf{u} = (d\omega/dk)\mathbf{u}^0$ . Для полей с квадратичным по полевым переменным и их производным лагранжианом групповая скорость совпадает со скоростью переноса энергии [13]. Материальные уравнения с учетом дисперсии имеют вид [2, 6]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E} + i(\partial\varepsilon/\partial\omega)(\partial\varepsilon_0\mathbf{E}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (12)$$

$$\partial\mathbf{D}/\partial t = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E} + (\partial\omega\varepsilon/\partial\omega)(\partial\varepsilon_0\mathbf{E}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H} + i(\partial\mu/\partial\omega)(\partial\mu_0\mathbf{H}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (14)$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = -i\omega\mu\mu_0\mathbf{H} + (\partial\omega\mu/\partial\omega)(\partial\mu_0\mathbf{H}_0/\partial t) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (15)$$

Взаимосвязь между медленно меняющимися амплитудами поля и волновым вектором согласно уравнениям Максвелла в нулевом приближении имеет вид

$$\mathbf{H}_0 = (1/\mu\mu_0\omega)(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0), \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) = 0. \quad (16)$$

С учетом последних соотношений удобно выразить векторное произведение индукций волны только через электрическое поле:

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \\ & = (\partial/\partial t) (\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\varepsilon\varepsilon_0/2)(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k}^0. \end{aligned} \quad (17)$$

При подстановке выражений (13), (15), (17) в баланс сил (7) оказывается, что в первом порядке малости поправок на дисперсию проницаемостей правая часть (7) остается неизменной, а в левой части появляются производные по времени, которые имеют смысл поправки к силе, обусловленной изменением импульса, то есть должны быть перенесены в правую часть. В итоге закон сохранения импульса для плоской волны в среде с дисперсией приобретает вид

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial x_\beta)(1/4) \left\{ \begin{aligned} & (\varepsilon\varepsilon_0 E_\alpha^* E_\beta + \varepsilon\varepsilon_0 E_\alpha E_\beta^* + \mu\mu_0 H_\alpha^* H_\beta + \mu\mu_0 H_\alpha H_\beta^*) \\ & - \delta_{\alpha\beta} (\varepsilon\varepsilon_0 E_\gamma E_\gamma^* + \mu\mu_0 H_\gamma H_\gamma^*) \end{aligned} \right\} = \\ & = (\partial/\partial t) (\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\varepsilon\varepsilon_0/2)(E_\gamma E_\gamma^*)k_\alpha^0 \times \\ & \times [1 + (\omega/2\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial\omega) + (\omega/2\mu)(\partial\mu/\partial\omega)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Видно, что плотность квазиимпульса  $\mathbf{g}_\alpha^M$  в случае дисперсии отличается от плотности в отсутствие дисперсии множителем

$$\begin{aligned} g_\alpha^M/g_{0\alpha}^M & = [1 + (\omega/2\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial\omega) + \\ & + (\omega/2\mu)(\partial\mu/\partial\omega)] = v/u. \end{aligned} \quad (19)$$

Этот результат фактически повторяет то обобщение импульса Минковского, которое сделано в работе [7] с использованием *BED*-формы уравнений Максвелла.

Полезно отметить, что при подстановке выражений (12), (14) в условие баланса сил (7) тот же результат (18) получится, если выполняется условие

$$\begin{aligned} & i(\partial\mu/\partial\omega)\varepsilon(\mathbf{E}_0 \cdot \partial\mathbf{E}_0^*/\partial t) + \\ & + i(\partial\varepsilon/\partial\omega)\mu(\partial\mathbf{E}_0/\partial t \cdot \mathbf{E}_0^*) + \text{к. с.} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Как известно, плотность электромагнитной энергии в среде с дисперсией выражается формулой Бриллюэна [2, 7]:

$$\begin{aligned} w & = (1/4)[(\partial\omega\varepsilon/\partial\omega)(\varepsilon_0 E_\gamma E_\gamma^*) + \\ & + (\partial\omega\mu/\partial\omega)(\mu_0 H_\gamma H_\gamma^*)] = \\ & = (\varepsilon\varepsilon_0/2)(E_\gamma E_\gamma^*)[1 + (\omega/2\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial\omega) + \\ & + (\omega/2\mu)(\partial\mu/\partial\omega)] = w'(v/u). \end{aligned} \quad (21)$$

Из равенств (18), (19), (21) следует, что плотность квазиимпульса Минковского с учетом дисперсии связана с плотностью энергии и волновым вектором точно так же, как в случае без дисперсии:

$$\mathbf{g}^M = w(\sqrt{\varepsilon\mu}/c)\mathbf{k}^0 = (w/v)\mathbf{k}^0. \quad (22)$$

В веществе с отрицательными проницаемостями  $\varepsilon < 0$ ,  $\mu < 0$  согласно уравнениям Максвелла (1), (2) волновой вектор и напряженности поля (10), (11) образуют левую тройку векторов  $\mathbf{k} \uparrow \downarrow (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ , т.е. волновой вектор направлен противоположно вектору плотности потока энергии [8, 14]. В законе преломления для изменения углов распространения на границе с



таким веществом удобно представлять показатель преломления в виде  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  и считать его отрицательным [8]. Однако в соотношении (22), связывающем между собой квадратичные по амплитудам поля величины, этого делать не следует, как и в случае с формулами Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и преломления [15, 16]. Действительно, с помощью соотношения (16) нетрудно получить выражение для плотности потока энергии в виде [6, 7, 17]

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\sqrt{\varepsilon\mu}/2\mu)(\varepsilon_0/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)\mathbf{k}^0 = (\sqrt{\varepsilon\mu}/2\varepsilon)(\mu_0/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*)\mathbf{k}^0. \quad (23)$$

Видно, что если в этом квадратичном по амплитудам соотношении заменить  $\sqrt{\varepsilon\mu}$  на отрицательный показатель преломления  $\sqrt{\varepsilon\mu} < 0$  в среде с  $\varepsilon < 0, \mu < 0$ , то получится не левая, как должно быть, а правая тройка векторов  $\mathbf{k} \uparrow \uparrow (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ . Таким образом, извлечение корня в равенствах (22), (23) не следует сопровождать сменой знака и с учетом положительности плотности энергии плотность импульса Минковского сонаправлена с волновым вектором:  $\mathbf{g}^M \uparrow \uparrow \mathbf{k}$ . Важно, что макроскопическая плотность импульса  $\mathbf{g}^M$  соответствует квазиимпульсу фотона в среде  $\mathbf{p}_{ph} = \hbar\mathbf{k}$  и энергии фотона  $E_{ph} = \hbar\omega$ , для которых справедливы законы сохранения [1, 18–20]. Таким образом, если помещенное в среду с отрицательными проницаемостями тело поглощает излучение, оно должно приобретать импульс, направленный навстречу потоку энергии излучения [21]. Из соотношения (22), определения плотности полевого импульса Абрагама  $\mathbf{g}^A = (\mathbf{S}/c^2)$ , а также из того, что плотность потока энергии  $\mathbf{S} = w\mathbf{u}$  определяется групповой скоростью  $\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{u}^0$ , вытекает следующее соотношение между плотностями импульса Абрагама и Минковского:

$$\mathbf{g}^M = (\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0)(nn_{gr})\mathbf{g}^A = (\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0)(nn_{gr})g^A\mathbf{u}^0. \quad (24)$$

В отсутствие дисперсии  $(\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0) = 1$ ,  $n_{gr} = n$  и равенство (24) сводится к привычному соотношению между плотностями импульса Минковского и Абрагама  $\mathbf{g}^M = n^2\mathbf{g}^A$ . В среде с отрицательными проницаемостями  $\varepsilon < 0, \mu < 0$  направления групповой и фазовой скоростей противоположны,  $(\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{k}^0) = -1$ , и плотность импульса Минковского противоположна плотности импульса Абрагама.

### Потоки импульса электромагнитного поля в веществе

Для плоской волны согласно закону сохранения (18) тензор напряжений определяется элементами, совпадающими с элементами полевой части тензора напряжений Питаевского [6], и может быть выражен только через электрическое поле в виде

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha} = (\varepsilon\varepsilon_0/2)\{(E_\alpha^*E_\beta + E_\alpha E_\beta^*) - \delta_{\alpha\beta}(E_\gamma E_\gamma^*)\}. \quad (25)$$

Важно, что тензор напряжений в плоской волне можно выразить через групповую скорость и волновой вектор [5, 6, 16]. Выразим групповую скорость с помощью вектора Пойнтинга через полевые переменные. Пользуясь соотношением (16), получим:

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}/w = (1/2w)Re(\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0) = (1/2w\omega\mu\mu_0)Re(\mathbf{E}_0^* \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]). \quad (26)$$

Учитывая поперечность волны, выполним преобразование:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_0^* \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0])_\alpha &= e_{\alpha\beta\gamma}E_{0\beta}^*e_{\gamma\sigma\tau}k_\sigma E_{0\tau} = \\ &= (\delta_{\alpha\beta}E_{0\gamma}^*E_{0\gamma} - E_{0\beta}^*E_{0\alpha})k_\beta = \\ &= (\delta_{\alpha\beta}E_{0\gamma}^*E_{0\gamma} - E_{0\beta}^*E_{0\alpha} - E_{0\alpha}^*E_{0\beta})k_\beta = \\ &= -\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}(2/\varepsilon\varepsilon_0)\sigma_{\alpha\beta}k_\beta^0 \end{aligned} \quad (27)$$

и приведем соотношение (26) к виду

$$u_\alpha = -(1/w)(1/\sqrt{\varepsilon\mu})(1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})\sigma_{\alpha\beta}k_\beta^0. \quad (28)$$

Согласно последнему соотношению тензор напряжений можно представить в форме

$$\begin{aligned} -\sigma_{\alpha\beta} &= w(\sqrt{\varepsilon\mu}/c)u_\alpha k_\beta^0 = (w/\omega)u_\alpha k_\beta = \\ &= (w/\omega)k_\alpha u_\beta. \end{aligned} \quad (29)$$

В этой форме тензор напряжений совпадает с тензором напряжений Полевого–Рытова [5], как и должно быть для плоской квазимонохроматической волны [6, 16]. Нетрудно проверить, что величина (29) представляет собой плотность потока  $\beta$ -направлении  $\alpha$ -компоненты импульса (22):

$$g_\alpha^M u_\beta = w(\sqrt{\varepsilon\mu}/c)k_\alpha^0 u_\beta = (w/\omega)k_\alpha u_\beta = -\sigma_{\alpha\beta}. \quad (30)$$

Выражения (29), (30) показывают, что в средах с отрицательными проницаемостями, когда волновой вектор и групповая скорость противоположны по направлению ( $k_\alpha u_\alpha < 0$ ), полевые напряжения в среде противоположны по знаку по сравнению с напряжениями в среде с положительными проницаемостями.



### Электромагнитные импульсы при преломлении волны

Для иллюстрации представленных выше соотношений рассмотрим преломление без отражения поляризованной волны, падающей на границу раздела между воздухом и диэлектриком под углом Брюстера. В случае поляризации в плоскости падения угол Брюстера  $\varphi$  определен выражениями

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sqrt{(\varepsilon^2 - \varepsilon\mu)/(\varepsilon^2 - 1)}, \\ \cos \varphi &= \sqrt{(\varepsilon\mu - 1)/(\varepsilon^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (31)$$

При этом угол преломления  $\psi$  согласно закону преломления удовлетворяет условию

$$\sin \psi = \sin \varphi / \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{(\varepsilon/\mu - 1)/(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (32)$$

Рассмотрим для простоты случай  $\mu = \pm 1$ , когда  $\cos \varphi = \sin \psi$ , т.е.

$$\sin \varphi / \sin \psi = \cos \psi / \cos \varphi = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (33)$$

Нормальные к границе раздела составляющие скорости распространения волнового фронта  $c \cos \varphi$  в вакууме и  $(c/\sqrt{\varepsilon\mu}) \cos \psi$  в диэлектрике оказываются в этом случае равными, поэтому объемы  $V_0, V'$ , заемаемые фронтом в единицу времени в вакууме и в диэлектрике, равны между собой. Следовательно, объем, содержащий определенное количество энергии волны (цуг, пакет), и плотность энергии остаются после преломления волны Брюстера в среду без дисперсии неизменными,  $w_0 = w'$ . Импульсы такого пакета просто пропорциональны векторам плотностей импульсов. Согласно формуле (22) в этом случае тангенциальные компоненты плотности импульса Минковского  $g_\tau^0 = w^0(1/c) \sin \varphi$  в падающей волне и  $g_\tau^M = w'(\sqrt{\varepsilon\mu}/c) \sin \psi$  в преломленной волне равны между собой. Это вполне соответствует тому, что сдвиг в тангенциальном направлении совмещает систему среда–граница–среда с собой, и в этом направлении сохраняется квазиимпульс.

В нормальном к границе раздела направлении инвариантность при сдвиге отсутствует и нормальная составляющая квазиимпульса не сохраняется. В этом направлении сохраняется плотность потока энергии и вместе с ней нормальная компонента плотности полевого импульса Абрагама. В диэлектрике присутствует также импульс, порожденный объемной силой Абрагама на диэлектрик.

Кроме того, следует учитывать давление поля на границу раздела. Оно равно разности давлений на противоположные стороны границы

и определяется различием тензоров напряжений в среде и вакууме. По воздействию на диэлектрик давление эквивалентно нормальному к границе потоку импульса. При этом в общем случае среды с дисперсией энергия, приходящаяся на один цуг волны, сосредоточена в объеме  $V_{gr}$  с эффективной плотностью  $\tilde{w} = w_0(V_0/V_{gr})$ . Поскольку объемы цуга до и после прохождения через границу пропорциональны нормальным скоростям, то  $\tilde{w} = w_0(c \cos \varphi / u \cos \psi) = w'(v/u) = w$ . Этот результат вполне соответствует формуле Бриллюэна (21). В направлении из вакуума к границе с нормалью  $\mathbf{v}$  в сторону диэлектрика давление  $P_v$  с учетом представления (29) для тензора напряжений определяется следующей разностью давлений по обе стороны границы:

$$\begin{aligned} P_v &= -\sigma_{0\alpha\beta} v_\alpha v_\beta + \sigma_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = \\ &= -v_\alpha v_\beta \left( (w/\omega) k_\alpha u_\beta - (w_0/\omega) k_{0\alpha} u_{0\beta} \right) = \\ &= -\left[ \pm (wu\sqrt{\varepsilon\mu}/c) (\cos \psi)^2 - w_0 (\cos \varphi)^2 \right] = \\ &= -w_0 (\cos \varphi)^2 (\pm n^2 - 1). \end{aligned} \quad (34)$$

В последнем соотношении учтено, что косинусы направляющих углов волнового вектора и групповой скорости совпадают в обычных средах (верхний знак) и имеют противоположные знаки в средах с отрицательными проницаемостями (нижний знак). Таким образом, отнесенная к среде эффективная плотность импульса давления на поверхность рассматриваемым пакетом равна

$$\begin{aligned} g_v^P &= P_v / (u \cos \psi) = \\ &= -[w_0 (\cos \varphi)^2 (\pm n^2 - 1)] / (u \cos \psi) = \\ &= -g_v^A (n_{gr}/n) (\pm n^2 - 1), \end{aligned} \quad (35)$$

так как  $g_v^A = (w u / c^2) \cos \psi = (w_0 / c) \cos \varphi$ .

Если  $V'$  – объем, заемаемый с фазовой скоростью волновым фронтом, то объем, который заполняется энергией с групповой скоростью, равен  $V_{gr} = V'(n/n_{gr}) = V_0(n/n_{gr})$ . Импульс давления, оказываемого цугом на границу среды, в соответствии с плотностью (35), равен

$$\begin{aligned} G_v^P &= g_v^P V_{gr} = -g_v^A V_{gr} (n_{gr}/n) (\pm n^2 - 1) = \\ &= -G_v^0 (\pm n^2 - 1). \end{aligned} \quad (36)$$

Нормальная к границе составляющая импульса Абрагама преломленного цуга в среде выразится через нормальную составляющую импульса падающего цуга формулой



$$G_v^A = g_v^A V_{gr} = (w u / c^2) \cos \psi V_{gr} = (w_0 / c) \cos \varphi V_{gr} = G_v^0 (n / n_{gr}). \quad (37)$$

Аналогично нормальную составляющую импульса Минковского запишем в виде

$$G_v^M = g_v^M V_{gr} = w (\pm \sqrt{\varepsilon \mu} / c) \cos \psi V_{gr} = \pm w_0 (1 / u) n \cos \varphi V_0 (n / n_{gr}) = \pm G_v^0 n^2. \quad (38)$$

Примем естественное предположение, что импульс силы Абрагама в среде с дисперсией численно равен, как и в среде без дисперсии, разности импульсов Минковского и Абрагама. Тогда нормальный импульс силы Абрагама с учетом выражений (37), (38) имеет вид

$$G_v^{fA} = G_v^M - G_v^A = G_v^0 (\pm n^2 - n / n_{gr}). \quad (39)$$

В результате получаем, что нормальный импульс цуга падающей волны сохраняется после преломления как сумма импульса давления на границу, импульса Абрагама и импульса силы Абрагама в объеме цуга:

$$G_v^P + G_v^A + G_v^{fA} = G_v^0. \quad (40)$$

Этот баланс выполняется и для тангенциальных составляющих. Тангенциальное напряжение  $P_\tau$  вдоль границы определяется величиной

$$P_\tau = -\sigma_{0\alpha\beta} v_\alpha \tau_\beta + \sigma_{\alpha\beta} v_\alpha \tau_\beta = v_\alpha \tau_\beta [(w_0 / \omega) k_{0\alpha} u_{0\beta} - (w / \omega) k_\alpha u_\beta] = [w_0 \sin \varphi \cos \varphi - (w u \sqrt{\varepsilon \mu} / c) \sin \psi \cos \psi] = 0. \quad (41)$$

Следовательно, сдвиговой импульс цуга на границе при полном преломлении отсутствует:

$$G_\tau^P = g_\tau V_{gr} = P_\tau / (u \cos \psi) V_{gr} = 0. \quad (42)$$

Тангенциальный импульс Абрагама  $G_\tau^A$  в преломленном цуге зависит от показателей преломления и направлен противоположно в средах с положительной и отрицательной проницаемостями:

$$G_\tau^A = g_\tau^A V_{gr} = (w u / c^2) \sin \psi V_{gr} = \pm (w_0 / c n^2) \sin \varphi V_0 = \pm G_\tau^0 (1 / n n_{gr}). \quad (43)$$

Тангенциальные импульсы Минковского в цуге до и после преломления, как уже отмечалось, одинаковы:

$$G_\tau^M = g_\tau^M V_{gr} = w (\sqrt{\varepsilon \mu} / c) \sin \psi V_{gr} = w_0 (1 / u) (\sin \varphi / n) V_0 (n / n_{gr}) = G_\tau^0. \quad (44)$$

Тангенциальный импульс силы Абрагама  $G_\tau^{fA}$  определим аналогично нормальному импульсу (39):

$$G_\tau^{fA} = G_\tau^M - G_\tau^A = (1 \mp (1 / n n_{gr})) G_\tau^0. \quad (45)$$

Из соотношений (42), (43), (45) получаем

$$G_\tau^P + G_\tau^A + G_\tau^{fA} = G_\tau^0. \quad (46)$$

Таким образом, согласно равенствам (40), (46) импульс цуга падающей волны сохраняется после преломления как сумма импульса давления на границу, импульса Абрагама и импульса силы Абрагама в объеме цуга. При этом тангенциальная составляющая этой суммы (46) представляет собой тангенциальную составляющую импульса Минковского (44), поскольку слагаемое  $G_\tau^P$  равно нулю. Нормальная же составляющая импульса цуга не сохраняется как импульс Минковского.

### Заключение

Закон сохранения импульса приобретает простую форму сохранения квазиимпульса в тех направлениях, в которых имеется однородность характеристик среды, например, в направлениях вдоль плоской границы между однородными средами. В частности, в приходящей и исходящих от границы монохроматических волнах сохраняется тангенциальная компонента импульса Минковского. В нормальном направлении к границе раздела вследствие непрерывности плотности потока энергии непрерывна нормальная компонента плотности импульса Абрагама. В этом направлении импульс сохраняется после преломления как сумма импульса давления на границу, импульса Абрагама и импульса силы Абрагама.

Следует заметить, что в случае с дисперсией плотность импульса Минковского остается связанной с плотностью энергии и фазовой скоростью таким же соотношением, как и в случае без дисперсии. В средах с дисперсией, в том числе с противоположными направлениями потока энергии и волнового вектора, импульс Минковского остается сонаправленным с волновым вектором. При этом плотность импульса Минковского в среде с дисперсией связана с плотностью импульса Абрагама коэффициентом, равным произведению фазового и группового показателей преломления, причем в средах с противоположными фазовой и групповой



скоростью импульсы Абрагама и Минковского противоположны друг другу.

При описании электромагнитного давления на границу раздела сред важно использовать соответствующие выражения для тензора полевых напряжений. Соответствующая полевая часть тензора напряжений Питаевского может быть выражена для волны в среде с дисперсией в форме тензора Полевого–Рытова через произведение компонент фазовой и групповой скорости.

В заключение заметим, что вопрос об электромагнитных импульсах и пондеромоторных силах существенно усложняется, когда приходится учитывать поглощение в среде [22] или форму облучаемого тела [23].

### Список литературы

1. *Griffiths D. J.* Resource Letter EM-1: Electromagnetic Momentum // *Amer. J. Phys.* 2012. Vol. 75. P. 7–18. DOI: 10.1119/1.3641979.
2. *Ландау Д. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
3. *Walker G. B., Lahoz D. G.* Experimental observation of Abraham force in a dielectric // *Nature.* 1975. Vol. 253. P. 339–340.
4. *Jones R. V., Leslie B.* The measurement of optical radiation pressure in dispersive media // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1978. Vol. 360. P. 347–363. DOI: 10.1098/rspa.1978.0072.
5. *Полевой В. Г., Рытов С. М.* О четырехмерной групповой скорости // *УФН.* 1978. Т. 125. С. 549–505.
6. *Макаров И. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные волны с отрицательной групповой скоростью и тензор энергии-импульса // *УФН.* 2011. Т. 181. С. 1357–1368. DOI: 10.3367/UFNr.0181.2011n.1357.
7. *Топтыгин И. Н., Левина К.* Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в средах с дисперсией // *УФН.* 2016. Т. 186. С. 146–158. DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602c.0146.
8. *Веселаго В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // *УФН.* 1967. Т. 92. С. 517–526. DOI: 10.3367/UFNr.0092.196707d.0517.
9. *Mansuripur M.* Resolution of the Abraham-Minkowski Controversy // *Opt. Commun.* 2010. Vol. 283. P. 1997–2006.
10. *Barnett S. M.* Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 104. P. 070401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070401.
11. *Пайерлс Р.* Импульс и квазиимпульс света и звука // *УФН.* 1991. Т. 161. С. 161–176. DOI: 10.3367/UFNr.0161.199109d.0161.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
13. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
14. *Пафомов В. Е.* Переходное излучение и черенковское излучение // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 36. С. 1853–1858.
15. *Веселаго В. Г.* Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // *УФН.* 2003. Т. 173. С. 790–794. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200307m.0790.
16. *Веселаго В. Г.* Перенос энергии, импульса и массы при распространении электромагнитной волны в среде с отрицательным преломлением // *УФН.* 2009. Т. 179. С. 689–694. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200906j.0689.
17. *Раутиан С. Г.* Об отражении и преломлении на границе среды с отрицательной групповой скоростью // *УФН.* 2008. Т. 178. С. 1017–1024. DOI: 10.3367/UFNr.0178.200810a.1017.
18. *Гинзбург В. Л.* О законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде и о тензоре энергии-импульса в макроскопической электродинамике // *УФН.* 1973. Т. 110. С. 309–319. DOI: 10.3367/UFNr.0110.197306f.0309.
19. *Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jian, Lixin Ran, Jiangtao Huangfu, Bao-Ian Wu, Jin Au Kong, Min Chen.* Experimental Verification of Reversed Cherenkov Radiation in Left-Handed Metamaterial // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103. P. 194801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194801.
20. *Campbell G. K., Leanhardt A. E., Mun J., Boyd M., Streed W., Ketterle W., Pritchard D. E.* Photon Recoil Momentum in Dispersive Media // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 170403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.170403.
21. *Франк И. М.* Импульс фотона в среде с отрицательной групповой скоростью // *Письма в ЖЭТФ.* 1978. Т. 28. С. 482–485.
22. *Давидович М. В.* О законах сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в среде и при дифракции на проводящей пластине // *УФН.* 2010. Т. 180. С. 623–638. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201006e.0623.
23. *Чу С.* Управление нейтральными частицами // *УФН.* 1999. Т. 169. С. 274–291. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199903d.0274.

### Образец для цитирования:

Цой В. И. Электромагнитные импульсы при преломлении волны в среде с дисперсией // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2018. Т. 18, вып. 1. С. 23–31. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-23-31.



## Electromagnetic Momenta at Wave Refraction into Dispersive Medium

V. I. Tsoy

Valery I. Tsoy, ORCID 0000-0001-8055-4385, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, tsoyvi@info.sgu.ru

**Background and Objectives:** There are two types of a field momentum in the classical electrodynamics, namely, the Abraham momentum, and the Minkowski momentum. The question arises how these momenta are conserved in the refraction on the boundary surface of a medium. **Methods:** The electromagnetic stress tensor and momentum density in a dispersive medium, including the case of negative permittivity and negative permeability, are derived and used in this paper. **Results and Conclusion:** It is shown that the momentum of an incidence wave is conserved as the sum of the Abraham momentum, the Abraham force momentum, and the momentum of the electromagnetic pressure on the boundary surface of the medium. In the same time, the tangential component of the incidence momentum is conserved as the Minkowski momentum. The reason is that there is an invariance of the "vacuum–plane–matter" system in the transfer along the boundary surface of the medium. Consequently, a quasi-momentum should be conserved in this direction. On the other hand, there is no such symmetry in the direction perpendicular to the boundary surface of the medium. Consequently, any quasi-momentum in this direction does not exist. This shows that the Abraham momentum and the Minkowski momentum can work together, although these quantities corresponds to the different expansions of the total momentum into field and media parts.

**Key words:** coexistence of the Abraham and Minkowski momenta, dispersive medium, left-handed medium.

## References

1. Griffiths D. J. Resource Letter EM-1: Electromagnetic Momentum. *Amer. J. Phys.*, 2012, vol. 80, pp. 7–18. DOI: 10.1119/1.3641979.
2. Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. *Electrodynamics of Continuous Media*. 2<sup>nd</sup> ed. Butterworth-Heinemann, 1984. Vol. 8. 460 p. (Russ. ed.: Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 620 p.).
3. Walker G. B., Lahoz D. G. Experimental observation of Abraham force in a dielectric. *Nature*, 1975, vol. 253, pp. 339–340.
4. Jones R. V., Leslie B. The measurement of optical radiation pressure in dispersive media. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1978, vol. 360, pp. 347–363. DOI: 10.1098/rspa.1978.0072.
5. Polevoi V. G., Rytov S. M. The four-dimensional group velocity. *Sov. Phys. Usp.*, 1978, vol. 21, pp. 630–638. DOI: 10.1070/PU1978v021n07ABEH005668.
6. Makarov V. P., Rukhadze A. A. Negative group velocity electromagnetic waves and the energy-momentum tensor. *Phys. Usp.*, 2011, vol. 54, pp. 1285–1296. DOI: 10.3367/UFNe.0181.2011In.1357.
7. Toptygin I. N., Levina K. Energy-momentum tensor of the electromagnetic field in dispersive media. *Phys. Usp.*, 2016, vol. 59, pp. 141–152. DOI: 10.3367/UFNe.0186.201602c.0146.
8. Veselago V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Sov. Phys. Usp.*, 1968, vol. 10, pp. 509–514. DOI: 10.1070/PU1968v010n04ABEH003699.
9. Mansuripur M. Resolution of the Abraham-Minkowski Controversy. *Opt. Commun.*, 2010, vol. 283, pp. 1997–2006.
10. Barnett S. M. Resolution of the Abraham–Minkowski Dilemma. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 104, pp. 070401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070401.
11. Peierls R. Impul's i kvaziimpuls sveta i zvuka [Momentum and Pseudomomentum of Light and Sound]. *UFN*, 1991, vol. 161, pp. 161–176. DOI: 10.3367/UFNr.0161.199109d.0161 (in Russian).
12. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The classical theory of fields*. Oxford, Pergamon Press, 1971. 374 p. (in Russ. ed.: Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoriya polya* [The classical theory of fields]. Moscow: Nauka Publ., 1988. 509 p.).
13. Mandelshtam L. I. *Lektsii po teorii otositel'nosti i kvantovoy mekhanike* [Lectures on the relativity and quantum mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 440 p. (in Russian).
14. Pafomov V. E. Transition Radiation and Cerenkov Radiation. *Soviet Physics JETP*, 1959, vol. 36, pp. 1321–1324.
15. Veselago V. G. Electrodynamics of materials with negative index of refraction. *Phys. Usp.*, 2003, vol. 46, pp. 764–768. DOI: 10.1070/PU2003v046n07ABEH001614.
16. Veselago V. G. Energy, linear momentum and mass transfer by an electromagnetic wave in a negative refraction medium. *Phys. Usp.*, 2009, vol. 52, pp. 649–654. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200906j.0689.
17. Rautian S. G. Reflection and refraction at the boundary of a medium with negative group velocity. *Phys. Usp.*, 2008, vol. 51, pp. 981–988. DOI: 10.1070/PU2008v-051n10ABEH006594.
18. Ginzburg V. L. The laws of conservation of energy and momentum in emission on electromagnetic waves (photons) in a medium and the energy-momentum tensor in macroscopic electrodynamics *Sov. Phys. Usp.*, 1973, vol. 16, pp. 434–439. DOI: 10.1070/PU1973v-016n03ABEH005193.
19. Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jian, Lixin Ran, Jiangtao Huangfu, Bac-Ian Wu, Jin Au Kong, Min Chen. Experimental Verification of Reversed Cherenkov Radiation in Left-Handed Metamaterial. *Phys.*



- Rev. Lett.*, 2009, vol. 103, pp. 194801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194801.
20. Campbell G. K., Leanhardt A. E., Mun J., Boyd M., Streed W., Ketterle W., Pritchard D. E. Photon Recoil Momentum in Dispersive Media. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 94, pp. 170403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.170403.
21. Frank I. M. Photon momentum in a medium with negative group velocity. *JETP Lett.*, 1978, vol. 28, pp. 446–448.
22. Davidovich M. V. On energy and momentum conservation laws for an electromagnetic field in a medium or at diffraction on a conducting plate. *Phys. Usp.*, 2010, vol. 180, pp. 623–638. DOI: 10.3367/UFNe.0180.201006e.0623.
23. Chu C. Upravleniye neyitralnymi chastitsami [The Manipulation of Neutral Particles]. *UFN*, 1999, vol. 169, pp. 274–291. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199903d.0274 (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Tsoy V. I. Electromagnetic Momenta at Wave Refraction into Dispersive Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 23–31 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-23-31.

---



## БИОФИЗИКА И МЕДИЦИНСКАЯ ФИЗИКА

УДК 535.8:535.36:57.085.2:57.013:53.06:76.03.29

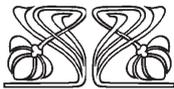
### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФфуЗИИ ГЛЮКОЗЫ В ТВЕРДОЙ МОЗГОВОЙ ОБОЛОЧКЕ ЧЕЛОВЕКА

А. Н. Башкатов, Э. А. Генина, В. В. Тучин

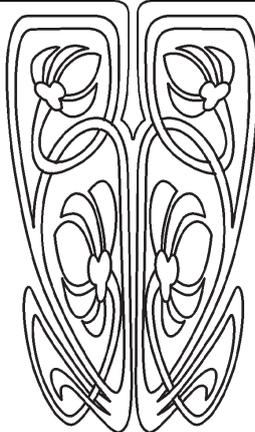
Башкатов Алексей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптики и биофотоники, заведующий лабораторией биомедицинской оптики Научно-образовательного института оптики и биофотоники, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; ведущий научный сотрудник междисциплинарной лаборатории биофотоники, Томский национальный исследовательский государственный университет, a.n.bashkatov@mail.ru

Генина Элина Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптики и биофотоники, старший научный сотрудник лаборатории биомедицинской оптики Научно-образовательного института оптики и биофотоники, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; ведущий научный сотрудник междисциплинарной лаборатории биофотоники, Томский национальный исследовательский государственный университет, eagenina@yandex.ru

Тучин Валерий Викторович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой оптики и биофотоники, директор Научно-образовательного института оптики и биофотоники, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; научный руководитель междисциплинарной лаборатории биофотоники, Томский национальный исследовательский государственный университет; заведующий лабораторией лазерной диагностики технических и живых систем, Институт проблем точной механики и управления РАН (Саратов), tuchinv@mail.ru



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



**Объект и цель исследования.** Оптическое просветление твердой мозговой оболочки за счет применения гиперосмотических иммерсионных жидкостей важно для развития неинвазивных методов оптической томографии мозга и при исследовании микроциркуляции и гомеостаза тканевых жидкостей. Оно позволяет значительно увеличить пространственное разрешение и глубину зондирования тканей. Очевидно, что количественное описание процессов оптического просветления требует разработки надежных физико-математических моделей, которые, в свою очередь, требуют знания параметров скорости диффузии иммерсионных агентов в биотканях. И хотя диффузия многих биологически совместимых веществ, в частности глюкозы, в водных растворах достаточно хорошо описана, их диффузия в биотканях продолжает оставаться малоизученной областью исследований. Таким образом, целью данной работы является измерение относительного коэффициента диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке человека.

**Материалы и методы.** Исследования были выполнены *in vitro* на 10 образцах твердой мозговой оболочки человека. Метод оценки относительного коэффициента диффузии иммерсионных жидкостей в биоткани основан на анализе кинетики изменения коллимированного пропускания образца биоткани под действием данных жидкостей. Кинетика замещения внутритканевой жидкости регистрировалась путем последовательной записи спектров коллимированного пропускания в диапазоне 400–700 нм на спектрометре USB4000-Vis-NIR (Ocean Optics, США). Для количественного описания процесса замещения предложена модель, предполагающая постоянство коэффициента диффузии во всем объеме образца биоткани. В работе представлены результаты экспериментов, выполненных для 40%-ного раствора глюкозы. Определение коэффициента диффузии глю-



козы выполнено путем аппроксимации экспериментальных данных в рамках предложенной модели. **Результаты.** Было получено, что значение коэффициента диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке равно  $6.08 \times 10^{-6} \pm 2.26 \times 10^{-8}$  см<sup>2</sup>/с. Коэффициент проницаемости твердой мозговой оболочки для глюкозы, рассчитанный с использованием 1-го закона Фика, равен  $(1.3 \pm 0.13) \times 10^{-4}$  см/с. Полученные результаты могут быть использованы как при разработке новых и оптимизации существующих неинвазивных методов оптической томографии, так и для развития методов лазерной терапии различных заболеваний мозга.

**Ключевые слова:** коэффициент диффузии, твердая мозговая оболочка, глюкоза, управление оптическими параметрами биотканей.

DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-32-45

### Введение

Развитие оптики биотканей стимулирует постоянное совершенствование как методов неинвазивной оптической визуализации неоднородностей, скрытых в толще биоткани, так и методов лазерной терапии и хирургии. Интерес к использованию оптических методов для диагностики и лечения различных заболеваний возрастает в связи с их относительной простотой, достаточно низкой себестоимостью и безопасностью для пациента. В то же время серьезной проблемой современной лазерной медицины продолжает оставаться транспорт зондирующего излучения через поверхностные слои биоткани. В частности, при диагностике заболеваний мозга оптическими методами значительное рассеяние излучения видимого и ближнего инфракрасного спектрального диапазона кожей, костями черепа и твердой мозговой оболочкой ограничивает пространственное разрешение и глубину зондирования тканей мозга [1–19].

Хорошо известно, что основной причиной рассеяния оптического излучения в клеточных структурах и биотканях является различие показателей преломления между структурными компонентами ткани (в частности, коллагеновыми и эластиновыми волокнами) и внутритканевой средой, а также между клеточными органеллами и цитоплазмой клеток [20, 21]. Как показано в работах [1–19, 22–30], рассеивающими свойствами соединительных тканей можно достаточно эффективно управлять путем воздействия на ткань с помощью гиперосмотических иммерсионных агентов, которые вызывают диффузию воды из внутритканевого пространства и частично замещают собой внутритканевую жидкость. Введение в биоткань иммерсионного агента, обладающего более высоким показателем преломления, чем у внутритканевой жидкости, согласует показатели преломления рассеивателей и внутритканевой

среды, что значительно снижает рассеяние света в биоткани. Такое управление важно как для выяснения фундаментальных закономерностей метаболизма биотканей, так и при реализации методов оптической и лазерной диагностики, терапии и хирургии. В частности, снижение светорассеяния в твердой мозговой оболочке за счет применения гиперосмотических иммерсионных жидкостей важно для развития неинвазивных методов оптической томографии мозга и при индикации гомеостаза тканевых жидкостей.

Необходимо отметить, что применение иммерсионных жидкостей может вызывать как дегидратацию, так и набухание биотканей, в зависимости от pH используемых растворов [2–6, 15, 31, 32]. Хорошо известно, что изменение pH среды в более кислую или щелочную сторону от изоэлектрической точки коллагена (pH = 7.4) [31, 32] увеличивает степень его набухания. Это объясняется появлением положительного или отрицательного заряда у высокомолекулярных коллагеновых волокон и, следовательно, повышением степени их гидратации. Увеличение гидратации, в свою очередь, разделяет волокна, в пространство между ними проникает иммерсионный раствор, что и приводит к увеличению объема биоткани.

Знание коэффициентов диффузии необходимо для построения математических моделей, адекватно описывающих процессы взаимодействия иммерсионных жидкостей с биотканями. И хотя диффузия многих биологически совместимых жидкостей в водных растворах достаточно хорошо описана, их диффузия в биотканях продолжает оставаться малоизученной областью исследований.

В настоящее время в качестве иммерсионных агентов используются различные биологически совместимые гиперосмотические жидкости, такие как растворы глицерина, пропиленгликоля, полиэтиленгликоля, рентгеноконтрастные вещества (Тразограф<sup>TM</sup>, Верографин<sup>TM</sup>, Омнипак<sup>TM</sup>), диметилсульфоксид и другие [1–18]. Оптическое просветление кожи исследовалось в работах [1–6, 8, 11, 22]. Влияние иммерсионных жидкостей на оптические характеристики костей черепа было показано в работах [12–14]. Оптическое просветление твердой мозговой оболочки под действием водных растворов глицерина, маннитола и глюкозы относительно малой концентрации ранее было исследовано в работах [7, 9, 15–18]. Однако поскольку при оптическом просветлении эффективность данного процесса, т.е. степень снижения светорассеяния, определяется в первую очередь



значением показателя преломления иммерсирующей жидкости по отношению к значению показателя преломления рассеивающих частиц биоткани, возникает необходимость использования иммерсионных жидкостей с максимально возможным значением показателя преломления. При этом для их клинического применения необходимо учитывать как их биосовместимость, так и скорость диффузии в биотканях. Один из возможных кандидатов на роль такого агента водный 40%-ный раствор глюкозы, который разрешен к клиническому применению [33], имеет достаточно высокий показатель преломления и, как показали исследования на других биотканях [1–6], достаточно быстро диффундирует в биоткань.

В настоящей работе выполнена оценка как относительного коэффициента диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке человека на основе *in vitro* экспериментальных исследований изменения оптических свойств при воздействии на биоткань водного 40%-ного раствора глюкозы, так и коэффициента проницаемости твердой мозговой оболочки для исследуемого раствора глюкозы.

### Материалы и методы

Образцы твердой мозговой оболочки человека были получены методом аутопсии не позднее 24 часов *post mortem* и хранились в течение суток при температуре  $-12^{\circ}\text{C}$ . Перед проведением измерений твердая мозговая оболочка размораживалась, и из нее вырезались образцы размером  $10 \times 15$  мм. Непосредственно перед проведением экспериментальных исследований и после них у образцов измерялась толщина. Для исследования кинетики изменения коллимированного пропускания твердой мозговой оболочки в процессе ее просветления под действием иммерсионной жидкости использовались десять образцов биоткани, толщина которых варьировала в диапазоне от 0.5 до 0.9 мм (измерения толщины образцов производились с помощью микрометра; точность измерений  $\pm 10$  мкм).

Измерение спектров коллимированного пропускания образцов биотканей проводилось с помощью многоканального спектрометра USB4000-Vis-NIR (Ocean Optics, США). Образец ткани закреплялся на пластиковой пластине площадью  $3.5 \times 1.5$  см<sup>2</sup> с отверстием в центре площадью  $8 \times 8$  мм<sup>2</sup> и помещался в стеклянную кювету объемом 5 мл с раствором глюкозы. Кювета устанавливалась между двумя оптическими волокнами QP400-1-VIS-NIR (Ocean Optics,

США) с внутренним диаметром 400 мкм. Для обеспечения коллимированности пучка на торцах волокон с помощью стандартных разъемов SMA-905 закреплялись коллиматоры 74-ACR (Ocean Optics, США). В качестве источника излучения использовалась галогенная лампа HL-2000 (Ocean Optics, США). Спектры коллимированного пропускания регистрировались в области 400–700 нм каждые 1–2 мин в течение 20–25 мин с момента помещения образца твердой мозговой оболочки в раствор глюкозы. Ошибка измерений не превышала 5% от измеряемой величины в диапазоне длин волн выше 500 нм и 10% в более коротковолновой области спектра. До и после окончания спектральных измерений измерялись толщина и вес образцов. Все измерения проводились при комнатной температуре  $\sim 20^{\circ}\text{C}$ .

В качестве иммерсионного агента использовался водный 40%-ный раствор глюкозы для инъекций (ОАО «Дальхимфарм», Россия); pH раствора 3.5. Показатель преломления раствора 1.391. Измерение показателя преломления раствора было выполнено на рефрактометре Аббе ИРФ-454Б2М (ЛОМО, Россия) на длине волны 589 нм. Измерения pH раствора проводились на pH-метре «Hanna» (Германия).

Для исследования кинетики набухания образцов твердой мозговой оболочки под действием раствора глюкозы выполнялись весовые измерения пяти образцов ткани с помощью электронных весов SA210 (Scientech, США) с точностью  $\pm 1$  мг. Для этого образцы твердой мозговой оболочки помещались в кювету с 40%-ным раствором глюкозы, а затем с интервалом в 1 мин вынимались из раствора и взвешивались в течение 30 мин.

Временная зависимость степени набухания биоткани  $H(t)$  аппроксимировалась феноменологическим выражением [15, 34]:

$$H(t) = \frac{M(t) - M(t=0)}{M(t=0)} = A_w (1 - \exp(-t/\tau_{sw})), \quad (1)$$

где  $M(t)$  – масса образца биоткани в различные моменты времени;  $A_w$  и  $\tau_{sw}$  – феноменологические константы, описывающие процесс изменения массы образца под действием раствора глюкозы. Тогда изменение объема биоткани можно записать в следующем виде:

$$V(t) = V(t=0) + H(t)M(t=0)/\rho_{gl} = \\ = V(t=0) + \frac{M(t=0)}{\rho_{gl}} A_w (1 - \exp(-t/\tau_{sw})), \quad (2)$$



где  $\rho_{gl} = 1.157$  г/мл – плотность раствора глюкозы [35]. Уравнение (2) можно переписать в более простой форме:

$$V(t) = V(t=0) + A(1 - \exp(-t/\tau_{sw})), \quad (3)$$

где  $A = \frac{M(t=0)}{\rho_{gl}} A_w$ . Поскольку изменение объема образца твердой мозговой оболочки происходит в основном за счет изменения его толщины  $l(t)$ , то оно может быть выражено следующим образом:

$$l(t) = l(t=0) + A^*(1 - \exp(-t/\tau_{sw})), \quad (4)$$

где  $A^* = A/S$ , а  $S$  – площадь образца, см<sup>2</sup>.

Толщина образца  $l$  вычислялась в каждый момент времени с помощью уравнения (4). Для оценки констант  $A^*$  и  $\tau_{sw}$  использовались весовые измерения образцов твердой мозговой оболочки.

Рассеивающие свойства твердой мозговой оболочки определяются ее структурой и отношением показателей преломления рассеивающих свет неоднородностей (коллагеновых волокон) и внутритканевой жидкости твердой мозговой оболочки, заполняющей межфибрилярное пространство.

При исследовании взаимодействия водного раствора глюкозы с образцами твердой мозговой оболочки предполагалось, что в результате этого взаимодействия изменяется только показатель преломления внутритканевой жидкости твердой мозговой оболочки, вследствие диффузии в биоткань иммерсионной жидкости и осмотического оттока воды из биоткани. При диффузии внутрь биоткани вещества с показателем преломления бóльшим, чем у внутритканевой жидкости, и оттока воды из биоткани происходит согласование показателей преломления рассеивателей и внутритканевой жидкости, что приводит к уменьшению коэффициента рассеяния биоткани. Исследование кинетики данного процесса позволяет оценить коэффициент диффузии как меру средней скорости обменного потока гипертонической жидкости в биоткань и воды из биоткани [34].

В данном случае коэффициент диффузии характеризует среднюю скорость обменного потока просветляющего агента (молекул глюкозы) в биоткань и воды из биоткани, т.е. относительный коэффициент диффузии. Поскольку с большой степенью достоверности соединительные ткани (и в особенности внутритканевый матрикс

этих тканей) могут быть представлены как полиэлектролитные гели [32, 36–38], то в силу этого описание процесса диффузии может быть выполнено с привлечением хорошо развитого аппарата физической и коллоидной химии [39, 40]. Согласно данному подходу подвижность молекул в бинарных системах характеризуется парциальными коэффициентами самодиффузии молекул растворителя (в нашем случае воды) и молекул растворенного вещества (глюкозы). При этом потоки молекул растворителя и растворенного вещества взаимодействуют друг с другом, и соответствующие коэффициенты диффузии называются связанными друг с другом коэффициентами взаимодиффузии [39, 40]. К сожалению, в настоящее время не существует надежных методов отдельного измерения этих коэффициентов или они могут быть измерены только в отдельных частных случаях. Тогда при анализе диффузии высококонцентрированных веществ в биотканях можно говорить лишь об относительном коэффициенте диффузии, характеризующем среднюю скорость обменного потока просветляющего агента в биоткань и воды из биоткани.

Процесс транспорта глюкозы в твердую мозговую оболочку описывался в рамках модели свободной диффузии. Были сделаны следующие допущения относительно процесса переноса: 1) имеет место только концентрационный диффузия, т.е. обменный поток глюкозы в биоткань и воды из ткани в данной точке пропорционален градиенту концентрации глюкозы в этой точке; 2) коэффициент диффузии постоянен во всех точках внутри исследуемого образца биоткани.

Геометрически образец твердой мозговой оболочки представлен плоско-параллельной пластиной конечной толщины. Так как площадь верхней и нижней поверхностей данной пластины намного превышает площадь ее боковых сторон, то можно пренебречь краевыми эффектами и решать одномерную задачу диффузии, т.е. уравнение

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2},$$

где  $C(x,t)$  – концентрация глюкозы в твердой мозговой оболочке, г/мл;  $D$  – коэффициент диффузии, см<sup>2</sup>/с;  $t$  – время, в течение которого происходит процесс диффузии, с;  $x$  – пространственная координата по толщине образца биоткани, см. Поскольку в экспериментах объем раствора глюкозы ( $\approx 3000$  мм<sup>3</sup>) значительно превышал объем



образца твердой мозговой оболочки ( $\approx 100 \text{ мм}^3$ ), то соответствующие граничные условия имеют вид:  $C(0, t) = C(l, t) = C_0$ , где  $C_0$  – концентрация глюкозы в растворе;  $l$  – толщина образца биоткани, см. Начальные условия отражают факт отсутствия глюкозы во всех внутренних точках образца твердой мозговой оболочки до его инкубации в раствор, т.е.  $C(x, 0) = 0$ .

Решение уравнения диффузии позволяет оценить среднюю концентрацию раствора глюкозы внутри образца в каждый момент времени [34]:

$$C(t) = C_0 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} \exp\left(- (2i+1)^2 t \pi^2 D / l^2\right) \right) \quad (5)$$

или в первом приближении

$$C(t) = C_0 \left( 1 - \exp\left(- t \pi^2 D / l^2\right) \right). \quad (6)$$

Использование уравнения (6) позволяет, воспользовавшись соотношением  $n_{gl} = n_{\text{H}_2\text{O}} + 0.1515 \cdot C_{gl}$  [41], для водных растворов глюкозы, где  $n_{gl}$  – показатель преломления раствора глюкозы,  $n_{\text{H}_2\text{O}}$  – показатель преломления воды и  $C_{gl}$  – концентрация глюкозы в растворе, г/мл, оценить временную зависимость изменения показателя преломления внутритканевой жидкости:  $n_t(t) = n_{t0} + 0.1515 C(t) / (1 - \varphi)$ , где  $n_t(t)$  – показатель преломления внутритканевой жидкости раствором глюкозы;  $n_{t0}$  – показатель преломления внутритканевой жидкости в начальный момент времени и  $\varphi$  – объемная доля рассеивателей в биоткани для твердой мозговой оболочки  $\varphi = 0.3$  [15].

Изменение  $n_t$  приводит к уменьшению коэффициента рассеяния твердой мозговой оболочки  $\mu_s$ , который для системы рассеивателей в виде бесконечных цилиндров имеет вид [34, 42–44]:

$$\mu_s(t) = \frac{\varphi}{\pi a^2} \sigma_s(t) \frac{(1 - \varphi)^3}{1 + \varphi}, \quad (7)$$

где  $\sigma_s$  – сечение рассеяния, которое в приближении Рэлея–Ганса для системы бесконечных цилиндров [43, 44] описывается выражением:

$$\sigma_s(t) = \frac{\pi^2 a x(t)^3}{8} \left( m(t)^2 - 1 \right)^2 \left( 1 + \frac{2}{\left( m(t)^2 + 1 \right)^2} \right), \quad (8)$$

где  $x(t) = 2\pi a n_t(t) / \lambda$  – параметр дифракции,  $m(t) = n_c / n_t(t)$  – относительный показатель преломления рассеивателей,  $n_c$  – показатель преломления коллагеновых волокон твердой мозговой оболочки и  $a \approx 50 \text{ нм}$  [15] – средний радиус цилиндров (рассеивателей).

Очевидно, что набухание образцов биоткани будет приводить к изменению объемной доли рассеивателей и соответственно фактора упаковки и числа рассеивателей в единице объема (см. уравнение (7)). С учетом уравнения (3) кинетика изменения объемной доли рассеивателей будет описываться выражением [15]

$$\varphi(t) = \frac{\varphi(t=0) \times V(t=0)}{V(t=0) + A(1 - \exp(-t/\tau_{sw}))}. \quad (9)$$

Зависимость коэффициента коллимированного пропускания образца твердой мозговой оболочки, помещенного в раствор глюкозы, от времени имеет вид

$$T_c(t) \approx \exp\left(-(\mu_a + \mu_s(t))l(t)\right), \quad (10)$$

где  $\mu_a$  – коэффициент поглощения образца твердой мозговой оболочки. При расчетах использовались значения коэффициентов поглощения, измеренные в работе [16].

Уравнения (4)–(10) определяют зависимость коэффициента коллимированного пропускания от концентрации раствора глюкозы внутри образца твердой мозговой оболочки, т.е. формируют прямую задачу. Обратной задачей в данном случае является восстановление значения относительного коэффициента диффузии по кинетике коллимированного пропускания. Эта задача была решена путем минимизации целевой функции:

$$f(D) = \sum_{i=1}^{N_t} \left( T_c(D, t_i) - T_c^*(t_i) \right)^2, \quad (11)$$

где  $N_t$  – общее количество экспериментальных точек, полученное при регистрации кинетики коллимированного пропускания на фиксированной длине волны;  $T_c(D, t)$  – значение коэффициента пропускания, рассчитанное по формуле (10) в момент времени  $t$  при заданном значении  $D$ ;  $T_c^*(t)$  – экспериментально измеренное значение коэффициента пропускания в момент времени  $t$ .

Для минимизации целевой функции (11) использовался симплекс-метод, подробно описанный в работе [45]. Итерационная процедура повторялась до согласования между собой экспериментальных и расчетных данных. В качестве критерия завершения итерационного процесса использовалось условие

$$\frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \left| \frac{T_c(D, t_i) - T_c^*(t_i)}{T_c^*(t_i)} \right| \leq 0.01.$$

Коэффициент проницаемости является одной из важнейших характеристик, который наряду с коэффициентом диффузии используется для



анализа транспорта лекарственных препаратов через биологические мембраны (в данном случае твердую мозговую оболочку). Значение коэффициента проницаемости определяется выражением  $P = D/l$ , где  $P$  – коэффициент проницаемости мембраны, см/с [46].

### Результаты и их обсуждение

На рис. 1 представлена кинетика степени набухания образцов твердой мозговой оболочки (экспериментальные данные усреднялись по всем образцам), помещенных в 40%-ный раствор глюкозы. Из рис. 1 видно, что экспе-

риментальные данные достаточно хорошо аппроксимируются уравнением (1). Параметры аппроксимации были найдены с помощью метода наименьших квадратов [45]:  $A_w = 0.581 \pm 0.003$  и  $\tau_{sw} = 1.964 \pm 0.106$  мин. Данные параметры позволяют оценить значение параметра  $A^*$  как  $0.024 \pm 1.35 \times 10^{-4}$  см и использовать уравнение (4) для определения толщины исследуемых образцов в каждый момент времени в процессе взаимодействия твердой мозговой оболочки с раствором глюкозы и параметра  $A$  как  $0.036 \pm 2.03 \times 10^{-4}$  см<sup>3</sup> для оценки изменения объемной доли рассеивателей (см. уравнение (10)).

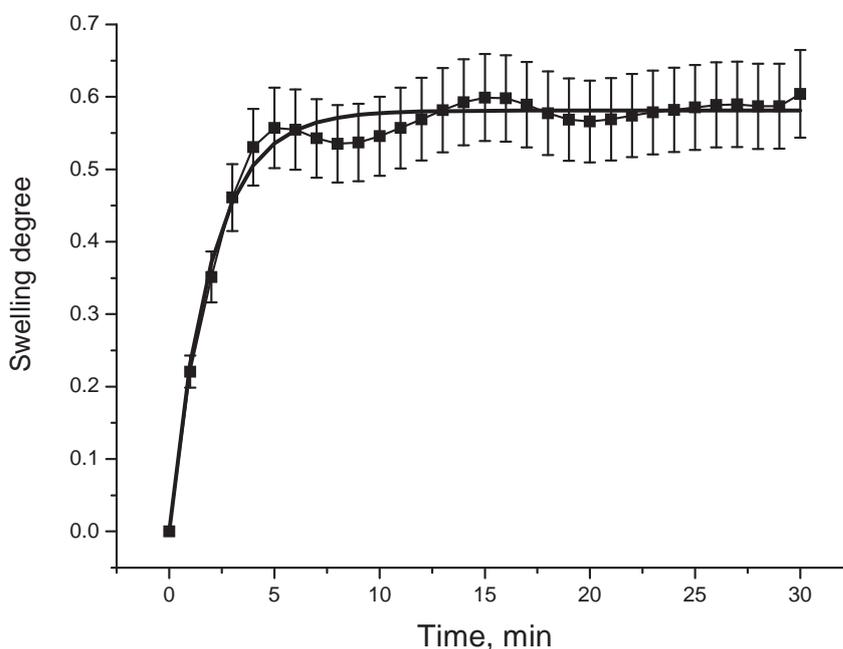


Рис. 1. Кинетика набухания твердой мозговой оболочки под действием 40%-ного раствора глюкозы. Точки соответствуют экспериментальным данным, сплошная линия – аппроксимации согласно уравнению (1)

Fig. 1. Dura mater swelling kinetics under action of 40%-glucose solution. The symbols correspond to the experimental data; the solid line corresponds to the approximation by Eq. (1)

Хорошо видно, что набухание ткани происходит в основном в течение первых пяти минут, а потом процесс стабилизируется и степень набухания практически не изменяется, хотя и наблюдаются незначительные осцилляции. Для объяснения набухания твердой мозговой оболочки может быть использована модель полиэлектролитного геля [32, 36–38]. Если рН ткани соответствует изоэлектрической точке, то силы притяжения, возникающие между одинаковым количеством положительных и отрицательных зарядов (цвиттер-ионами парами) [47], удерживают ткань в наиболее плотном состоянии, степень набухания

в данном случае минимальна [32]. Так, например, ранее было показано, что коллаген роговицы обладает максимальной степенью набухания при рН = 4, а минимальной – при рН = 7 [48]. Близкие результаты были получены для невысушенной роговицы вола [31]. Известно, что рН внутритканевой жидкости в среднем равен ~7.4 [37] и, таким образом, при смещении значения рН от изоэлектрической точки гидратация ткани увеличивается за счёт уменьшения количества пар цвиттер-ионов и соответственно увеличения результирующего статического заряда. Выше изоэлектрической точки результирующий заряд является отрица-



тельным, ниже – положительным и может влиять на набухание ткани двумя способами. Во-первых, для поддержания электрической нейтральности в строге статический заряд будет притягивать большее количество противоположных ионов, что приведёт к накоплению во внутритканевом пространстве мелких ионов. Это вызовет избыточное внутреннее осмотическое давление и увеличит набухание. Во-вторых, уменьшение числа пар цвиттер-ионов приведёт к уменьшению силы притяжения и тем самым ослабит плотность упаковки фибрилл, что тоже вызовет увеличение набухания [48].

Кроме того, известно, что глюкоза обладает достаточно большой гигроскопичностью, каждая молекула глюкозы может связывать до 10 молекул воды [49].

Таким образом, увеличение веса образцов твердой мозговой оболочки может быть связано с замещением в ткани молекул воды молекулами глюкозы, за счёт, во-первых, большей молекулярной массы молекул глюкозы, а во-вторых, допол-

нительной гидратации ткани при снижении рН внутритканевой жидкости и, наконец, в-третьих, связывания молекул воды молекулами глюкозы внутри ткани.

На рис. 2, 3 представлены типичные спектры и кинетика коллимированного пропускания на отдельных длинах волн, характеризующие изменение оптических свойств образца твердой мозговой оболочки под действием водного 40%-ного раствора глюкозы. Из рис. 2 видно, что в начальный момент времени образец твердой мозговой оболочки представляет собой малопрозрачную для оптического излучения биоткань. Под действием раствора глюкозы происходит замещение внутритканевой жидкости на раствор глюкозы и, как следствие, уменьшение светорассеяния и увеличение коллимированного пропускания. Из представленного рис. 2 видно, что оптическое просветление образца твердой мозговой оболочки происходит во всем видимом диапазоне длин волн с преобладанием просветления в красной области спектра.

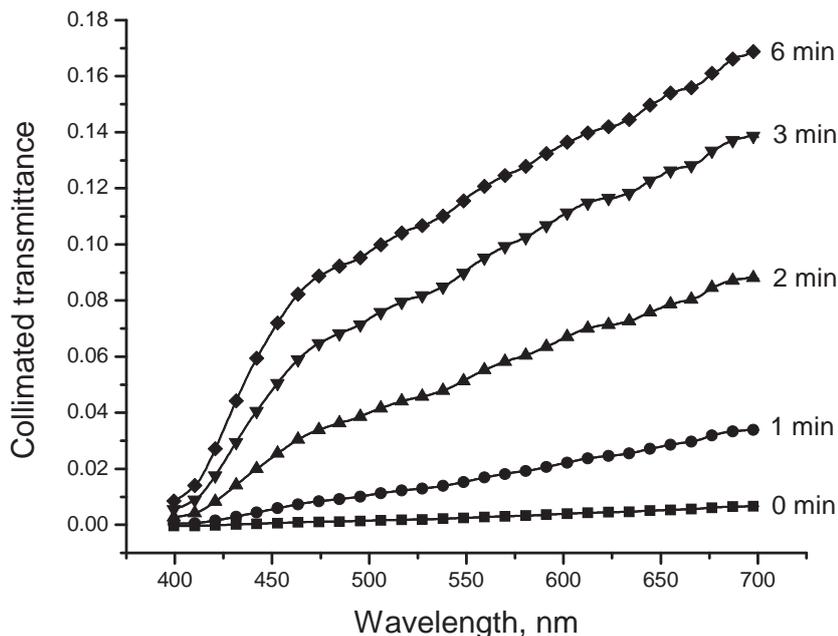


Рис. 2. Спектры коллимированного пропускания образца твердой мозговой оболочки человека, измеренные в разные моменты времени, под действием водного раствора глюкозы. Точки соответствуют экспериментальным данным

Fig. 2. Spectra of collimated transmittance of dura mater sample measured in different time intervals under action of aqueous glucose solution. The symbols correspond to the experimental data

На рис. 3 видно хорошее согласование между экспериментальными данными (точки) и аппроксимирующими кривыми (сплошные

линии), рассчитанными в рамках предложенной модели. Незначительные расхождения между экспериментальными и теоретическими данны-

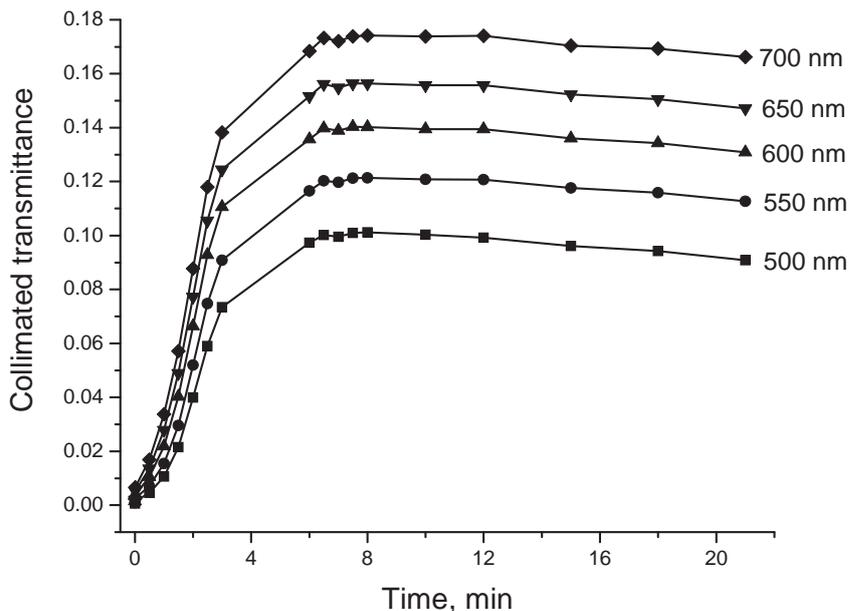


Рис. 3. Кинетика изменения коллимированного пропускания образца твердой мозговой оболочки человека, измеренная на разных длинах волн, под действием водного раствора глюкозы. Точки соответствуют экспериментальным данным, сплошные линии представляют аппроксимацию экспериментальных данных в рамках предложенной модели

Fig. 3. Kinetics of the change of collimated transmittance of dura mater sample measured at different wavelengths under action of aqueous glucose solution. The symbols correspond to the experimental data; the solid lines correspond to the present approximation of the experimental data in the framework of the proposed model

ми могут частично объясняться погрешностью экспериментальных измерений и упрощенностью используемой модели, поскольку коэффициент диффузии может несколько меняться в ходе проникновения молекул глюкозы в твердую мозговую оболочку из-за неоднородности по объему исследуемых образцов биоткани.

Измеренное на основе анализа кинетики коллимированного пропускания образцов твердой мозговой оболочки с помощью представленного выше алгоритма значение относительного коэффициента диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке составляет  $(6.08 \pm 0.02) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ , что позволяет оценить значение коэффициента проницаемости твердой мозговой оболочки для молекул глюкозы как  $(1.3 \pm 0.13) \times 10^{-4} \text{ см}/\text{с}$ . Полученное значение коэффициента диффузии достаточно хорошо согласуется с данными, представленными в работах [15, 18, 25, 34, 50–53]. Так, при использовании в качестве диффундирующего агента 20%-ного водного раствора глюкозы значение коэффициента диффузии составляет  $(1.63 \pm 0.29) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$  [15]. В работе [18] для 27%-ного раствора глюкозы значение

коэффициента диффузии было измерено как  $(1.1 \pm 0.1) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ ; для 54%-ного раствора глюкозы это значение составило  $(2.0 \pm 0.2) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ . Поскольку твердая мозговая оболочка является типичной соединительной тканью, то правомочно сравнение коэффициентов диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке со значениями коэффициентов диффузии глюкозы в других соединительных тканях, таких как склера глаза и дерма кожи. В работе [50] было показано, что при использовании водных растворов глюкозы с концентрациями 0.18, 0.3 и 0.4 г/мл значения коэффициентов диффузии глюкозы в склере глаза человека *in vitro* составляют соответственно  $(0.57 \pm 0.09) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $(1.47 \pm 0.36) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$  и  $(1.52 \pm 0.09) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ . Значение коэффициента диффузии глюкозы в дерме кожи человека *in vitro*, измеренное в работе [51], равно  $(2.64 \pm 0.42) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ . Коэффициент диффузии глюкозы в мышечной ткани *in vitro* (при использовании водного 40%-ного раствора глюкозы) равен  $8.36 \times 10^{-7} \text{ см}^2/\text{с}$  [52]. В случае *in vivo* измерений было получено значение коэффициента диффузии глюкозы в склере глаза



кролика, равное  $(0.54 \pm 0.1) \times 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с [25]. Значение коэффициента диффузии глюкозы в дерме кожи человека *in vivo*, измеренное в работе [53], составляет  $(2.56 \pm 0.13) \times 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с.

Полученное нами значение коэффициента проницаемости твердой мозговой оболочки также хорошо согласуется со значениями коэффициентов проницаемости других тканей со сходным структурно-морфологическим строением. Так, для дермы кожи в работе [54] было получено значение коэффициента проницаемости, равное  $(1.29 \pm 1.06) \times 10^{-4}$  см/с. Значение коэффициента проницаемости стенки пищевода для молекул глюкозы составляет  $(1.74 \pm 0.04) \times 10^{-5}$  см/с [55]. Для стенки аорты –  $(2.32 \pm 0.46) \times 10^{-5}$  см/с [56]. Для тканей стенки желудка –  $(0.94 \pm 0.04) \times 10^{-5}$  см/с [57]. Наблюдаемые различия в значениях коэффициентов проницаемости разных тканей связаны с особенностями в строении и свойствах различных типов биотканей.

Представленные результаты хорошо согласуются с изначально сделанным предположением о преобладающем влиянии концентрационной диффузии, при которой скорость обменного потока молекул глюкозы в биоткань и внутритканевой жидкости из биоткани определяется градиентом концентрации. Полученное численное значение относительного коэффициента диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке меньше, чем значение коэффициента диффузии глюкозы в воде, составляющее по разным данным  $6.4 \times 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с [58] или  $6.73 \times 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с [59], что объясняется сложным структурно-морфологическим строением твердой мозговой оболочки, затрудняющим диффузию.

### Заключение

В работе представлены результаты экспериментов по измерению относительного коэффициента диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке человека *in vitro*. Полученное значение коэффициента диффузии составляет  $(6.08 \pm 0.02) \times 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с, что позволило оценить значение коэффициента проницаемости твердой мозговой оболочки для молекул глюкозы как  $(1.3 \pm 0.13) \times 10^{-4}$  см/с. Метод основан на анализе кинетики изменения коллимированного пропускания образца биоткани под действием биологически совместимых иммерсионных жидкостей. В качестве иммерсионной жидкости использовался водный 40%-ный раствор глюкозы. Для количественного описания процесса замещения предложена модель, предполагающая постоянство

коэффициента диффузии во всем объеме образца биоткани. Оценка коэффициента диффузии глюкозы выполнена путем аппроксимации экспериментальных данных в рамках предложенной модели.

Полученные результаты могут быть использованы как при разработке новых и оптимизации существующих неинвазивных методов оптической томографии мозга для визуализации неоднородностей, скрытых в толще биоткани, и индикации гомеостаза тканевых жидкостей, так и для развития методов лазерной терапии и хирургии различных заболеваний.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 12.1223.2017/ПЧ) (Башкатов А. Н., Генина Э. А.) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-02-00358 А) (Тучин В. В.).

### Список литературы

1. Tuchin V. V. Optical clearing of tissues and blood. Bellingham, WA, USA : SPIE Press, 2005. Vol. PM 154. 254 p.
2. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Tissue optical immersion clearing // Expert Review of Medical Devices. 2010. Vol. 7, № 6. P. 825–842.
3. Genina E. A., Bashkatov A. N., Sinichkin Yu. P., Yanina I. Yu., Tuchin V. V. Optical clearing of biological tissues : prospects of application in medical diagnostics and phototherapy // J. Biomed. Photonics & Eng. 2015. Vol. 1, № 1. P. 22–58.
4. Genina E. A., Bashkatov A. N., Sinichkin Yu. P., Yanina I. Yu., Tuchin V. V. Optical clearing of tissues : benefits for biology, medical diagnostics, and phototherapy // Handbook of Optical Biomedical Diagnostics / ed. Valery V. Tuchin. 2nd ed. : in 2 vol. Vol. 2. Methods. Bellingham, WA, USA, SPIE Press, 2016. Ch. 10. P. 565–637.
5. Genina E. A., Bashkatov A. N., Larin K. V., Tuchin V. V. Light-tissue interaction at optical clearing // Laser Imaging and Manipulation in Cell Biology / ed. Francesco S. Pavone. Weinheim, Germany, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co., 2010. Ch. 7. P. 115–164.
6. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Glucose-induced optical clearing effects in tissues and blood // Handbook of Optical Sensing of Glucose in Biological Fluids and Tissues / ed. Valery V. Tuchin. Taylor & Francis Group LLC ; CRC Press, 2009. Ch. 21. P. 657–692.
7. Cheng H., Luo Q., Zeng S., Chen S., Luo W., Gong H. Hyperosmotic chemical agent's effect on *in vivo* cerebral blood flow revealed by laser speckle // Appl. Opt. 2004. Vol. 43, № 31. P. 5772–5777.
8. Zhu D., Larin K., Luo Q., Tuchin V. V. Recent progress in tissue optical clearing // Laser & Photonics Reviews. 2013. Vol. 7, № 5, P. 732–757.



9. Cheshire E. C., Malcomson R.D.G., Joseph S., Biggs M.J.B., Adlam D., Rutty G. N. Optical clearing of the dura mater using glycerol : a reversible process to aid the post-mortem investigation of infant head injury // *Forensic Science, Medicine, and Pathology*. 2015. Vol. 11, № 3. P. 395–404.
10. Susaki E. A., Tainaka K., Perrin D., Kishino F., Tawara T., Watanabe T. M., Yokoyama C., Onoe H., Eguchi M., Yamaguchi S., Abe T., Kiyonari H., Shimizu Y., Miyawaki A., Yokota H., Ueda H. R. Whole-brain imaging with single-cell resolution using chemical cocktails and computational analysis // *Cell*. 2014. Vol. 157. P. 726–739.
11. Wang J., Zhang Y., Li P., Luo Q., Zhu D. Review : tissue optical clearing window for blood flow monitoring // *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics*. 2014. Vol. 20, № 2. 6801112.
12. Zhang Y., Zhang C., Zhong X., Zhu D. Quantitative evaluation of SOCS-induced optical clearing efficiency of skull // *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*. 2015. Vol. 5, № 1. P. 136–142.
13. Генина Э. А., Башкатов А. Н., Семьячкина-Глушкова О. В., Тучин В. В. Оптическое просветление черепной кости многокомпонентными иммерсионными растворами и визуализация церебрального венозного кровотока // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 98–110.
14. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Optical clearing of cranial bone // *Advances in Optical Technologies*. 2008. Vol. 2008. 267867.
15. Bashkatov A. N., Genina E. A., Sinichkin Yu. P., Kochubey V. I., Lakodina N. A., Tuchin V. V. Glucose and mannitol diffusion in human *dura mater* // *Biophys. J.* 2003. Vol. 85, № 5. P. 3310–3318.
16. Генина Э. А., Башкатов А. Н., Кочубей В. И., Тучин В. В. Оптическое просветление твердой мозговой оболочки человека // *Оптика и спектроскопия*. 2005. Т. 98, № 3. С. 515–521.
17. Yao L., Cheng H., Luo Q., Zhang W., Zeng S., Tuchin V. V. Control of rabbit *dura mater* optical properties with osmotic liquids // *Proc. SPIE*. 2002. Vol. 4536. P. 147–152.
18. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Optical clearing of human *dura mater* by glucose solutions // *Journal of Biomedical Photonics & Engineering*. 2017. Vol. 3, № 1. 010309.
19. Boas G. Immersion liquids increase optical penetration of brain tissue // *Biophotonics Research*. 2004. Vol. 1. P. 61–63.
20. Mourant J. R., Freyer J. P., Hielscher A. H., Eick A. A., Shen D., Johnson T. M. Mechanisms of light scattering from biological cells relevant to non-invasive optical tissue diagnostics // *Appl. Opt.* 1998. Vol. 37, № 16. P. 3586–3593.
21. Tuchin V. V. *Tissue optics : Light Scattering Methods and Instruments for Medical Diagnosis*. 3rd ed. Bellingham, WA, USA : SPIE Press, 2015. Vol. PM254. 934 p. (SPIE Tutorial Text in Optical Engineering).
22. Genina E. A., Bashkatov A. N., Korobko A. A., Zubkova E. A., Tuchin V. V., Yaroslavsky I., Altshuler G. B. Optical clearing of human skin : comparative study of permeability and dehydration of intact and photothermally perforated skin // *J. Biomed. Opt.* 2008. Vol. 13, № 2. 021102.
23. Yu T., Qi Y., Zhu J., Gong H., Luo Q., Zhu D. Elevated-temperature-induced acceleration of PACT clearing process of mouse brain tissue // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7. 38848. DOI: 10.1038/srep38848.
24. Larin K. V., Ghosn M. G., Bashkatov A. N., Genina E. A., Trunina N. A., Tuchin V. V. Optical clearing for OCT image enhancement and in-depth monitoring of molecular diffusion // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 2012. Vol. 18, № 3. P. 1244–1259.
25. Генина Э. А., Башкатов А. Н., Синичкин Ю. П., Тучин В. В. Оптическое просветление склеры глаза *in vivo* под действием глюкозы // *Квантовая Электроника*. 2006. Т. 36, № 12. С. 1119–1124.
26. Richardson D. S., Lichtman J. W. Clarifying tissue clearing // *Cell*. 2015. Vol. 162. P. 246–257.
27. Yu T., Qi Y., Wang J., Feng W., Xu J., Zhu J., Yao Y., Gong H., Luo Q., Zhu D. Rapid and prodium iodide-compatible optical clearing method for brain tissue based on sugar/sugar-alcohol // *J. Biomed. Opt.* 2016. Vol. 21, № 8. 081203.
28. Silvestri L., Mascaro A.L.A., Lotti J., Sacconi L., Pavone F. S. Advanced optical techniques to explore brain structure and function // *Journal of Innovative Optical Health Sciences*. 2013. Vol. 6, № 1. 1230002.
29. d'Esposito A., Nikitichev D., Desjardins A., Walker-Samuel S., Lythgoe M. F. Quantification of light attenuation in optically cleared mouse brains // *J. Biomed. Opt.* 2015. Vol. 20, № 8. 080503.
30. Hama H., Kurokawa H., Kawano H., Ando R., Shimogori T., Noda H., Fukami K., Sakae-Sawano A., Miyawaki A. Scale : a chemical approach for fluorescence imaging and reconstruction of transparent mouse brain // *Nature Neuroscience*. 2011. Vol. 14, № 11. P. 1481–1488.
31. Пирс А., Гейнинген Р. ван. *Биохимия глаза*. М. : Медицина, 1968. 400 с.
32. Huang Y., Meek K. M. Swelling studies on the cornea and sclera : the effects of pH and ionic strength // *Biophysical J.* 1999. Vol. 77. P. 1655–1665.
33. Розентул М. А. *Общая терапия кожных болезней*. М. : Медицина, 1970. 470 с.
34. Bashkatov A. N., Genina E. A., Tuchin V. V. Measurement of glucose diffusion coefficients in human tissues // *Handbook of Optical Sensing of Glucose in Biological Fluids and Tissues / Ed. Valery V. Tuchin*. Taylor & Francis Group LLC, CRC Press, 2009. Ch. 19. P. 587–621.
35. Alves L. A., Silva J.B.A., Giuliatti M. Solubility of D-glucose in water and ethanol/water mixtures // *J. Chem. Eng. Data*. 2007. Vol. 52, № 6. P. 2166–2170.
36. Березов Т. Т., Коровкин Б. Ф. *Биологическая химия*. М. : Медицина, 1998. 704 с.
37. Равич-Шербо М. И., Новиков В. В. *Физическая и коллоидная химия*. М. : Высш. шк., 1975. 255 с.
38. Culav E. M., Clark C. H., Merrilees M. J. *Connective tissue : matrix composition and its relevance to physical therapy* // *Physical Therapy*. 1999. Vol. 79. P. 308–319.



39. Малкин А. Я., Чалых А. Е. Диффузия и вязкость полимеров. Методы измерения. М. : Химия, 1979. 304 с.
40. Чалых А. Е. Диффузия в полимерных системах. М. : Химия, 1987. 312 с.
41. Maier J. S., Walker S. A., Fantini S., Franceschini M. A., Gratton E. Possible correlation between blood glucose concentration and the reduced scattering coefficient of tissues in the near infrared // Opt. Lett. 1994. Vol. 19, № 24. P. 2062–2064.
42. Schmitt J.M., Kumar G. Optical scattering properties of soft tissue : a discrete particle model // Appl. Opt. 1998. Vol. 37, № 13. P. 2788–2797.
43. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М. : Мир, 1986. 664 с.
44. Cox J. L., Farrell R. A., Hart R. W., Langham M. E. The transparency of the mammalian cornea // Journal of Physiology. 1970. Vol. 210, № 3. P. 601–616.
45. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical recipes in C : the art of scientific computing. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. 994 p.
46. Котык А., Яначек К. Мембранный транспорт. М. : Мир, 1980. 341 с.
47. Katchalsky A. Polyelectrolyte gels // Prog. Biophys. Chem. 1954. Vol. 4. P. 1–59.
48. Pitie A. The action of mustard gas on ox cornea collagen // Biochem. J. 1947. Vol. 41. P. 185–190.
49. Molteni C., Parrinello M. Glucose in aqueous solution by first principles molecular dynamics // Journal of the American Chemical Society. 1998. Vol. 120. P. 2168–2171.
50. Башкатов А. Н., Генина Э. А., Синичкин Ю. П., Кочубей В. И., Лакодина Н. А., Тучин В. В. Определение коэффициента диффузии глюкозы в склере глаза человека // Биофизика. 2003. Т. 48, № 2. С. 309–313.
51. Khalil E., Kretsos K., Kasting G.B. Glucose partition coefficient and diffusivity in the lower skin layers // Pharmaceutical Res. 2006. Vol. 23, № 6. P. 1227–1234.
52. Oliveira L. M., Carvalho M. I., Nogueira E., Tuchin V. V. The characteristic time of glucose diffusion measured for muscle tissue at optical clearing // Laser Physics. 2013. Vol. 23, № 7. 075606.
53. Тучин В. В., Башкатов А. Н., Генина Э. А., Синичкин Ю. П., Лакодина Н. А. *In vivo* исследование динамики иммерсионного просветления кожи человека // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 12. С. 10–14.
54. Tuchina D. K., Shi R., Bashkatov A. N., Genina E. A., Zhu D., Luo Q., Tuchin V. V. Ex vivo optical measurements of glucose diffusion kinetics in native and diabetic mouse skin // J. Biophotonics. 2015. Vol. 8, № 4. P. 332–346.
55. Zhao Q. L., Si J. L., Guo Z. Y., Wei H. J., Yang H. Q., Wu G. Y., Xie S. S., Li X. Y., Guo X., Zhong H. Q., Li L. Q. Quantifying glucose permeability and enhanced light penetration in *ex vivo* human normal and cancerous esophagus tissues with optical coherence tomography // Laser Physics Letters. 2011. Vol. 8, № 1. P. 71–77.
56. Ghosn M. G., Mashiatulla M., Mohamed M. A., Syed S., Castro-Chavez F., Morrisett J. D., Larin K. V. Time dependent changes in aortic tissue during cold storage in physiological solution // Biochimica et Biophysica Acta. 2011. Vol. 1810, № 5. P. 555–560.
57. Xiong H., Guo Z., Zeng C., Wang L., He Y., Liu S. Application of hyperosmotic agent to determine gastric cancer with optical coherence tomography *ex vivo* in mice // J. Biomed. Opt. 2009. Vol. 14, № 2. 024029.
58. Amsden B. Solute diffusion within hydrogels. Mechanisms and models // Macromolecules. 1998. Vol. 31, № 23. P. 8382–8395.
59. Beck R. E., Schultz J. S. Hindrance of solute diffusion within membranes as measured with microporous membranes of known pore geometry // Biochimica et Biophysica Acta. 1972. Vol. 255. P. 273–303.

#### Образец для цитирования:

Башкатов А. Н., Генина Э. А., Тучин В. В. Определение коэффициента диффузии глюкозы в твердой мозговой оболочке человека // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 32–45. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-32-45.

#### Estimation of Glucose Diffusion Coefficient in Human *Dura Mater*

A. N. Bashkatov, E. A. Genina, V. V. Tuchin

Alexey N. Bashkatov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, a.n.bashkatov@mail.ru

Elina A. Genina, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, eagenina@yandex.ru

Valery V. Tuchin, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, tuchinv@mail.ru

**Background and Objectives:** Optical clearing of *dura mater* caused by hyperosmotic immersion liquids is important for the

development of noninvasive methods of brain optical tomography and for the study of microcirculation and homeostasis of tissue fluids. It allows significantly increasing the spatial resolution and the probing depth of brain. Obviously, a quantitative description of the optical clearing processes requires the development of reliable physicomathematical models, which in turn requires the knowledge of the diffusion rate parameters of immersion agents in tissues. In spite of the fact that diffusion of many biocompatible chemicals, in particular glucose, in aqueous solutions is well described, their diffusion in tissues continues to be poorly investigated. Thus, the goal of the study is estimation of the relative glucose diffusion coefficient in the human *dura mater in vitro*. **Materials and Methods:** The method of estimating the relative diffusion coefficient of immersion liquids in tissues was based on the analysis of the kinetics of the change in the collimated transmittance of a tissue sample under the action of these liquids. The kinetics of the interstitial fluid replace-



ment by immersion liquid was measured by successive recording of collimated transmittance spectra in the spectral range of 400–700 nm. For a quantitative description of the process, a corresponding model that assumed a constant diffusion coefficient in the entire volume of the tissue sample was developed. **Results:** In the study the results of the experiments, performed for a 40%-glucose solution, are presented. The relative diffusion coefficient of glucose in *dura mater* obtained using the approximation of the experimental data within the framework of the proposed model, was  $6.08 \times 10^{-6} \pm 2.26 \times 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s}$ . Based on Fick's first law, the coefficient of permeability of the *dura mater* for the glucose solution was calculated, the value of which was  $(1.3 \pm 0.13) \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ . **Conclusion:** The obtained results can be used in the development of new and optimization of existing non-invasive methods of optical tomography as well as for the development of methods of laser therapy and surgery of various brain diseases. **Key words:** diffusion coefficient, *dura mater*, glucose, control of tissue optical properties.

**Acknowledgements:** ANB and EAG were supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 12.1223.2017/PCh) and VVT was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (project no. 17-02-00358 A).

## References

1. Tuchin V. V. *Optical clearing of tissues and blood*. Bellingham, WA, USA, SPIE Press, 2005, vol. PM 154. 254 p.
2. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Tissue optical immersion clearing. *Expert Review of Medical Devices*, 2010, vol. 7, no. 6, pp. 825–842.
3. Genina E. A., Bashkatov A. N., Sinichkin Yu. P., Yanina I. Yu., Tuchin V. V. Optical clearing of biological tissues: prospects of application in medical diagnostics and phototherapy. *J. Biomed. Photonics & Eng.*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 22–58.
4. Genina E. A., Bashkatov A. N., Sinichkin Yu. P., Yanina I. Yu., Tuchin V. V. Optical clearing of tissues: benefits for biology, medical diagnostics, and phototherapy. In: *Handbook of Optical Biomedical Diagnostics*. Ed. Valery V. Tuchin. 2nd ed. Vol. 2. Methods. Bellingham, WA, USA, SPIE Press, 2016, ch. 10, pp. 565–637.
5. Genina E. A., Bashkatov A. N., Larin K. V., Tuchin V. V. Light-tissue interaction at optical clearing. In: *Laser Imaging and Manipulation in Cell Biology*. Ed. Francesco S. Pavone. Weinheim, Germany, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co., 2010, ch. 7, pp. 115–164.
6. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Glucose-induced optical clearing effects in tissues and blood. In: *Handbook of Optical Sensing of Glucose in Biological Fluids and Tissues*. Ed. Valery V. Tuchin. Taylor & Francis Group LLC, CRC Press, 2009, ch. 21, pp. 657–692.
7. Cheng H., Luo Q., Zeng S., Chen S., Luo W., Gong H. Hyperosmotic chemical agent's effect on in vivo cerebral blood flow revealed by laser speckle. *Appl. Opt.*, 2004, vol. 43, no. 31, pp. 5772–5777.
8. Zhu D., Larin K., Luo Q., Tuchin V.V. Recent progress in tissue optical clearing. *Laser & Photonics Reviews*, 2013, vol. 7, no. 5, pp. 732–757.
9. Cheshire E. C., Malcomson R.D.G., Joseph S., Biggs M.J.B., Adlam D., Ruttly G. N. Optical clearing of the *dura mater* using glycerol: a reversible process to aid the post-mortem investigation of infant head injury. *Forensic Science, Medicine, and Pathology*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 395–404.
10. Susaki E. A., Tainaka K., Perrin D., Kishino F., Tawara T., Watanabe T. M., Yokoyama C., Onoe H., Eguchi M., Yamaguchi S., Abe T., Kiyonari H., Shimizu Y., Miyawaki A., Yokota H., Ueda H. R. Whole-brain imaging with single-cell resolution using chemical cocktails and computational analysis. *Cell*. 2014, vol. 157, pp. 726–739.
11. Wang J., Zhang Y., Li P., Luo Q., Zhu D. Review : tissue optical clearing window for blood flow monitoring. *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics*, 2014, vol. 20, no. 2, 6801112.
12. Zhang Y., Zhang C., Zhong X., Zhu D. Quantitative evaluation of SOCS-induced optical clearing efficiency of skull. *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*, 2015, vol. 5, no. 1, pp. 136–142.
13. Genina E. A., Bashkatov A. N., Semyachkina-Glushkovskaya O. V., Tuchin V. V. Optical clearing of cranial bone by multicomponent immersion solutions and cerebral venous blood flow visualization. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 98–110. DOI: 10.18500/1817-3020-2017-17-2-98-110 (in Russian).
14. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Optical clearing of cranial bone. *Advances in Optical Technologies*, 2008, vol. 2008, 267867.
15. Bashkatov A. N., Genina E. A., Sinichkin Yu. P., Kochubey V. I., Lakodina N. A., Tuchin V. V. Glucose and mannitol diffusion in human *dura mater*. *Biophys. J.*, 2003, vol. 85, no. 5, pp. 3310–3318.
16. Genina E. A., Bashkatov A. N., Kochubey V. I., Tuchin V. V. Optical clearing of human *dura mater*. *Optics and Spectroscopy*, 2005, vol. 98, no. 3, pp. 470–476.
17. Yao L., Cheng H., Luo Q., Zhang W., Zeng S., Tuchin V. V. Control of rabbit *dura mater* optical properties with osmotic liquids. *Proc. SPIE.*, 2002, vol. 4536, pp. 147–152.
18. Genina E. A., Bashkatov A. N., Tuchin V. V. Optical clearing of human *dura mater* by glucose solutions. *J. Biomed. Photonics & Eng.*, 2017, vol. 3, no. 1, 010309.
19. Boas G. Immersion liquids increase optical penetration of brain tissue. *Biophotonics Research*, 2004, vol. 1, pp. 61–63.
20. Mourant J. R., Freyer J. P., Hielscher A. H., Eick A. A., Shen D., Johnson T. M. Mechanisms of light scattering from biological cells relevant to non-invasive optical



- tissue diagnostics. *Appl. Opt.*, 1998, vol. 37, no. 16, pp. 3586–3593.
21. Tuchin V. V. *Tissue optics: Light Scattering Methods and Instruments for Medical Diagnosis*. 3rd ed. Bellingham, WA, USA, SPIE Press, 2015, vol. PM254. 934 p. (SPIE Tutorial Text in Optical Engineering).
  22. Genina E. A., Bashkatov A. N., Korobko A. A., Zubkova E. A., Tuchin V. V., Yaroslavsky I., Altshuler G. B. Optical clearing of human skin : comparative study of permeability and dehydration of intact and photothermally perforated skin. *J. Biomed. Opt.* 2008, vol. 13, no. 2, 021102.
  23. Yu T., Qi Y., Zhu J., Gong H., Luo Q., Zhu D. Elevated-temperature-induced acceleration of PACT clearing process of mouse brain tissue. *Scientific Reports*, 2017, vol. 7, 38848. DOI: 10.1038/srep38848.
  24. Larin K. V., Ghosn M. G., Bashkatov A. N., Genina E. A., Trunina N. A., Tuchin V. V. Optical clearing for OCT image enhancement and in-depth monitoring of molecular diffusion. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 1244–1259.
  25. Genina E. A., Bashkatov A. N., Sinichkin Yu. P., Tuchin V. V. Optical clearing of the eye sclera *in vivo* caused by glucose. *Quantum Electronics*, 2006, vol. 36, no. 12, pp. 1119–1124.
  26. Richardson D. S., Lichtman J. W. Clarifying tissue clearing. *Cell*. 2015, vol. 162, pp. 246–257.
  27. Yu T., Qi Y., Wang J., Feng W., Xu J., Zhu J., Yao Y., Gong H., Luo Q., Zhu D. Rapid and prodium iodide-compatible optical clearing method for brain tissue based on sugar/sugar-alcohol. *J. Biomed. Opt.*, 2016, vol. 21, no. 8, 081203.
  28. Silvestri L., Mascaro A.L.A., Lotti J., Sacconi L., Pavone F. S. Advanced optical techniques to explore brain structure and function. *Journal of Innovative Optical Health Sciences*, 2013, vol. 6, no. 1, 1230002.
  29. d'Esposito A., Nikitichev D., Desjardins A., Walker-Samuel S., Lythgoe M. F. Quantification of light attenuation in optically cleared mouse brains. *J. Biomed. Opt.*, 2015, vol. 20, no. 8. 080503.
  30. Hama H., Kurokawa H., Kawano H., Ando R., Shimogori T., Noda H., Fukami K., Sakaue-Sawano A., Miyawaki A. Scale: a chemical approach for fluorescence imaging and reconstruction of transparent mouse brain. *Nature Neuroscience*, 2011, vol. 14, no. 11, pp. 1481–1488.
  31. Pirie A. van Heiningen R. *Biochemistry of the eye*. Blackwell Scientific Publications, 1956. 323 p.
  32. Huang Y., Meek K. M. Swelling studies on the cornea and sclera: the effects of pH and ionic strength. *Biophysical J.* 1999, vol. 77, pp. 1655–1665.
  33. Rosentul M. A. *Obshchaia terapiia kozhnykh boleznei* [General therapy of skin diseases]. Moscow: Meditsina, 1970. 470 p. (in Russian).
  34. Bashkatov A. N., Genina E. A., Tuchin V. V. Measurement of glucose diffusion coefficients in human tissues. In: *Handbook of Optical Sensing of Glucose in Biological Fluids and Tissues*. Ed. Valery V. Tuchin. Taylor & Francis Group LLC, CRC Press, 2009, ch. 19, pp. 587–621.
  35. Alves L. A., Silva J. B. A., Giuliatti M. Solubility of D-glucose in water and ethanol/water mixtures. *J. Chem. Eng. Data*. 2007, vol. 52, no. 6, pp. 2166–2170.
  36. Berezov T. T., Korovkin B. F. *Biologicheskaja khimiia* [Biological chemistry]. Moscow, Meditsina, 1998. 704 c. (in Russian).
  37. Ravich-Szherbo M. I., Novikov V. V. *Fizicheskaja i kolloidnaia khimiia* [Physical and colloid chemistry]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1975. 255 p. (in Russian).
  38. Culav E. M., Clark C. H., Merrilees M. J. Connective tissue: matrix composition and its relevance to physical therapy. *Physical Therapy*, 1999, vol. 79, pp. 308–319.
  39. Malkin A. Y., Chalykh A. E. *Diffuziia i viazkost' polimerov. Metody izmereniia* [Diffusion and viscosity of polymers. Measurement methods]. Moscow, Khimiia, 1979. 304 c. (in Russian).
  40. Chalykh A. E. *Diffuziia v polimernykh sistemakh* [Diffusion in polymer systems]. Moscow, Khimiia, 1987. 312 p. (in Russian).
  41. Maier J. S., Walker S. A., Fantini S., Franceschini M. A., Gratton E. Possible correlation between blood glucose concentration and the reduced scattering coefficient of tissues in the near infrared. *Opt. Lett.*, 1994, vol. 19, no. 24, pp. 2062–2064.
  42. Schmitt J. M., Kumar G. Optical scattering properties of soft tissue: a discrete particle model. *Appl. Opt.*, 1998, vol. 37, no. 13, pp. 2788–2797.
  43. Bohren C. F., Huffman D. R. *Absorption and scattering of light by small particles*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1983. 530 p.
  44. Cox J. L., Farrell R. A., Hart R. W., Langham M. E. The transparency of the mammalian cornea. *Journal of Physiology*, 1970, vol. 210, no. 3, pp. 601–616.
  45. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992. 994 p.
  46. Kotyk A., Janacek K. *Membrane Transport: An Interdisciplinary Approach*. New York, Plenum Press, 1977. 348 p.
  47. Katchalsky A. Polyelectrolyte gels. *Prog. Biophys. Chem.*, 1954, vol. 4, pp. 1–59.
  48. Pitie A. The action of mustard gas on ox cornea collagen. *Biochem. J.*, 1947, vol. 41, pp. 185–190.
  49. Molteni C., Parrinello M. Glucose in aqueous solution by first principles molecular dynamics. *Journal of the American Chemical Society*, 1998, vol. 120, pp. 2168–2171.
  50. Bashkatov A. N., Genina E. A., Sinichkin Yu. P., Kochubei V. I., Lakodina N. A., Tuchin V. V. Estimation of the glucose diffusion coefficient in human eye sclera. *Biophysics*, 2003, vol. 48, no. 2, pp. 292–296.



51. Khalil E., Kretsos K., Kasting G.B. Glucose partition coefficient and diffusivity in the lower skin layers. *Pharmaceutical Res.* 2006, vol. 23, no. 6, pp. 1227–1234.
52. Oliveira L. M., Carvalho M. I., Nogueira E., Tuchin V. V. The characteristic time of glucose diffusion measured for muscle tissue at optical clearing. *Laser Physics*, 2013, vol. 23, no. 7, 075606.
53. Tuchin V. V., Bashkatov A. N., Genina E. A., Sinichkin Yu. P., Lakodina N. A. *In vivo* investigation of the immersion-liquid-induced human skin clearing dynamics. *Technical Physics Letters*, 2001, vol. 27, no. 6, pp. 489–490.
54. Tuchina D. K., Shi R., Bashkatov A. N., Genina E. A., Zhu D., Luo Q., Tuchin V. V. Ex vivo optical measurements of glucose diffusion kinetics in native and diabetic mouse skin. *J. Biophotonics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 332–346.
55. Zhao Q. L., Si J. L., Guo Z. Y., Wei H. J., Yang H. Q., Wu G. Y., Xie S. S., Li X. Y., Guo X., Zhong H. Q., Li L. Q. Quantifying glucose permeability and enhanced light penetration in ex vivo human normal and cancerous esophagus tissues with optical coherence tomography. *Laser Physics Letters*, 2011, vol. 8, no. 1, pp. 71–77.
56. Ghosn M. G., Mashiatulla M., Mohamed M.A., Syed S., Castro-Chavez F., Morrisett J. D., Larin K.V. Time dependent changes in aortic tissue during cold storage in physiological solution. *Biochimica et Biophysica Acta*, 2011, vol. 1810, no. 5, pp. 555–560.
57. Xiong H., Guo Z., Zeng C., Wang L., He Y., Liu S. Application of hyperosmotic agent to determine gastric cancer with optical coherence tomography ex vivo in mice. *J. Biomed. Opt.* 2009, vol. 14, no. 2, 024029.
58. Amsden B. Solute diffusion within hydrogels. Mechanisms and models. *Macromolecules*, 1998, vol. 31, no. 23, pp. 8382–8395.
59. Beck R. E., Schultz J. S. Hindrance of solute diffusion within membranes as measured with microporous membranes of known pore geometry. *Biochimica et Biophysica Acta*, 1972, vol. 255, pp. 273–303.

**Cite this article as:**

Bashkatov A. N., Genina E. A., Tuchin V. V. Estimation of Glucose Diffusion Coefficient in Human *Dura Mater*. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 32–45 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-32-45.



## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 534.23:537.874.6

### ДВА ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОЙ ДВУПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ ИЗ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ЖИДКОМ СЛОЕ

С. А. Маненков

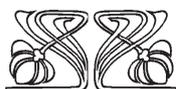
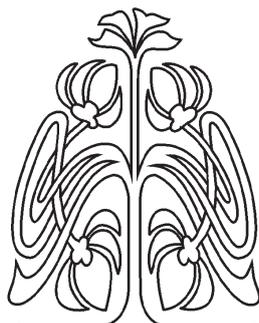
Маненков Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики, mail44471@mail.ru

На основе модифицированного метода дискретных источников (ММДИ) разработаны две методики решения скалярной трехмерной задачи рассеяния на плоской решетке, состоящей из импедансных тел вращения, расположенной в жидком слое. В работе предложен эффективный алгоритм нахождения периодической функции Грина, учитывающий слоистый характер среды. Выполнено сравнение результатов, полученных при помощи обеих методик. Для тестирования метода проведено сравнение угловой зависимости диаграммы рассеяния вытянутого суперэллипсоида вращения, полученной при помощи ММДИ и метода диаграммных уравнений. Для проверки сходимости метода построена невязка краевого условия на контуре осевого сечения центрального элемента решетки, состоящей из сплюснутых абсолютно мягких сфероидов. Проведена проверка точности выполнения закона сохранения энергии для разных геометрий элементов решетки. Продемонстрирована высокая точность получаемых результатов. Приведены численные результаты для различных геометрий элементов решетки для двух значений импеданса на поверхности элементов решетки. Показано существенное отличие поведения частотных зависимостей коэффициентов отражения и прохождения решетки, расположенной в плоскостной среде, от зависимостей данных величин для решетки, расположенной в свободном пространстве. **Ключевые слова:** дифракция волн на решетках, расположенных в слоистых средах; метод дискретных источников; аналитическое продолжение волновых полей.

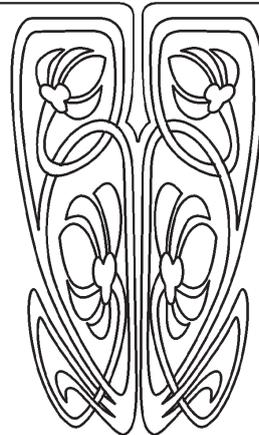
DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-46-63

#### Введение

Задача дифракции волн на периодических структурах представляет большой практический интерес. В частности, решетки, погруженные в слоистую среду, применяются в гидроакустике, так как на низких частотах такие структуры могут быть использованы как отражающие или поглощающие перегородки. Таким образом, наличие слоистой среды существенным образом сказывается на отражательных свойствах решеток. Заметим также, что в случае абсолютно мягких границ элементов решеток рассматриваемая структура моделирует рассеяние звуковой волны на пузырьках воздуха, расположенных в жидкости [1, 2]. В случае абсолютно жестких элементов решетка представляет собой (в первом приближении) модель из одинаковых плавающих в жидкости упругих тел [3]. В литературе рассматривались задачи дифракции как на решетках, расположенных в свободном пространстве [1, 2, 4–16],



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





так и на телах и решетках, расположенных в плоскослоистой среде [17–24]. Заметим, что обзор литературы, посвященной дифракции волн на решетках в однородной среде, приведен в работе [14]. Среди публикаций, связанных с дифракцией на решетках (и отдельных телах), расположенных в плоскослоистой среде, отметим работу [17], в которой рассматривается двумерная задача дифракции электромагнитных волн на решетке из цилиндрических тел, расположенной в диэлектрическом слое. Задача решалась при помощи метода интегральных уравнений. В статье [18] рассмотрена трехмерная задача дифракции плоской акустической волны на двупериодической структуре, состоящей из ячеек в виде параллелепипедов, окруженных двумя однородными полупространствами. Для решения задачи использовался метод конечных элементов. В работе [19] при помощи метода задачи Римана–Гильберта рассмотрена дифракция плоской волны на решетке из лент, расположенной в киральной плоскослоистой среде. Работы [20, 21] посвящены решению задачи дифракции акустического поля на решетках, состоящих из абсолютно жестких цилиндрических тел и цилиндрических резонансных включений, погруженных в слой из пористого материала. Задача решалась аналитически (на низких частотах) и численно при помощи метода конечных элементов. В статье [22] рассмотрена дифракция электромагнитного поля на конечной трехмерной решетке, элементами которой являются проводящие проволоки малого электрического радиуса. Решетка располагалась внутри диэлектрика конечных размеров. Задача решалась при помощи метода вспомогательных источников (МВИ). Работа [23] посвящена двумерной задаче дифракции плоской волны на многорядной решетке, расположенной в диэлектрическом слое. Для решения задачи использовался модифицированный метод нулевого поля. В статье [24] рассмотрено рассеяние акустического поля на упругих произвольных телах, расположенных в слоистой среде. Задача решалась с использованием метода, являющегося комбинацией метода конечных элементов и метода функции Грина. Приведен пример расчета рассеяния на телах, расположенных в океане, и проведено сравнение с экспериментальными данными.

В настоящей работе рассмотрена дифракция плоской волны на плоской решетке, состоящей из импедансных тел вращения, которая расположена в симметричном жидком слое, ограниченном

одинаковыми жидкими полупространствами. Одним из эффективных методов решения задач дифракции является метод дискретных источников (МДИ) или метод вспомогательных источников [22, 25]. Основная идея этого метода состоит в том, что вспомогательная поверхность, являющаяся носителем дискретных источников, и поверхность рассеивателя разнесены на некоторое расстояние. Существует много вариантов МДИ. В настоящей работе использовался модифицированный метод дискретных источников (ММДИ) [26–29]. Отметим, что данная работа по существу является обобщением работ [12–14] применительно к акустической задаче дифракции на плоской решетке, расположенной в плоскослоистой среде. Настоящую работу можно также считать обобщением работы [23] на трехмерную задачу дифракции.

Основное отличие ММДИ от других вариантов метода дискретных источников состоит в следующем. Во-первых, носитель вспомогательных источников должен охватывать особенности продолжения волнового поля внутрь рассеивателя. Во-вторых, для быстрой сходимости численного алгоритма вспомогательная поверхность должна выбираться при помощи аналитической деформации границы рассеивателя [26–29]. Еще один важный шаг, позволяющий получать высокую точность результатов, использование различных систем координат для построения носителя дискретных источников. В частности, в настоящей работе применяли сферические, сфероидальные и тороидальные координаты [14, 28, 29].

Как известно [26–29], в рамках ММДИ задача дифракции сводится к решению интегрального уравнения первого рода относительно некоторой неизвестной функции, носителем которой является вспомогательная поверхность, расположенная внутри поверхности рассеивателя. Для алгебраизации поверхностного интегрального уравнения можно использовать два подхода. Первый вариант ММДИ основан на алгебраизации задачи при помощи непосредственного применения метода коллокации. При таком подходе, во-первых, возможно обобщение метода на произвольные тела (не тела вращения), во-вторых, проще вычислять функцию Грина (ФГ), т. е. не требуется находить коэффициенты Фурье для ФГ. Второй подход аналогичен алгоритму, предложенному в работах [12, 13], причем для сведения задачи к алгебраической системе использовалась осевая симметрия элементов



решетки. При этом поверхностное интегральное уравнение решалось при помощи разложения неизвестной функции и ядра в ряд Фурье по угловой координате с последующим применением метода коллокации. Как показывают расчеты, при таком подходе размер возникающих алгебраических систем существенно меньше, чем при использовании первой методики.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую решетку, составленную из одинаковых тел вращения, имеющую два периода –  $d_x$  и  $d_y$ . Предполагаем, что «центры» тел вращения лежат в одной плоскости, а оси симметрии тел перпендикулярны этой плоскости. Введем декартову систему координат, причем ось  $z$  направим перпендикулярно плоскости решетки. Начало координат выберем внутри одного из элементов, который будем называть центральным элементом решетки. Для упрощения выкладок предполагаем, что плоскость, в которой лежат «центры» элементов решетки, совпадает с плоскостью  $z = 0$ . Считаем, что решетка расположена внутри симметричного жидкого слоя толщины  $h$  с характеристиками (плотностью и скоростью звука)  $\rho_2$  и  $c_2$  (рис. 1). Характеристики среды вне жидкого слоя  $\rho_1$  и  $c_1$ . Случай, когда решетка расположена несимметрично относительно границ жидкого слоя, рассматривается аналогичным образом. Занумеруем поверхности элементов решетки  $S_{ij}$  в порядке возрастания осей  $x$  и  $y$ , где  $i, j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Центральный элемент решетки ограничен поверхностью  $S_{00}$ .

Предполагаем, что структура облучается плоской волной

$$U_{nad} = \exp(-ik_1 r (\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta)), \quad (1)$$

где  $U_{nad}$  – поле (давление) падающей волны;  $k_1 = \omega/c_1$  – волновое число среды, внешней по отношению к слою;  $(r, \theta, \varphi)$  – сферические координаты;  $\theta_0, \varphi_0$  – углы падения. Рассеянное поле  $U^1$  вне решетки удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta U^1 + k_2^2 U^1 = 0, \quad (2)$$

внутри жидкого слоя и вне жидкого слоя:

$$\Delta U^1 + k_1^2 U^1 = 0, \quad (3)$$

Здесь  $k_2 = \omega/c_2$ . Для дальнейшего удобно считать, что в рассматриваемых средах имеется малое поглощение, т. е.  $\text{Im} k_1 < 0$  и  $\text{Im} k_2 < 0$ .

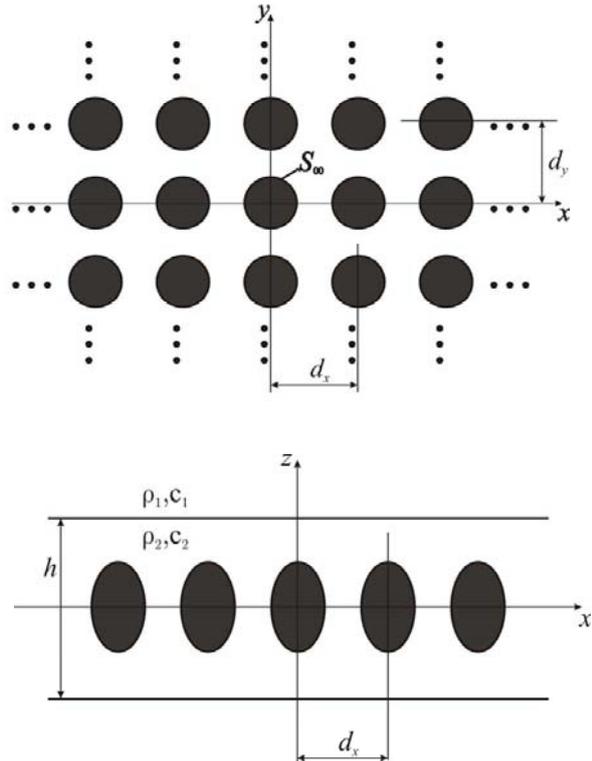


Рис. 1. Геометрия задачи  
Fig.1. Geometry of the problem

На границах раздела сред выполнены условия сопряжения

$$U^1 \Big|_{y=h/2-0} = U^1 \Big|_{y=h/2+0},$$

$$\frac{1}{v_{21}} \frac{\partial U^1}{\partial z} \Big|_{y=h/2-0} = \frac{\partial U^1}{\partial z} \Big|_{y=h/2+0}, \quad (4)$$

где  $v_{21} = \rho_2 / \rho_1$ . На поверхности каждого элемента решетки выполнено импедансное краевое условие:

$$U = W_0 \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (5)$$

где  $\partial / \partial n$  – производная по нормали, внешней к поверхности тела;  $U = U^0 + U^1$  – полное поле вне области, занимаемой решеткой ( $U^0$  – первичное поле, определяемое из задачи дифракции на жидком слое в отсутствие решетки);  $W_0$  – импеданс элемента решетки. Отметим, что в случае  $W_0 = 0$  имеем решетку, составленную из абсолютно мягких тел, а в случае  $W_0 = \infty$  – из абсолютно жестких.

Вторичное поле в области вне решетки удовлетворяет условиям периодичности Флоке:

$$U^1(x + d_x, y, z) = U^1(x, y, z) \exp(-i\tau_x), \quad (6)$$



$$U^1(x, y + d_y, z) = U^1(x, y, z) \exp(-i\tau_y), \quad (7)$$

где  $\tau_x = k_1 d_x \sin \theta_0 \cos \varphi_0$ ,  $\tau_y = k_1 d_y \sin \theta_0 \sin \varphi_0$  – параметры Флоке. На бесконечности полное поле удовлетворяет условиям излучения:

$$U(x, y, z) = U_{\text{nad}}(x, y, z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{pq}^- \exp(-i\mathbf{\kappa}_{pq}^- \mathbf{r}), \quad (8)$$

$$z < -h/2,$$

$$U(x, y, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{pq}^+ \exp(-i\mathbf{\kappa}_{pq}^+ \mathbf{r}), \quad (9)$$

$$z > h/2,$$

где  $\mathbf{\kappa}_{pq}^{\pm} = u_p \mathbf{i}_x + v_q \mathbf{i}_y \pm \Gamma_{pq}^1 \mathbf{i}_z$ ,  $u_p = \frac{\tau_x + 2\pi p}{d_x}$ ,

$$v_q = \frac{\tau_y + 2\pi q}{d_y}, \quad \Gamma_{pq}^1 = \sqrt{k_1^2 - u_p^2 - v_q^2},$$

причем знак квадратного корня выбирается из условия неположительности его мнимой части. В формулах (8) и (9)  $A_{pq}^+$  и  $A_{pq}^-$  – неизвестные коэффициенты. Заметим, что величины  $|A_{00}^-|$  и  $|A_{00}^+|$  представляют собой модули коэффициентов отражения и прохождения плоской волны (1) от слоя с решеткой.

$$G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\gamma_2(z+z')) + V(\kappa) \exp(-i\gamma_2 h) \cos(\gamma_2(z-z'))] \times \quad (13)$$

$$\times \frac{V(\kappa) \exp(-i\gamma_2 h)}{\sigma(\kappa)\gamma_2} \exp(-i\xi(x-x' - pd_x) - i\eta(y-y' - qd_y)) d\xi d\eta \cdot \exp(-ip\tau_x - iq\tau_y).$$

В формулах (12) и (13)

$$G_0(R_{pq}) = \frac{\exp(-ik_2 R_{pq})}{4\pi R_{pq}}, \quad R_{pq} = \sqrt{(x-x' - pd_x)^2 + (y-y' - qd_y)^2 + (z-z')^2}, \quad (14)$$

$$V(\kappa) = \frac{\gamma_2 - v_{21}\gamma_1}{\gamma_2 + v_{21}\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - \kappa^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - \kappa^2}, \quad \sigma(\kappa) = 1 - V^2(\kappa) \exp(-i2\gamma_2 h), \quad \kappa = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (15)$$

В формуле (11)  $G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – ФГ решетки в безграничной среде с волновым числом  $k_2$ , а  $G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – добавочная ФГ, обусловленная наличием границ раздела сред. Заметим, что величина  $V(\kappa)$  имеет смысл коэффициента отражения плоской волны от границ жидкого слоя. Из приведенных формул следует, что волновое поле, записанное в виде (10), с учетом формул (11) – (15) удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям сопряжения на границах жидкого слоя и условию периодичности Флоке.

## 2. Вывод интегрального уравнения

Будем решать поставленную задачу с помощью метода вспомогательных токов, который в дальнейшем сводится к ММДИ [12–14]. Для этого представим волновое поле вне области, занимаемой решеткой в виде

$$U(\mathbf{r}) = U^0(\mathbf{r}) + \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds'. \quad (10)$$

В этой формуле  $\Sigma$  – вспомогательная поверхность, расположенная внутри исходной поверхности центрального элемента решетки  $S_{00}$ , а  $J$  – неизвестная функция, заданная на поверхности  $\Sigma$ . Отметим, что функция  $J$  имеет смысл плотности вспомогательных источников вторичного поля. Функция  $G$  представляет собой периодическую функцию Грина (ФГ) решетки, которая имеет вид [30]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (11)$$

где

$$G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_0(R_{pq}) \exp(-ip\tau_x - iq\tau_y), \quad (12)$$

Рассмотрим вопрос о построении носителя для неизвестной функции  $J$ . Как было указано во введении, для быстрой сходимости численного алгоритма вспомогательная поверхность должна выбираться при помощи аналитической деформации границы рассеивателя. Поясним это подробнее.

Предположим вначале, что поверхность центрального элемента решетки  $S_{00}$  задана в сферических координатах:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (16)$$



где  $r = r(\theta)$  и  $\theta \in [0, \pi]$ . Введем переменную  $\xi(\theta) = r(\theta) \exp(i\theta) = z + i\rho$ , где  $(\rho, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты. Основная идея ММДИ состоит в том, чтобы считать угол  $\theta$  комплексным, т. е. положить вместо угла  $\theta$  угол  $\theta + i\delta$  в формуле для  $\xi(\theta)$ . Здесь  $\delta$  – положительный параметр, определяющий степень деформации исходной поверхности тела. Выбор этого параметра подробно описан в работах [26–29]. С увеличением  $\delta$  точки вспомогательной поверхности будут перемещаться внутрь исходной поверхности элемента решетки, двигаясь по ортогональным траекториям [26, 27]. При этом уравнения вспомогательной поверхности  $\Sigma$  в сферической системе координат примут вид

$$r_\Sigma = |\xi|, \theta_\Sigma = \arg \xi, \xi(\theta + i\delta) = r(\theta + i\delta) \exp(i\theta - \delta). \quad (17)$$

Для нахождения декартовых координат точки на вспомогательной поверхности используем формулы

$$x_\Sigma = \text{Im } \xi \cos \varphi, \quad y_\Sigma = \text{Im } \xi \sin \varphi, \quad z_\Sigma = \text{Re } \xi. \quad (18)$$

Пусть далее поверхность центрального элемента решетки задана в вытянутых сфероидальных координатах:

$$\begin{aligned} x &= f \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = f \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z &= f \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{aligned} \quad (19)$$

причем уравнение  $S_{00}$  имеет вид  $\alpha = \alpha(\beta)$ , где  $\beta \in [0, \pi]$ . Тогда вспомогательная поверхность определяется соотношениями [28]

$$\alpha_\Sigma = \operatorname{Re} Z, \quad \beta_\Sigma = \operatorname{Im} Z, \quad Z(\beta) = \alpha(\beta + i\delta) + i(\beta + i\delta), \quad (20)$$

где  $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \varphi)$  – сфероидальные координаты «образа» точки с координатами  $(\alpha, \beta, \varphi)$  на исходной поверхности. Для получения декартовых координат точки на вспомогательной поверхности нужно вновь использовать формулы (18), в которых в данном случае  $\xi(\beta) = z + i\rho = f \operatorname{ch} Z(\beta)$ . Для иллюстрации выбора носителя вспомогательной поверхности предположим, что элементы решетки представляют собой вытянутые сфероиды, при этом поверхность центрального элемента описывается уравнением  $\alpha = \alpha_0$ . Тогда в соответствии с формулой (20) имеем  $Z(\beta) = \alpha_0 - \delta + i\beta$  и  $\alpha_\Sigma = \alpha_0 - \delta$ ,  $\beta_\Sigma = \beta$ . То есть

вспомогательная поверхность  $\Sigma$  также будет сфероидом, лежащим внутри  $S_{00}$  и софокусным с поверхностью центрального элемента.

В случае сплюснутых сфероидальных координат  $\xi(\beta) = f \operatorname{sh} Z(\beta)$ . Приведем также формулы выбора вспомогательной поверхности для случая тороидальных координат. Как известно, тороидальные координаты задаются формулами [31]

$$x = \frac{f \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{f \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{f \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad (21)$$

где уравнение  $S_{00}$  вновь имеет вид  $\alpha = \alpha(\beta)$ , причем  $\beta \in [0, 2\pi]$ . Для нахождения декартовых координат точек вспомогательной поверхности используем формулы (18), в которых

$\xi(\beta) = if \operatorname{cth} \left( \frac{Z(\beta)}{2} \right)$ . В дальнейших формулах будем считать, что поверхность центрального элемента решетки задана в ортогональных координатах  $(\alpha, \beta, \varphi)$  уравнением  $\alpha = \alpha(\beta)$ , где  $\beta \in [0, \beta_{\max}]$  ( $\beta_{\max} = \pi$  или  $\beta_{\max} = 2\pi$ ).

В силу периодичности рассматриваемой структуры и падающего поля задача сводится к определению функции  $J$  только на поверхности  $\Sigma$  центрального элемента решетки. Для нахождения этой функции подставим выражение для волнового поля в виде (10) в граничное условие (5) на поверхности центрального элемента решетки. В результате получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - W_0 \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) J(\mathbf{r}') ds' = \\ = - \left( U^0(\mathbf{r}) - W_0 \frac{\partial U^0(\mathbf{r})}{\partial n} \right), \quad \mathbf{r} \in S_{00}. \end{aligned} \quad (22)$$

Сделаем замену неизвестной функции  $J$  по формуле [14]:

$$I = J h_\varphi h_\Sigma \sqrt{1 + (\dot{\alpha}_\Sigma)^2}. \quad (23)$$

В формуле (23)  $h_\varphi$  и  $h_\Sigma = h_\alpha = h_\beta$  – коэффициенты Ламе соответствующей системы координат в точке с координатами  $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \varphi)$  на вспомогательной поверхности  $\Sigma$ . Точка в формуле (23) означает дифференцирование по  $\beta_\Sigma$ .

Заметим, что первичное поле внутри и вне жидкого слоя имеет вид

$$U^0 = \begin{cases} \left( \exp(-i\gamma_1^0 z) + R_0 \exp(i\gamma_1^0 z) \right) \exp(-ik_1 x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - ik_1 y \sin \theta_0 \sin \varphi_0), & z < -h/2, \\ \left( A \cos(\gamma_2^0 z) + B \sin(\gamma_2^0 z) \right) \exp(-ik_1 x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - ik_1 y \sin \theta_0 \sin \varphi_0), & -h/2 < z < h/2, \\ T_0 \exp(-i\gamma_1^0 z) \exp(-ik_1 x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - ik_1 y \sin \theta_0 \sin \varphi_0), & z > h/2, \end{cases} \quad (24)$$



где  $\gamma_1^0 = k_1 \sin \theta_0$ ,  $\gamma_2^0 = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}$ . В этих формулах коэффициенты отражения  $R_0$ , прохождения  $T_0$  плоской волны от слоя (в отсутствие решетки), а также постоянные  $A$  и  $B$  находятся подстановкой формул (24) в граничные условия при  $z = \pm h/2$  (на границах раздела сред). Выражения для указанных величин не приводятся в данной работе, поскольку они общеизвестны.

### 3. Алгебраизация задачи (два подхода)

Интегральное уравнение (22) можно решать методом коллокации. Для этого заменим поверхностные интегралы в (22) на двойные интегралы по прямоугольнику  $[0, \beta_{\max}] \times [0, 2\pi]$ . Выберем в области интегрирования прямоугольную сетку:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\beta_{\max}}{N} \left( n - \frac{1}{2} \right), \quad n = \overline{1, N}, \\ \varphi_m &= \frac{2\pi}{M} \left( m - \frac{1}{2} \right), \quad m = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее заменим двойные интегралы в формуле (22) суммами Римана. Приравняем полученные равенства в точках коллокации, которые выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{v\mu}^* &= \rho(\alpha(\beta_v), \beta_v) \cos \varphi_\mu, \\ y_{v\mu}^* &= \rho(\alpha(\beta_v), \beta_v) \sin \varphi_\mu, \quad z_{v\mu}^* = z(\alpha(\beta_v), \beta_v). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $v = \overline{1, N}$  и  $\mu = \overline{1, M}$ . В результате перейдем от интегрального уравнения к следующей алгебраической системе относительно неизвестных значений функции  $I$  в точках  $\mathbf{r}_{nm}$  на вспомо-

гательной поверхности центрального элемента решетки:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{nm}^{\nu\mu} c_{nm} = b^{\nu\mu}. \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{nm}^{\nu\mu} &= G(\mathbf{r}_{v\mu}^*, \mathbf{r}_{nm}) - W_0 \frac{\partial G(\mathbf{r}_{v\mu}^*, \mathbf{r}_{nm})}{\partial n}, \\ b^{\nu\mu} &= - \left( U^0(\mathbf{r}_{v\mu}^*) - W_0 \frac{\partial U^0(\mathbf{r}_{v\mu}^*)}{\partial n} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В формуле (28)  $c_{nm} = I(\mathbf{r}_{nm}) \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  – площадь элементарных ячеек, на которые разбивается область интегрирования в уравнении (22). Точки  $\mathbf{r}_{nm}$  (координаты дискретных источников) в (28) выбираются как описано выше.

В соответствии с [14] ФГ  $G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  вычисляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{|p| \leq Q} \sum_{|q| \leq Q} G_0(R_{pq}) \exp(-ip\tau_x - iq\tau_y) + \\ &+ \frac{k_2}{4\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-s}^s (2s+1) \frac{(s-l)!}{(s+l)!} \tilde{W}_{sl} \Psi_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Psi_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j_s(k_2 R) P_s^l(\cos \Theta) \exp(il\Phi), \quad (30)$$

причем  $R, \Theta, \Phi$  – сферические координаты вектора  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $P_s^l(x)$  – присоединенные функции Лежандра,  $j_s(x)$  – сферические функции Бесселя. Величины  $\tilde{W}_{sl}$  выражаются по формуле

$$\tilde{W}_{sl} = W_{sl}^I + W_{sl}^{II} + W_{sl}^{III} + W_{sl}^{IV}, \quad (31)$$

в которой

$$W_{sl}^{I,II} = \frac{i^{s-l}}{\pi k_2^{|l|+1}} \int_0^\infty dw \int_{-\infty}^\infty \tilde{P}_s^l(w/k_2) (i \operatorname{sign}(l) \kappa \pm \chi)^{|l|} \frac{1 - g^{2Q+1} \exp(-iQ_1(d_y \chi \pm \tau_y))}{g^Q (1-g) 1 - \exp(-i(d_y \chi \pm \tau_y))} \frac{d\kappa}{\chi}, \quad (32)$$

$$W_{sl}^{III,IV} = \frac{2i^{s-l}}{k_2^{|l|+1} d_y} \sum_{q=-\infty}^\infty \int_0^\infty \tilde{P}_s^l(w/k_2) (-v_q \pm i \operatorname{sign}(l) \chi_q)^{|l|} \frac{\exp(-iQ_1(d_x \chi_q \pm \tau_x))}{1 - \exp(-i(d_x \chi_q \pm \tau_x))} \frac{dw}{\chi_q}, \quad (33)$$

где  $\chi_q = \sqrt{k_2^2 - v_q^2 - w^2}$ , а знаки «+» и «-» относятся к  $W_{sl}^I, W_{sl}^{III}$  и  $W_{sl}^{II}, W_{sl}^{IV}$  соответственно. В (32) и (33)  $Q_1 = Q+1$  и  $g = \exp(i(\tau_x - wd_x))$ .

Для вычисления добавочной ФГ  $G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  применим формулу суммирования Пуассона. Тогда из (13) имеем

$$\begin{aligned} G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= - \frac{4\pi i}{d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^\infty \sum_{q=-\infty}^\infty \left[ \cos(\Gamma_{pq}(z+z')) + V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq}h) \cos(\Gamma_{pq}(z-z')) \right] \times \\ &\times \frac{V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq}h)}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}} \exp(-iu_p(x-x') - iv_q(y-y')), \end{aligned} \quad (34)$$



где  $\Gamma_{pq} = \sqrt{k_2^2 - u_p^2 - v_q^2}$ ,  $V_{pq} = V(\lambda_{pq})$ ,  $\lambda_{pq} = \sqrt{u_p^2 + v_q^2}$ . Данный ряд сходится с экспоненциальной скоростью за счет убывания величины  $\exp(-i\Gamma_{pq}h)$ .

Рассмотрим альтернативный подход для решения задачи. Будем вновь исходить из уравнения (22). Учтем осевую симметрию элементов решетки. Разложим неизвестную функцию в ряд Фурье:

$$I(\beta', \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\beta') \exp(in\varphi'). \quad (35)$$

ФГ также можно разложить в ряд

$$G(\alpha, \beta, \varphi, \alpha', \beta', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{mn}(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \exp(im\varphi - in\varphi'), \quad (36)$$

где  $\tilde{S}_{mn} = S_{mn}^{\infty} + S_{mn}^l$ , причем

$$S_{mn}^{\infty} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp(-im\varphi + in\varphi') d\varphi d\varphi', \quad (37)$$

$$S_{mn}^l = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp(-im\varphi + in\varphi') d\varphi d\varphi'. \quad (38)$$

$$S_{mn}^{\infty} = \frac{i^{m-n-1}}{2d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_{pq}\rho) J_n(\lambda_{pq}\rho') \exp(-i\Gamma_{pq} |z - z'| + i(n-m)\gamma_{pq}) / \Gamma_{pq}, \quad (41)$$

где  $\rho, z, \rho', z'$  – цилиндрические координаты точки наблюдения и источника,  $J_m(x)$  – функция Бесселя,

Подставим далее формулы (35) и (36) в интегральное уравнение (22). В результате проектирования полученного равенства на базис Фурье получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\beta_{\max}} K_{mn}(\beta, \beta') I_n(\beta') d\beta' = b_m(\beta), \quad (39)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$K_{mn}(\beta, \beta') = 2\pi \left( \tilde{S}_{mn} - W_0 \frac{\partial \tilde{S}_{mn}}{\partial n} \right),$$

$$b_m(\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( U^0 - W_0 \frac{\partial U^0}{\partial n} \right) \exp(-im\varphi) d\varphi. \quad (40)$$

Таким образом, исходная краевая задача сведена к системе одномерных интегральных уравнений (39). Для решения системы (39) применяли метод коллокации, причем точки коллокации выбирали при помощи первой формулы в (25).

Для нахождения величин  $\tilde{S}_{mn}$  использовали два алгоритма [12, 13]. При условии  $k_2 |z - z'| > 1$  ряд (12) функции  $G_{\infty}$  преобразовывали по формуле Пуассона с последующим интегрированием по угловой координате, т. е.

$u_p = \lambda_{pq} \cos \gamma_{pq}$ ,  $v_q = \lambda_{pq} \sin \gamma_{pq}$ . В случае малых значений величины  $k_2 |z - z'|$  применяли формулы

$$S_{mn}^{\infty} = S_m^0 \delta_{mn} + \frac{k_2}{4\pi i} \sum_{s=|m-n|}^{\infty} (2s+1) \frac{(s-m+n)!}{(s+m-n)!} \tilde{W}_{s,m-n}^s F_{mn}^s, \quad (42)$$

где

$$S_m^0 = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ik_2 R)}{R} \exp(-im\psi) d\psi, \quad \psi = \varphi - \varphi', \quad (43)$$

$$F_{mn}^s(\rho, z, \rho', z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{s,m-n}^1(\rho, z, \rho', z', \psi) \exp(-im\psi) d\psi, \quad (44)$$

$$\Psi_{sl}^1(\rho, z, \rho', z', \psi) = j_s(k_2 R) P_s^l(\cos \Theta) \exp(il\Phi_1), \quad \Phi_1 = \Phi - \varphi'. \quad (45)$$

В формуле (42) предполагается, что параметр  $Q = 0$  (см. (32) и (33)). Как видно из формул (43) и (44), величины  $S_{mn}^{\infty}$  выражаются через однократные интегралы по угловой координате. Для вычисления этих интегралов можно применить формулу прямоугольников с последующим нахождением интегральных сумм при помо-

щи алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Коэффициенты Фурье  $S_{mn}^l$  части ФГ, обусловленной наличием слоистой среды, вычисляли только по одному алгоритму, основанному на применении формулы Пуассона с последующим интегрированием по угловой координате. В результате указанных преобразований будем иметь:



$$S_{mn}^l = \frac{i^{m-n-1}}{d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_{pq} \rho) J_n(\lambda_{pq} \rho') \left[ \cos(\Gamma_{pq}(z+z')) + V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq} h) \times \right. \\ \left. \times \cos(\Gamma_{pq}(z-z')) \right] \frac{V_{pq} \exp(-i\Gamma_{pq} h + i(n-m)\gamma_{pq})}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}}. \quad (46)$$

В качестве выходных характеристик задачи рассмотрим амплитуды пространственных гармоник, обусловленных дифракцией на решетке. Для нахождения этих величин преобразуем ФГ решетки при помощи формулы Пуассона и под-

ставим ее в формулу (10). В результате получим представление волнового поля по плоским волнам вида (8) и (9). При этом амплитуды плоских волн, распространяющихся в верхнем и нижнем полупространствах, будут иметь вид

$$A_{pq}^+ = T_0 \delta_{p0} \delta_{q0} - \frac{i}{2d_x d_y \Gamma_{pq}} \left[ g_+(u_p, v_q) + V_{pq} g_-(u_p, v_q) \exp(-i\Gamma_{pq} h) \right] \times \\ \times \frac{\exp(-i\Gamma_{pq} h_1 + i\Gamma_{pq}^1 h_1) (1 + V_{pq})}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}}, \quad (47)$$

$$A_{pq}^- = R_0 \delta_{p0} \delta_{q0} - \frac{i}{2d_x d_y \Gamma_{pq}} \left[ g_-(u_p, v_q) + V_{pq} g_+(u_p, v_q) \exp(-i\Gamma_{pq} h) \right] \times \\ \times \frac{\exp(-i\Gamma_{pq} h_1 + i\Gamma_{pq}^1 h_1) (1 + V_{pq})}{\sigma(\lambda_{pq}) \Gamma_{pq}}. \quad (48)$$

Здесь

$$g_{\pm}(u_p, v_q) = \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_{pq}^{\pm} \mathbf{r}') ds', \quad (49)$$

$h_1 = h/2$  и  $\delta_{pq}$  – символ Кронекера.

#### 4. Результаты расчетов

С целью проиллюстрировать преимущества ММДИ, а также проверить работу этого метода рассмотрим вначале рассеяние плоской волны на одиночном абсолютно мягком суперэллипсоиде вращения, поверхность которого в декартовых координатах задается соотношением

$$\left( \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^{q_s/2} + \left| \frac{z}{b} \right|^{q_s} = 1, \quad (50)$$

где параметр  $q_s$  – четное натуральное число. Геометрия контура осевого сечения суперэллипсоида и вспомогательного контура приведена на рис. 2. Рассматривался вытянутый суперэллипсоид вращения, у которого  $b/a > 1$ . Величина параметра  $b/a$  принимала значения 2, 4, 8, 16, 32 и 64, а остальные параметры  $kb = 4$ ,  $q_s = 16$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\varphi_0 = 0$ . На рис. 2 изображена геометрия контура осевого сечения суперэллипсоида и контура осевого сечения вспомогательной поверхности для  $b/a = 64$  (наихудший в смысле сходимости

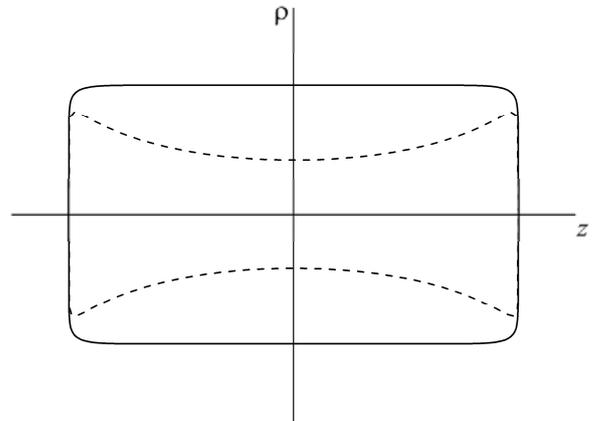


Рис. 2. Осевое сечение суперэллипсоида и вид вспомогательного контура (пунктир)

Fig. 2. Axial section of the superellipsoid and view of the auxiliary contour (dotted line)

случай). На рис. 3, а приведены угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния суперэллипсоида для различных значений отношения  $b/a$ , полученные с использованием ММДИ. Для построения вспомогательной поверхности выбирались вытянутые сфероидальные координаты (см. например, [28]). Значение параметра  $\delta$  выбиралось из условия охвата вспомогательным контуром особенностей продолжения волнового поля внутрь рассеивателя.

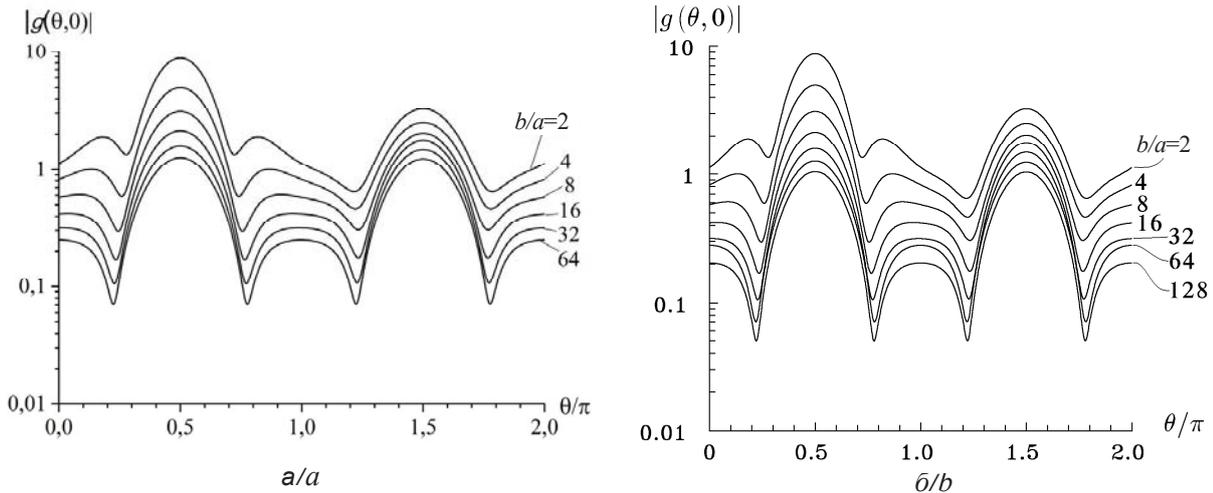


Рис. 3. Угловые зависимости диаграммы рассеяния суперэллипсоида вращения в свободном пространстве: *a* – решение при помощи метода дискретных источников (ММДИ), *b* – решение при помощи метода диаграммных уравнений (МДУ) [32]

Fig. 3. Angular dependences of the pattern of the superellipsoid of revolution in free space: solution by means of the modified method of discrete sources (MMDS) (*a*) and by means of the method of diagram equations (MDE) (*b*)

Данные особенности определяются уравнением [28, 29]

$$\alpha'(\beta) = -i, \quad (51)$$

где  $\alpha(\beta)$  – уравнение контура осевого сечения суперэллипсоида в сфероидальных координатах. Величина  $\delta_{\max}$ , т. е. максимально возможное значение параметра деформации  $\delta$  вспомогательного контура суперэллипсоида, равна мнимой части корня уравнения (51). Соответствующее выражение для параметра  $\delta_{\max}$ , а также способ построения вспомогательного контура описан в работе [29].

Рассматриваемая задача дифракции решалась с учетом осевой симметрии тела, т. е. при помощи разложения неизвестной функции в ряд Фурье по угловой координате. В случае сильно вытянутого тела (при  $b/a = 64$ ) число дискретных источников составляло 250, а максимальный номер гармоники по угловой координате  $N_{\varphi} = 2$ . В случае меньших значений  $b/a$  число источников было меньше 250. Значение параметра  $\delta$  было равно  $\delta = (1 - 10^{-7})\delta_{\max}$  (при  $b/a = 64$ ), т. е. вспомогательный контур был плотно «натянут» на особенности, определяемые уравнением (51). При таком выборе параметров задачи максимальный уровень невязки краевого условия не превосходил  $1.5 \cdot 10^{-3}$  и точность выполнения оптической теоремы составила  $5 \cdot 10^{-9}$ . Отметим, что в работе [32] также рассмотрена дифракция плоской волны на суперэллипсоиде вращения для тех же параметров геометрии рассеивателя. В этой работе краевая задача решалась при помощи метода диаграммных уравнений (МДУ). На

рис. 3, *b* приведены соответствующие зависимости диаграммы рассеяния вытянутого суперэллипсоида, представленные в работе [32]. Из сравнения рис. 3, *a* и 3, *b* следует хорошее совпадение результатов, полученных при применении МДУ и ММДИ. Заметим, что в случае использования МДУ приходится полностью видоизменять весь алгоритм решения задачи при применении сфероидального базиса (вместо сферических гармоник). В то же время при использовании ММДИ базис не меняется при переходе к другим ортогональным координатам. Необходимо лишь использовать другой вспомогательный контур, получаемый при помощи методики, описанной выше.

Рассмотрим далее результаты расчета дифракции плоской волны на решетке, расположенной в жидком слое. Отметим, что в силу большого времени счета характеристик решетки (коэффициентов отражения и прохождения) для сильно деформированных тел будем исследовать дифракцию на решетках, которые состоят из элементов, имеющих гладкую границу, например, на решетке из сфер, сфероидов вращения (с небольшим отношением осей), круговых торов и т.д. При этом для выбора оптимального числа дискретных источников контролировалась невязка граничного условия на поверхности центрального элемента решетки и проводилась проверка выполнения закона сохранения энергии. Как показывают численные эксперименты, значение параметра деформации  $\delta$  вспомогательной поверхности следует выбирать равным  $\delta = 0.5\delta_{\max}$  для указанных форм элементов решетки.



Для того чтобы протестировать разработанные алгоритмы решения задачи дифракции на решетке, сравнивались результаты расчета модулей коэффициентов отражения и прохождения плоской волны, полученные при применении обоих методов. В табл. 1 приведены значения модулей коэффициентов отражения и прохождения плоской волны для нескольких значений волнового параметра  $d/\lambda$ , где  $d = \min(d_x, d_y)$ ,  $\lambda$  – длина волны. Рассматривался случай абсолютно мягких элементов решетки. Во всех приведенных ниже расчетах  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1.5$  и  $\rho_2/\rho_1 = 0.5$ . Результаты, приведенные в табл. 1, относятся к случаю решетки из сфер, причем толщина жидкого слоя  $h$  равнялась малому периоду решетки,  $d_y = 2d_x$ ,

диаметр сфер  $2a = 0.9d_x$ . Плоская волна падала нормально к поверхности слоя. Заметим, что в случае применения первой методики  $N = 30$  и  $M = 55$ , а в случае использования второго подхода число точек коллокации составляло  $N = 30$  и максимальный номер гармоники по угловой координате  $N_\varphi = 9$ . Параметр  $Q$  в случае применения первого метода был равен 5. Таким образом, число неизвестных в первом случае примерно в три раза больше числа неизвестных при применении второго метода. Как видно из таблицы, результаты расчетов отличаются в четвертом знаке после запятой в случае, когда волновой параметр равен  $d/\lambda = 0.7178$ . В остальных случаях разность полученных результатов еще меньше.

Таблица 1 / Table 1

Сравнение коэффициентов отражения и прохождения, полученных двумя методами  
Comparison of the reflection and transmission coefficients obtained by two methods

$d/\lambda$	Первый метод / First method $ A_{00}^- $	Второй метод / Second method $ A_{00}^- $	Первый метод / First method $ A_{00}^+ $	Второй метод / Second method $ A_{00}^+ $
0.5	0.8324232	0.8324232	0.5541403	0.5541403
0.5544	0.8143582	0.8143582	0.4753944	0.4753944
0.6089	0.7407287	0.7407285	0.5590662	0.5590664
0.6633	0.3874374	0.3874343	0.7895191	0.7895201
0.7178	0.07355883	0.07355346	0.2477113	0.2477071
0.7722	0.7351840	0.7351814	0.08407766	0.08407727
0.8267	0.6969352	0.6969334	0.4313189	0.4313190
0.8811	0.5406348	0.5406338	0.4750221	0.4750237
0.9356	0.3993314	0.3993333	0.6684422	0.6684409
0.99	0.5043882	0.5044002	0.6378213	0.6378138

В качестве еще одного теста разработанных методик была проведена проверка выполнения закона сохранения энергии (см. [14]). Толщина жидкого слоя равнялась малому периоду решетки,  $d_y = 2d_x$ , волновой параметр  $d/\lambda = 0.99$ . Рассматривалось нормальное падение плоской волны. Закон сохранения энергии был проверен для задачи дифракции на решетке, состоящей из абсолютно мягких сфер, сплюснутых сфероидов и круговых торов. Параметры геометрии элементов решетки имели значения: диаметр сфер  $2a = 0.9d_x$ , оси сфероидов  $2a = 0.9d_x$ ,  $a/b = 3$  ( $b$  – полуось сфероидов вдоль оси  $z$ ), диаметры тора составляли  $0.9d_x$  – внешний и  $0.3d_x$  – внутренний. Число точек коллокации и максимальный номер гармоники по угловой координате выбирались такими же, как для табл. 1. Параметр  $Q$  в случае применения первого метода был равен 5.

Как видно из табл. 2, в которой приведены результаты расчетов, точность выполнения закона сохранения не превосходит  $10^{-5}$  в случае применения первого подхода и  $5 \cdot 10^{-7}$  в случае использования второго метода.

Как показали вычисления, время счета по первой методике примерно на порядок больше, чем время счета по второму алгоритму. В силу больших временных затрат при использовании первого алгоритма дальнейшие результаты получены при помощи применения второй методики. Важно заметить, что данная методика позволяет получать корректные результаты при больших значениях коэффициента заполнения решетки (т. е. отношения диаметра тела к малому периоду решетки). Для иллюстрации этого на рис. 4 приведена зависимость невязки краевого условия на контуре осевого сечения центрально-



Таблица 2 / Table 2

**Проверка выполнения закона сохранения энергии для разных геометрий элементов решетки**  
**Check of the energy conservation law for different geometries of elements of the lattice**

Форма элемента решетки / Shape of the lattice element	Первый метод / First method			Второй метод / Second method		
	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $	Относительная ошибка выполнения закона сохранения / Relative error of fulfilment of the conservation law	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $	Относительная ошибка выполнения закона сохранения / Relative error of fulfilment of the conservation law
Сфера / Sphere	0.5043882	0.6378213	$5.42 \cdot 10^{-7}$	0.5044002	0.6378136	$4.19 \cdot 10^{-7}$
Сфероид / Spheroid	0.5375950	0.6714867	$9.46 \cdot 10^{-6}$	0.5375466	0.6715329	$1.77 \cdot 10^{-7}$
Тор / Torus	0.5586938	0.6428214	$1.67 \cdot 10^{-7}$	0.5586945	0.6428208	$1.87 \cdot 10^{-7}$

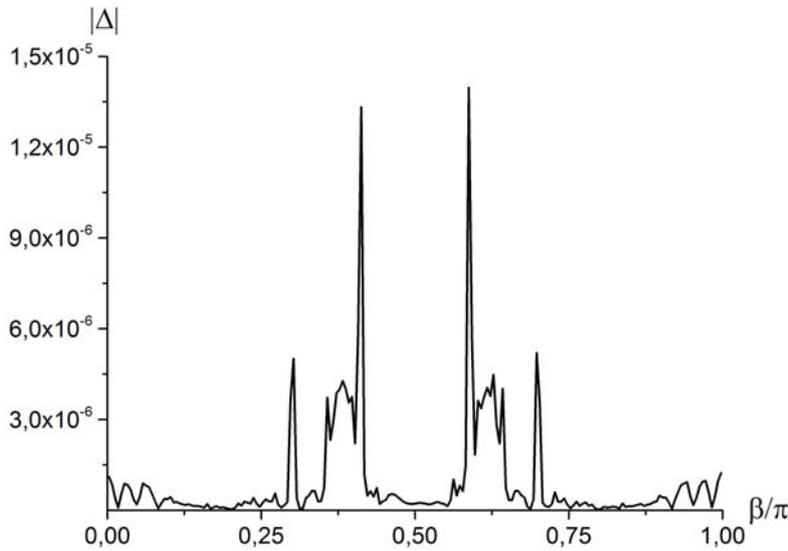


Рис. 4. Распределение невязки краевого условия на контуре осевого сечения центрального элемента решетки из сплюснутых сфероидов. Решение при помощи второй методики

Fig. 4. Distribution of the residual of boundary condition on the contour of axial section of the central element of the lattice consisting of flattened spheroids. Solution by means of the second technique

го элемента решетки, составленной из абсолютно мягких сплюснутых сфероидов с отношением полуосей  $a/b = 3$ . Толщина жидкого слоя равнялась малому периоду решетки,  $d_y = 2d_x$ ,

волновой параметр  $d/\lambda = 0.99$ , диаметр сфероидов  $2a = 0.95d_x$ . Плоская волна падала под углами  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0$ . Невязка вычислялась по формуле

$$|\Delta(\beta, \varphi)| = \left| \sum_{m=-N_\varphi}^{N_\varphi} \left( \sum_{n=-N_\varphi}^{N_\varphi} \int_0^\pi K_{mn}(\beta, \beta') I_n(\beta') d\beta' \right) \exp(im\varphi) - \sum_{m=-N_\varphi}^{N_\varphi} b_m(\beta) \exp(im\varphi) \right|, \quad (52)$$

где  $N_\varphi$  – максимальный номер гармоники по угловой координате. Невязку находили в точках, расположенных на контуре осевого сечения центрального элемента решетки, причем угол  $\varphi = 0$ . Число точек, в которых находили невязку, составляло 200, а число дискретных источников  $N = 30$ . Максимальный номер гармоники по угловой

координате  $N_\varphi = 9$ . Как видно, максимальный уровень невязки не превосходит  $1.5 \cdot 10^{-5}$ , т. е. очень мал. Расчеты показывают, что увеличение числа источников до  $N = 45$  приводит к уровню невязки примерно  $7 \cdot 10^{-6}$ . При этом кривая зависимости невязки становится более «изрезанной».



В табл. 3 приведены значения модуля коэффициента отражения и прохождения решетки для различных значений числа дискретных источников и числа гармоник по угловой координате. Все параметры задачи имели те же значения, что и для рис. 4. Видно, что результаты стабилизируются в третьем десятичном знаке уже при  $N = 15$  (в этом случае  $N_\varphi = 9$  для всех значений  $N$ ) и при  $N_\varphi = 5$  (в этом случае  $N = 30$  для всех  $N_\varphi$ ). Такая быстрая сходимость алгоритма обусловлена достаточной гладкостью границы элементов решетки.

лизируются в третьем десятичном знаке уже при  $N = 15$  (в этом случае  $N_\varphi = 9$  для всех значений  $N$ ) и при  $N_\varphi = 5$  (в этом случае  $N = 30$  для всех  $N_\varphi$ ). Такая быстрая сходимость алгоритма обусловлена достаточной гладкостью границы элементов решетки.

Таблица 3 / Table 3

**Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от числа источников и числа угловых гармоник**  
**Dependence of the reflection and transmission coefficients on the number of discrete sources and the number of angular harmonics**

$N (N_\varphi = 9)$	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $	$N_\varphi (N = 30)$	$ A_{00}^- $	$ A_{00}^+ $
10	0.8991941	0.3239997	1	0.9092310	0.3327952
15	0.9022391	0.3226968	3	0.8795902	0.2998409
20	0.9025314	0.3225247	5	0.9023977	0.3222798
25	0.9025687	0.3225017	7	0.9025746	0.3224953
30	0.9025740	0.3224984	9	0.9025740	0.3224984

Рассмотрим далее поведение коэффициентов отражения и прохождения плоской волны в зависимости от параметра  $d/\lambda$ . На рис. 5, 6 изображены частотные зависимости модуля коэффициента отражения (см. рис. 5) и прохождения (см. рис. 6) плоской волны при дифракции на решетке из сфер (см. рис. 5, а, 6, а), сплюснутых сфероидов (см. рис. 5, б и 6, б) и круговых торов (см. рис. 5, в, 6, в). Рассматривалось нормальное падение плоской волны,  $d_y = 2d_x$ ,  $h = d_y$ . Диаметр сфер составлял  $2a = 0.9d$ , оси сфероидов  $2a = 0.9d$ ,  $a/b = 3$ , диаметры торов составляли  $0.9d$  – внешний и  $0.3d$  – внутренний. Сплошными кривыми на рисунках показаны зависимости коэффициентов отражения и прохождения для нулевого значения импеданса  $W_0$ , а штриховые кривые иллюстрируют зависимости для случая  $W_0 = -0.5i$ . Таким образом, в последнем случае имеется поглощение энергии элементами решетки. Как видно из рисунков, имеются критические значения волнового параметра  $d/\lambda$ , при которых зависимости коэффициентов отражения и прохождения испытывают характерные скачки. Из сравнения приведенных рисунков с результатами работы [14] видно, что при нулевом значении импеданса зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения для решетки, расположенной в слое, имеют существенно более «изрезанный» характер, чем соответствующие зависимости для случая решетки, расположенной в свободном пространстве. Аналогично в случае импедансных краевых условий на поверхности элементов решетки кривые зависимостей коэф-

фициентов отражения и прохождения меняются гораздо более плавно, чем в случае нулевого импеданса (в обоих случаях решетка располагалась внутри слоя). Из рисунков также следует, что в случае абсолютно мягких элементов решетки на низких частотах коэффициент отражения близок по модулю к единице, а коэффициент прохождения близок к нулю в независимости от геометрии элементов решетки. На более высоких частотах имеются отдельные значения параметра  $d/\lambda$ , для которых коэффициент отражения практически равен нулю, а модуль коэффициента прохождения близок к единице.

На рис. 7 изображены зависимости модуля коэффициента отражения (рис. 7, а) и прохождения (рис. 7, б) плоской волны для решеток, составленных из сфер (кривые 1), сплюснутых сфероидов (кривые 2) и решеток из торов (кривые 3), описанных выше размеров. Рассматривались зависимости от коэффициента заполнения решетки  $\tau$  (при этом  $d_y = 2d_x$ ,  $h = d_y$ ). Плоская волна падала нормально. Волновой параметр принимал значение  $d/\lambda = 0.95$ . Импеданс элементов решетки равнялся нулю. Как видно из рисунков, в случае решеток, составленных из сфероидов и круговых торов, зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения близки друг к другу. Для этих геометрий имеется значение коэффициента заполнения, при котором зависимости модуля коэффициента отражения имеют локальный минимум. В случае решетки из сфер зависимости коэффициентов отражения и прохождения имеют осциллирующий характер. Для сравнения были

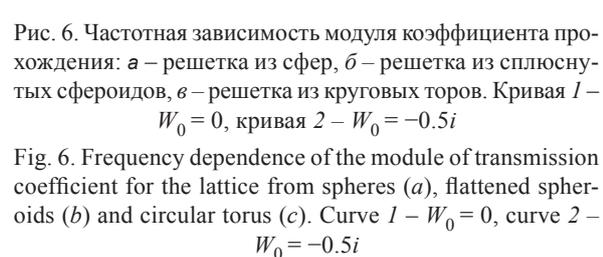
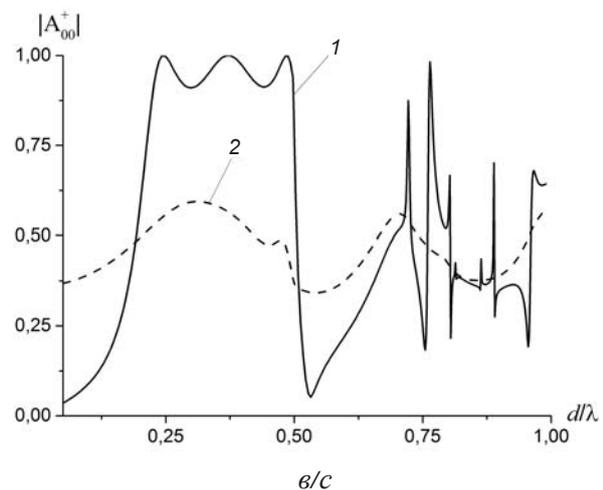
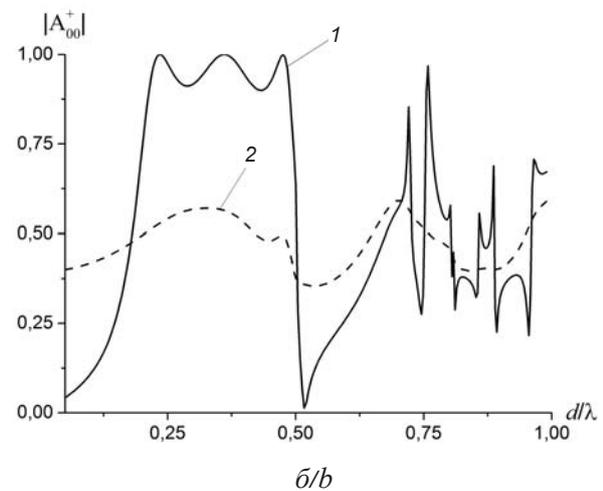
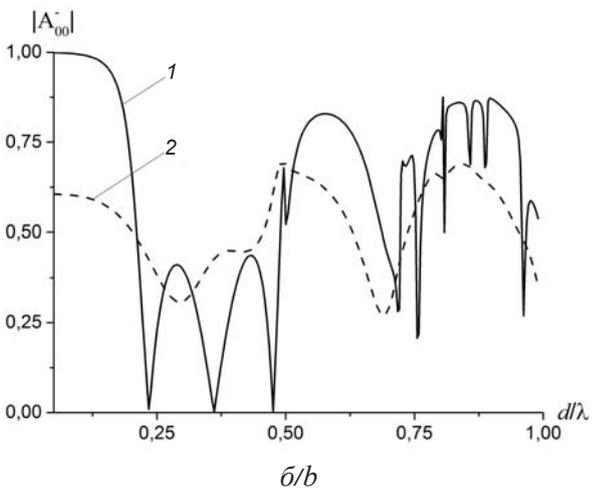
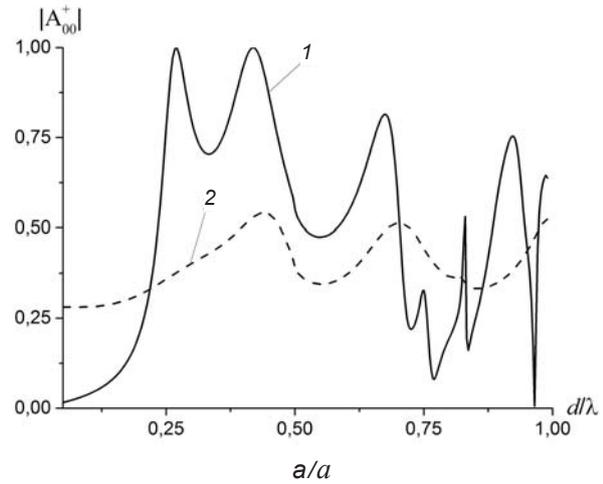
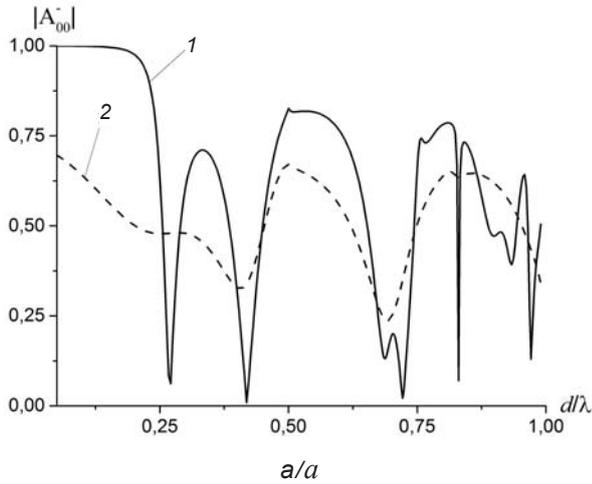


Рис. 5. Частотная зависимость модуля коэффициента отражения:  $a$  – решетка из сфер,  $b$  – решетка из сплюснутых сфероидов,  $v$  – решетка из круговых торус. Кривая 1 –  $W_0 = 0$ , кривая 2 –  $W_0 = -0.5i$

Fig. 5. Frequency dependence of the module of reflection coefficient for the lattice from spheres ( $a$ ), flattened spheroids ( $b$ ) and circular torus ( $c$ ). Curve 1 –  $W_0 = 0$ , curve 2 –  $W_0 = -0.5i$

Рис. 6. Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения:  $a$  – решетка из сфер,  $b$  – решетка из сплюснутых сфероидов,  $v$  – решетка из круговых торус. Кривая 1 –  $W_0 = 0$ , кривая 2 –  $W_0 = -0.5i$

Fig. 6. Frequency dependence of the module of transmission coefficient for the lattice from spheres ( $a$ ), flattened spheroids ( $b$ ) and circular torus ( $c$ ). Curve 1 –  $W_0 = 0$ , curve 2 –  $W_0 = -0.5i$

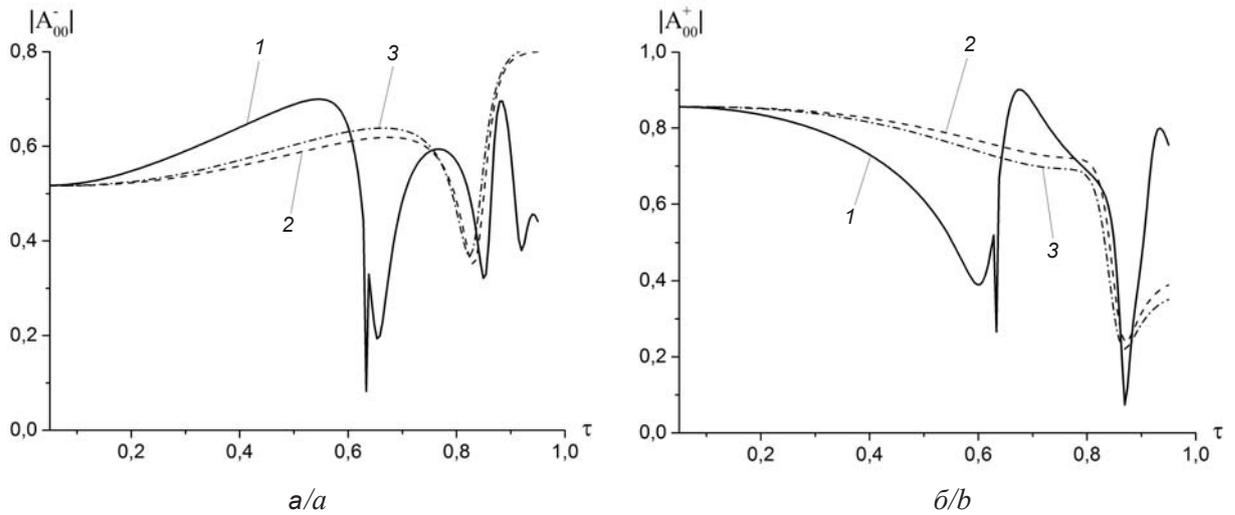


Рис. 7. Зависимость модуля коэффициента отражения ( $a$ ) и коэффициента прохождения ( $b$ ) от коэффициента заполнения решетки. Кривая 1 – решетка из сфер, кривая 2 – решетка из сплюснутых сфероидов, кривая 3 – решетка из круговых торов

Fig. 7. Dependence of the module of reflection coefficient ( $a$ ) and the module of transmission coefficient ( $b$ ) on fillings factor of the lattice. Curve 1 – the lattice from spheres, curve 2 – the lattice from flattened spheroids, curve 3 – the lattice from circular torus

также построены зависимости модуля коэффициента отражения и прохождения решетки от коэффициента заполнения для случая равных периодов решетки. Соответствующие кривые изображены на рис. 8. Все остальные параметры были такие же, как и для рис. 7. Как и следовало ожидать, в случае равных периодов решетки при

больших значениях коэффициента заполнения ( $\tau \geq 0.9$ ) модуль коэффициента отражения близок к единице, а коэффициент прохождения имеет малое значение. Однако в отличие от случая однородной среды имеется «провал» модуля коэффициента отражения в области достаточно больших  $\tau$ .

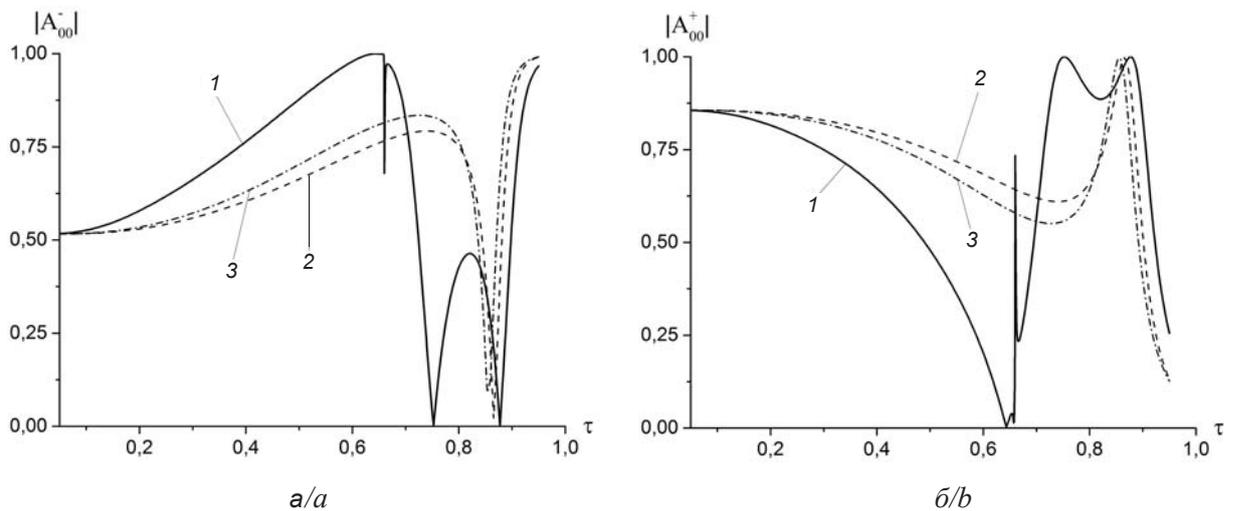


Рис. 8. Зависимость модуля коэффициента отражения ( $a$ ) и коэффициента прохождения ( $b$ ) от коэффициента заполнения решетки. Одинаковые периоды. Кривая 1 – решетка из сфер, кривая 2 – решетка из сплюснутых сфероидов, кривая 3 – решетка из круговых торов

Fig. 8. Dependence of the module of reflection coefficient ( $a$ ) and the module of transmission coefficient ( $b$ ) on filling factor of the lattice. Equal periods. Curve 1 – the lattice from spheres, curve 2 – the lattice from flattened spheroids, curve 3 – the lattice from circular torus



### Заклучение

На основе ММДИ разработаны два подхода для решения трехмерной задачи дифракции плоской волны на решетке, состоящей из тел вращения, которая расположена в жидком слое. В работе выведено интегральное уравнение для импедансного граничного условия на поверхности элементов решетки. Приведен эффективный алгоритм нахождения ФГ решетки. Работа ММДИ проиллюстрирована на примере дифракции плоской волны на одиночном сильно вытянутом суперэллипсоиде вращения. Проиллюстрировано хорошее совпадение результатов расчета диаграммы рассеяния для сильно вытянутого суперэллипсоида вращения, найденной при помощи МДУ и ММДИ.

Показано, что результаты, полученные при применении двух подходов к решению задачи дифракции на решетке, совпадают с удовлетворительной точностью. Для проверки корректности разработанных методик решения задачи дифракции на решетке проведена проверка выполнения закона сохранения энергии. Показано, что в случае абсолютно мягких элементов решетки ошибка выполнения закона сохранения составляет не более чем  $10^{-5}$  в случае использования первого подхода и  $5 \cdot 10^{-7}$  при применении второго метода. Построена зависимость невязки краевого условия на контуре осевого сечения центрального элемента решетки, составленной из сплюснутых сфероидов, в случае решения задачи при помощи второго метода. Показано, что невязка граничного условия не превосходит  $1.5 \cdot 10^{-5}$ . В работе построены зависимости модуля коэффициента отражения и прохождения плоской волны от волнового параметра и коэффициента заполнения для решеток, составленных из сфер, сплюснутых сфероидов и круговых торов. Рассмотрены два вида краевых условий на поверхности элементов решетки: с нулевым импедансом и с ненулевым мнимым импедансом. Последний случай описывает поглощение энергии элементами решетки. Продемонстрировано существенное отличие поведения характеристик рассеяния решетки, расположенной в слое, от поведения этих величин в случае, когда решетка расположена в однородной среде, а также существенное отличие зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от волнового параметра для нулевого и ненулевого значения импеданса. Показано, что в случае решеток, составленных из акустически мягких сплюснутых

сфероидов и круговых торов, имеется значение коэффициента заполнения решетки, при котором модуль коэффициента отражения близок к нулю.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-02-00247, 18-02-00961).

### Список литературы

1. Кобелев Ю. А. Рассеяние плоской звуковой волны сферическими частицами с монопольным типом колебаний, расположенными в узлах плоской безграничной сетки с одинаковыми ячейками // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 1. С. 3–12. DOI: 10.1134/S1063771013060092.
2. Кобелев Ю. А. Многократное рассеяние звуковых волн сферическими частицами с монопольным типом колебаний, расположенными в узлах трехмерной решетки с одинаковыми ячейками // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 4. С. 432–441. DOI: 10.1134/S1063771015030094.
3. Папкова Ю. И. Поле точечного источника в неоднородном гидроакустическом волноводе с плавающим на поверхности телом // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 4. С. 484–489. DOI: 10.1134/S1063771015040077.
4. Кудашева О. А., Севрюгова Н. В. Излучение звука бесконечной периодической решеткой с зазорами // Акуст. журн. 1976. Т. 22, № 3. С. 385–392.
5. Вовк И. В. Излучение звука периодической решеткой из стержневых преобразователей, звукоизолированной с тыльной стороны слоем // Акуст. журн. 1980. Т. 26, № 4. С. 522–527.
6. Вовк И. В. Дифракция звука на решетке из лент конечной прозрачности // Акуст. журн. 1985. Т. 32, № 3. С. 378–381.
7. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с.
8. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288 с.
9. Yasumoto K., Toyama H., Kushta T. Accurate analysis of two-dimensional electromagnetic scattering from multilayered periodic arrays of circular cylinders using lattice sums technique // IEEE Transactions on antennas and propagation. 2004. Vol. 52, № 10. P. 2603–2611. DOI: 10.1109/TAP.2004.834440.
10. Лапин А. Д. Поглощение звука решеткой резонаторов с диссипацией // Акуст. журн. 2002. Т. 48, № 3. С. 428–429.
11. Лапин А. Д., Миронов М. А. Поглощение звука плоской решеткой монопольно-дипольных рассеивателей // Акуст. журн. 2006. Т. 52, № 4. С. 497–501. DOI: 10.1134/S1063771006040087.
12. Маненков С. А. Дифракция плоской электромагнитной волны на трехмерной плоской решетке // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 4. С. 405–414. DOI: 10.1134/S1064226910040029.



13. Маненков С. А. Два подхода к решению задачи дифракции на плоской решетке, состоящей из диэлектрических тел вращения // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, № 8. С. 773–785. DOI: 10.1134/S1064226915080148.
14. Маненков С. А. Решение трехмерной задачи дифракции плоской волны на плоской двупериодической решетке // Акуст. журн. 2016. Т. 62, № 2. С. 143–152. DOI: 10.7868/S0320791916020118.
15. Maurel A., Mercier J.-F., Félix S. Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating // J. Acoust. Soc. Amer. 2014. Vol. 135, iss.1. P. 165–174. DOI: 10.1121/1.4836075.
16. Karimi M., Croaker P., Kessissoglou N. Acoustic scattering for 3D multi-directional periodic structures using the boundary element method // J. Acoust. Soc. Amer. 2017. Vol. 141, iss.1. P. 313–323. DOI: 10.1121/1.4973908.
17. Hassan A. Kalhor, Mohammad Ilyas. Scattering of plane electromagnetic waves by a grating of conducting cylinders embedded in a dielectric slab over a ground plane // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1982. Vol. AP-30, № 4. P. 576–579.
18. Hennion A. C., Bossut R., Decarpigny J. N., Audoly C. Application of the finite element method to analyze the scattering of a plane acoustic wave from doubly periodic structures // Physical acoustics / eds. O. Leroy, M. A. Breazeale. N.Y. : Plenum Press, 1991. P. 359–364.
19. Панин С. Б., Поединчук А. Е. Дифракция электромагнитной волны на решетке со слоем киральной среды // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 8. С. 690–701.
20. Groby J.-P., Duclos A., Dazel O., Boeckx L., Lauriks W. Absorption of a rigid frame porous layer with periodic circular inclusions backed by a periodic grating // J. Acoust. Soc. Amer. 2011. Vol. 129, iss. 5. P. 3035–3046. DOI: 10.1121/1.3561664.
21. Lagarrigue C., Groby J.-P., Tournat V., Dazel O., Umnova O. Absorption of sound by porous layers with embedded periodic arrays of resonant inclusions // J. Acoust. Soc. Amer. 2013. Vol. 134, iss. 6. P. 4670–4680. DOI: 10.1121/1.4824843.
22. Петов И. М., Табатадзе В. А., Заридзе Р. С. Применение метода вспомогательных источников к задачам дифракции электромагнитной волны на некоторых металлodieлектрических структурах // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 5. С. 451. DOI: 10.7868/S0033849413050069.
23. Кюркчан А. Г., Маненков С. А., Негорожина Е. С. Дифракция плоской волны на многорядной решетке, расположенной в диэлектрическом слое // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61, № 3. С. 214–223. DOI: 10.1134/S1064226916030104.
24. Abawi A. T., Krysl P., España A., Kargl S., Williams K., Plotnick D. Modeling the acoustic response of elastic targets in a layered medium using the coupled finite element/boundary element method // J. Acoust. Soc. Amer. 2016. Vol. 140, iss. 4. P. 2968. DOI: 10.1121/1.4969182.
25. Кунрадзе В. О приближенных методах решения задач математической физики // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, № 2. С. 59–107.
26. Кюркчан А. Г., Минаев С. А., Соловейчик А. Л. Модификация метода дискретных источников на основе априорной информации об особенностях дифракционного поля // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 6. С. 666–672.
27. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И. Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М. : Медиа Паблишер, 2014. 226 с.
28. Кюркчан А. Г., Маненков С. А. Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. Vol. 113. P. 2368–2378. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.05.010.
29. Маненков С. А. Новая версия модифицированного метода дискретных источников применительно к задаче дифракции на теле вращения // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 2. С. 129–136. DOI: 10.1134/S1063771014010102.
30. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М. : Наука, 1973. 343 с.
31. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. 798 с.
32. Клеев А. И., Кюркчан А. Г. Использование метода диаграммных уравнений в сферических координатах для решения задач дифракции на сильно вытянутых рассеивателях // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 1. С. 21–29. DOI: 10.1134/S1063771014060104.

#### Образец для цитирования:

Маненков С. А. Два подхода к решению скалярной задачи дифракции на плоской двупериодической решетке из тел вращения, расположенной в жидком слое // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 46–63. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-46-63.

#### Two Approaches to the Solution of the Scalar Problem of Diffraction on the Plane Two-periodic Lattice From Bodies of Revolution Located in the Liquid Layer

S. A. Manenkov

Sergey A. Manenkov, ORCID 0000-0002-7500-460X, Moscow Technical University of Communications and Informatics. 8a, Aviamotornaya Str., Moscow, 111024, Russia, mail44471@mail.ru

**Background, Objectives and Methods:** The problem of diffraction of acoustic waves on the lattices located in the layered media is of great scientific interest in hydroacoustics. There are many methods of the solution of this diffraction problem, such as the method of the surface integral equations, finite element method, boundary element method, etc. One of universal method of solution of diffraction problems is the modified method of discrete sources (MMDS). Earlier this method was applied to the solution of the problems of wave scattering on a single body of revolution, on a group of bodies and on lattices located in free



space. The purpose of this study is to develop the numerical algorithms based on MMDS for solution of the scalar problem of diffraction of acoustic waves on the planar grating consisting of identical impedance bodies of revolution which is immersed in a liquid layer. **Results:** Based on MMDS two techniques of the solution of the scalar three-dimensional problem of diffraction on the planar lattice consisting of identical impedance bodies of revolution located in a liquid layer are developed. The correctness of MMDS is illustrated on the example of diffraction of the plane wave on the single strongly elongated superellipsoid of revolution. Comparison of the results of calculation of the reflection and transmission coefficients for the lattice consisting of spherical elements obtained by means of both techniques offered in the paper is carried out. For validation of MMDS the check of the accuracy of fulfillment of the energy conservation law is executed and the dependence of the residual of the boundary condition on the contour of axial section of the central element of the lattice is plotted. It is shown that the residual has the order  $1.5 \cdot 10^{-5}$  at the chosen model parameters. Frequency dependences for various geometries of the elements of the lattice (for two types of boundary conditions) and dependences of the absolute value of reflection and transmission coefficients on the filling factor of the lattice are obtained. **Conclusion:** There is an essential difference between the behavior of the scattered field under diffraction on the lattices located in homogeneous medium and the behavior of the scattered field under diffraction on the lattices immersed in layered medium. **Key words:** wave diffraction on the lattices located in stratified media, method of discrete sources, analytical continuation of wave fields.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (projects nos. 16-02-00247, 18-02-00961).

## References

1. Kobelev Yu. A. Scattering of a plane sound wave by spherical particles performing monopole oscillations and positioned at the sites of an infinite plane lattice with identical cells. *Acoustical Physics*, 2014, vol. 60, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1134/S1063771013060092.
2. Kobelev Yu. A. Multiple sound wave scattering by spherical particles performing monopole oscillations and located at the sites of a three-dimensional lattice with identical cells. *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, no. 4, pp. 392–401. DOI: 10.1134/S1063771015030094.
3. Papkova Y. I. The field of a point source in an inhomogeneous hydroacoustic waveguide with a body drifting on the surface. *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, no. 4, pp. 440–445. DOI: 10.1134/S1063771015040077.
4. Kudasheva O. A., Sevryugova N. V. Izluchenie zvuka beskonechnoi periodicheskoi reshetkoi s zazorami [Sound radiation an infinite periodic lattice with gaps]. *Akusticheskii Zhurnal*, 1976, vol. 22, no. 3, pp. 385–392 (in Russian).
5. Vovk I. V. Izluchenie zvuka periodicheskoi reshetkoi iz sterzhnevnykh preobrazovatelei, zvukoizolirovannoi s tyl'noi storony sloem [Sound radiation the periodic lattice from rod converters soundproofed from the back by a layer]. *Akusticheskii Zhurnal*, 1980, vol. 26, no. 4, pp. 522–527 (in Russian).
6. Vovk I. V. Difraktsiia zvuka na reshetke iz lent konechnoi prozrachnosti [Diffraction of a sound on a lattice from stripes of finite transparency]. *Akusticheskii Zhurnal*, 1985, vol. 32, no. 3, pp. 378–381 (in Russian).
7. Shestopalov V. P. *Metod zadachi Rimana–Gil'berta v teorii difraktsii i rasprostraneniia elektromagnitnykh voln* [Method of Riman Hylbery problem in theory of diffraction and electromagnetic wave propagation]. Kharkov, Izd-vo Khar'k. un-ta, 1971. 400 p. (in Russian).
8. Shestopalov V. P., Litvinenko L. N., Masalov S. A., Sologub V. G. *Difraktsiia voln na reshetkakh* [Wave diffraction on lattices]. Kharkov, Izd-vo Khar'k. un-ta, 1973. 288 p. (in Russian).
9. Yasumoto K., Toyama H., Kushta T. Accurate analysis of two-dimensional electromagnetic scattering from multilayered periodic arrays of circular cylinders using lattice sums technique. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 2004, vol. 52, iss. 10, pp. 2603–2611. DOI: 10.1109/TAP.2004.834440.
10. Lapin A. D. Pogloshchenie zvuka reshetkoi rezonatorov s dissipatsiei [Absorption of a sound a lattice of resonators with dissipation]. *Akusticheskii Zhurnal*, 2002, vol. 48, no. 3, pp. 428–429 (in Russian).
11. Lapin A. D., Mironov M. A. Sound absorption by a planar array of monopole-dipole scatterers. *Acoustical Physics*, 2006, vol. 52, no.4, pp. 425–428. DOI: 10.1134/S1063771006040087.
12. Manenkov S. A. Diffraction of an electromagnetic wave by a three dimensional planar lattice. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2010, vol. 55, no. 4, pp. 375–384. DOI: 10.1134/S1064226910040029.
13. Manenkov S. A. Two approaches to the solution of the problem of diffraction by a plane grating of dielectric bodies of revolution. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2015, vol. 60, no. 8, pp. 809–821. DOI: 10.1134/S1064226915080148.
14. Manenkov S. A. Solution of the three dimensional problem of plane wave diffraction by a two-period plane grating. *Acoustical Physics*, 2016, vol. 62, no. 2, pp. 133–142. DOI: 10.7868/S0320791916020118.
15. Maurel A., Mercier J.-F., Félix S. Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2014, vol. 135, iss.1, pp. 165–174. DOI: 10.1121/1.4836075.
16. Karimi M., Croaker P., Kessissoglou N. Acoustic scattering for 3D multi-directional periodic structures using the boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2017, vol. 141, iss.1, pp. 313–323. DOI: 10.1121/1.4973908.
17. Hassan A. Kalhor, Mohammad Ilyas. Scattering of plane electromagnetic waves by a grating of conducting cylinders embedded in a dielectric slab over a ground plane. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 1982, vol. AP-30, no. 4, pp. 576–579.
18. Hennion A. C., Bossut R., Decarpigny J. N., Audoly C. Application of the finite element method to analyze the scattering of a plane acoustic wave from doubly periodic structures. *Physical acoustics*. Eds. O. Leroy, M. A. Breazeale. New York, Plenum Press, 1991. P. 359–364.
19. Panin S. B., Poyedinchuk A. Ye. Electromagnetic-wave diffraction by a grating with a chiral layer. *Izv. Vuzov. Radiophysics and Quantum Electronics*, 2002, vol. 45, no. 8, pp. 629–639.



20. Groby J.-P., Duclos A., Dazel O., Boeckx L., Lauriks W. Absorption of a rigid frame porous layer with periodic circular inclusions backed by a periodic grating. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2011, vol. 129, iss. 5, pp. 3035–3046. DOI: 10.1121/1.3561664.
21. Lagarrigue C., Groby J.-P., Tournat V., Dazel O., Umnova O. Absorption of sound by porous layers with embedded periodic arrays of resonant inclusions. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2013, vol. 134, iss. 6, pp. 4670–4680. DOI: 10.1121/1.4824843.
22. Petoev I. M., Tabatadze V. A., Zaridze R. S. Application of the method of auxiliary sources to the problems of diffraction of electromagnetic wave on some metal-dielectric structures. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2013, vol. 58, no. 5, pp. 404–416. DOI: 10.7868/S0033849413050069.
23. Kurkchan A. G., Manenkov S. A., Negorozhina E. S. Diffraction of a plane wave by a multiseriate lattice located in a dielectric layer. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2016, vol. 61, no. 3, pp. 224–233. DOI: 10.1134/S1064226916030104.
24. Abawi A. T., Krysl P., España A., Kargl S., Williams K., Plotnick D. Modeling the acoustic response of elastic targets in a layered medium using the coupled finite element/boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2016, vol. 140, iss. 4, pp. 2968–2977. DOI: 10.1121/1.4969182.
25. Kupradze V. O priblizhennykh metodakh resheniia zadach matematicheskoi fiziki [About approximate methods of the solution of problems of mathematical physics]. *Uspekhi mat. nauk*, 1967, vol. 22, no. 2, pp. 59–107 (in Russian).
26. Kurkchan A. G., Minaev S. A., Soloveichik A. L. A modification of the method of discrete sources based on prior information about the singularities of the diffracted field. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2001, vol. 46, no. 6, pp. 615–621.
27. Kyurkchan A. G., Smirnova N. I. *Mathematical modeling in diffraction theory based on a priori information on the analytic properties of the solution*. Amsterdam, Elsevier, 2015. 268 p.
28. Kyurkchan A. G., Manenkov S. A. Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2012, vol. 113, pp. 2368–2378. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.05.010.
29. Manenkov S. A. A new version of the modified method of discrete sources in application to the problem of diffraction by a body of revolution. *Acoustical Physics*, 2014, vol. 60, no. 2, pp. 127–133. DOI: 10.1134/S1063771014010102.
30. Brekhovskikh L. M. *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered media]. Moscow, Nauka, 1973. 343 p. (in Russian).
31. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Izd-vo Mosk. un-ta, 1999. 798 p. (in Russian).
32. Kleev A. I., Kyurkchan A. G. Application of the pattern equation method in spheroidal coordinates to solving diffraction problems with highly prolate scatterers. *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, no. 1, pp. 19–27. DOI: 10.1134/S1063771014060104.

---

**Cite this article as:**

Manenkov S. A. Two Approaches to the Solution of the Scalar Problem of Diffraction on the Plane Two-periodic Lattice From Bodies of Revolution Located in the Liquid Layer. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 46–63 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-46-63.

---



## ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

УДК 001.8

### ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА (1917–1945)

**В. М. Аникин**

Аникин Валерий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, декан, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, AnikinVM@info.sgu.ru

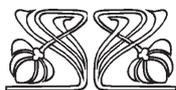
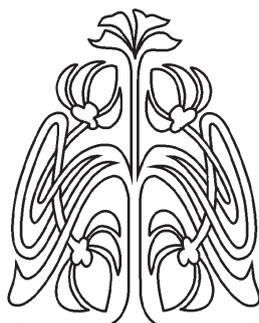
В статье систематизированы исторические сведения об открытии в 1917 г. и последующем развитии в 1917–1945 гг. физико-математического факультета Саратовского университета. Первым деканом физико-математического факультета 5 сентября 1917 г. был избран профессор В. Д. Зёрнов, магистр физики, ученик пользовавшегося мировой славой профессора Московского университета Петра Николаевича Лебедева. И в дальнейшем развитие факультета проходило при участии крупных отечественных ученых. При написании статьи использованы протоколы заседаний Совета Императорского Николаевского Саратовского университета 1916 г., разнообразные исторические и биографические материалы, семейные архивы, фотографии 1918 и 1936 г., характеризующие деятельность физико-математического факультета. В 1945 г. факультет был разделен на физический и механико-математический факультеты.

**Ключевые слова:** Саратовский университет, физико-математический факультет, физический факультет, механико-математический факультет.

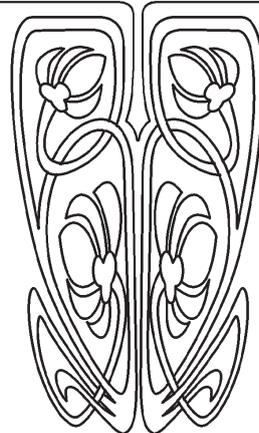
DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-64-79

#### Введение

Открытие физико-математического факультета Саратовского (Императорского Николаевского) университета пришлось на бурный 1917 год. На развитии факультета, естественно, не могли не отразиться перемены в общественной жизни страны, которые происходили и во все последующие годы. Систематическое изложение истории университета с момента его основания в 1909 г. содержится в юбилейных изданиях различных лет [1–7]. Воспоминания о деятельности Саратовской городской думы по учреждению и развитию университета представлены в книге [8]. Историческая летопись университета через биографии и деятельность возглавлявших его ректоров на фоне общественно-политической ситуации в стране дана в [9]. В [10] представлены биографии профессоров Саратовского университета, удостоенных званий академиков и членов-корреспондентов отечественной Академии наук. Особый интерес представляют воспоминания очевидца и активного творца университетской истории в 1909–1921 гг. Владимира Дмитриевича Зёрнова, профессора, заведующего кафедрой физики и Физического института (с 1909 г.), декана физико-математического факультета (1917–1918 гг.) и ректора Саратовского университета (1918–1921 гг.) [11].



**ПРИЛОЖЕНИЯ**





В данной публикации рассмотрены некоторые составляющие деятельности университета по открытию физико-математического факультета и обеспечению его работы в последующие годы (1917–1945). В дополнение к названным источникам использованы протоколы заседаний Совета университета 1916 г. [12] и разнообразные биографические материалы, включая семейные архивы.

#### **Университетский Совет в «борьбе» за новый факультет**

В сентябре 1917 г. в Саратовском университете, основанном в 1909 г. в составе одного – медицинского – факультета, начались занятия на трех новых факультетах – физико-математическом, историко-филологическом и юридическом. Открытие новых факультетов предусматривалось изначально в «Законе об утверждении Университета в городе Саратове», который был одобрен Государственным Советом и Государственной Думой и «освящен» 10 июня 1909 г. визой Императора Николая II «Быть по сему» на тексте закона, а также в Объяснительной записке Министерства народного просвещения, приложенной к законопроекту «Об основании Университета в г. Саратове и об отпуске средств на этот предмет». Если в тексте Закона использован лишь неконкретный оборот: «... пока Саратовский Университет будет находиться в составе одного медицинского факультета...», то в Объяснительной записке назывались сроки открытия новых факультетов (в течение 5 лет) и их названия. При этом при строительстве корпусов университета приоритет отдавался физико-математическому факультету «как наиболее близкому к медицинскому» [1, с. 248].

Этот приоритет был выдержан, и в 1913 г. завершилось сооружение корпуса Физического института, в котором разместилась кафедра физики во главе с Владимиром Дмитриевичем Зёрновым<sup>1</sup>, одним из профессоров-основателей университета, магистром физики, учеником пользовавшегося мировым признанием Петра Николаевича Лебедева, профессора Московского университета, члена-корреспондента Императорской Санкт-Петербургской академии наук (Петербургской АН). Зёрнов проявил себя талантливым организатором [8, 9]. Пользуясь

<sup>1</sup> На здании III учебного корпуса Саратовского университета установлена памятная доска в честь В. Д. Зёрнова. Кафедра медицинской и биологической физики Саратовского государственного медицинского университета носит его имя.

совета своего великого наставника, он оснастил Физический институт учебным и научным оборудованием (Коллекция физических приборов была создана в 1912 г.), приобрел библиотеку учебной и научной литературы по физике у члена-корреспондента Петербургской АН О. Д. Хвольсона (1910), сформировал первый преподавательский состав из представителей научной школы П. Н. Лебедева, в который входили: ассистент Николай Павлович Неклепаев; лаборант (с 1912 г.), старший ассистент (с 1914 г.) Владимир Ефимович Сребницкий; лекционный помощник, лаборант (с 1909 г.), препаратор (с 1913 г.) Иван Максимович Серебряков. Привез из Москвы Зёрнов и искусного механика Федора Федосеевича Троицкого, многие десятилетия проработавшего затем на кафедре физики. Собственно, и первой лекцией, прозвучавшей в стенах Саратовского университета, была лекция по физике, которую 23 сентября 1909 г. прочитал В. Д. Зёрнов.

В дореволюционный период факультетского расширения университета не произошло. Об усилиях его руководства по открытию новых факультетов можно узнать из протоколов заседания Совета Саратовского университета за 1916 год, опубликованных в томе VIII журнала «Известия Саратовского университета» [12]<sup>2</sup>.

Первый ректор университета Василий Иванович Разумовский дважды – в 2011 и 2012 гг. – лично представлял в министерство народного просвещения предложения об открытии физико-математического факультета в Саратовском университете с подробными сметами. Оба раза эти ходатайства были отклонены министром Л. А. Кассо по следующим мотивам [12, с. 21]: «1) недостаток ученых сил в России, 2) недостаток помещений в Саратовском университете и 3) невыполнение г. Саратовом обещания внести

<sup>2</sup> Этот выпуск журнала печатался в 1917 г. и отражал свершившиеся политические события года. Так, в «Официальной отделе» помещены: «Акт об отречении Государя Императора Николая II от престола Государства Российского в пользу Великого Князя Михаила Александровича», «Акт об отказе Великого Князя Михаила Александровича от восприятия верховной власти и о признании им всей полноты власти за Временным Правительством, возникшим по почину Государственной думы», воззвание «От Исполнительного Комитета Государственной Думы», воззвание «От Временного Правительства», «Радиотелеграмма Временного Правительства за границу».

Раздел журнала «Университетская летопись» содержал, в частности, «Отчет о состоянии и деятельности Саратовского университета за 1916 год» и «Протоколы заседаний Совета за январь – март 1916 года». В «Научном отделе» журнала представлены научные труды профессоров университета. Нумерация страниц внутри каждого отдела журнала была самостоятельной.



в Государственное Казначейство 1 000 000 руб. в возмещение расходов по сооружению Саратовского университета».

Комиссию Совета университета по открытию физико-математического факультета возглавлял профессор Николай Григорьевич Стадницкий. Будучи исполняющим обязанности ректора, он в 1913 г. отправил новое ходатайство об открытии физико-математического факультета через Попечителя Казанского учебного округа<sup>3</sup>, которое, как выяснилось «из отношения г. Попечителя учебного округа от 21 августа 1913 года, за № 19386, не было доведено до сведения Министерства Народного Просвещения» [12, с. 21].

В начале 1916 г., когда министерством народного просвещения руководил граф Павел Николаевич Игнатъев, «горячее сочувствие» идее открытия факультета проявил товарищ министра Владимир Тимофеевич Шевяков, член-корреспондент Петербургской АН. Вероятно, положительно сказалось и то обстоятельство, что Саратовский университет успешно справился с размещением на своих площадях факультетов Императорского университета Св. Владимира, переведенного из Киева в Саратов на время войны<sup>4</sup>. Профессора Киевского университета: физик Георгий Георгиевич Де-Метц<sup>5</sup>, математик Дмитрий Александрович Граве<sup>6</sup> и математик и механик Александр Петрович Котельников<sup>7</sup> – являлись крупными учеными. Они активно ра-

ботали в комиссии по расширению Саратовского университета и, безусловно, внесли свою лепту в положительное решение вопроса.

В процессе обсуждения проблемы открытия новых факультетов на Совете Саратовского университета (к тому времени ректорский пост занял профессор Петр Павлович Заболотнов) были высказаны различные соображения, которые могли бы способствовать преодолению министерского «вето».

Профессор В. И. Разумовский предлагал решать вопрос поочередно, то есть в зависимости от уровня готовности будущего факультета осуществлять образовательную деятельность, ранжируя факультеты в таком порядке.

Здесь вне конкуренции был физико-математический факультет, так как значительная материальная и кадровая база для него уже имелась. Необходимо отметить, что при этом термин «физико-математический факультет» понимался в достаточно широком смысле – скорее как «естественнонаучный факультет». В его состав, во-первых, передавались кафедры, существовавшие при медицинском факультете (физики, химии, минералогии с геологией, ботаники, зоологии), и, во-вторых, включались новые кафедры физического и математического профилей [1, с. 84].

В пользу же открытия историко-филологического факультета на заседании Совета ставилось наличие действующей Саратовской ученой архивной комиссии и большой библиотеки, поступившей в дар от профессора Санкт-Петербургского университета, почетного профессора Саратовского университета Ильи Александровича Шляпкина (1858–1918)<sup>8</sup>.

Профессор Г. Г. Де-Метц в своем выступлении подчеркнул благоприятность момента для обращения в Министерство: «В начале января мне по своим делам пришлось быть в Министерстве, и г. Товарищ Министра В. Т. Шевяков сам поднял вопрос об открытии физико-математического факультета при Николаевском Университете. При этом выяснилось, что Министерство не встретит препятствий к открытию названного факультета, если он разместится временно в существующих уже зданиях, т. к. у Министерства на новые постройки средств не имеется» [12, с. 22].

Профессор В. Д. Зёрнов отметил, что «когда идет реорганизация преподавания в средних учеб-

<sup>3</sup> Пост Попечителя Казанского учебного округа в 1912–1914 гг. занимал профессор-медик Н. К. Кульчицкий.

<sup>4</sup> Киевский университет был переведен в Саратовский университет с 1 сентября 1915 г. в составе 2700 студентов и 60 профессоров физико-математического, историко-филологического и юридического факультетов. Занятия для них начались 20 октября 1915 г. В Киев студенты начали возвращаться в августе 1916 г. [1, с. 219–221].

<sup>5</sup> Георгий Георгиевич Де-Метц (1861–1947) – российский и советский физик, доктор физики (1891), ординарный профессор (1913), декан физико-математического факультета (1913–1917) и ректор киевского Императорского университета Св. Владимира (1917), один из организаторов и ректор Киевского политехнического института (1919), ректор Кубанского государственного университета (1921).

<sup>6</sup> Дмитрий Александрович Граве (1863–1939) – российский и советский математик, создатель крупной математической школы, почётный член АН СССР (1929). Автор учебников по математике.

<sup>7</sup> Александр Петрович Котельников (1865–1944) – российский и советский математик и механик, профессор, доктор технических наук, лауреат Сталинской премии (1943). Автор работ в области гидродинамики, теоретической механики (в евклидовом и неевклидовом пространствах), теории механизмов. Его сын Владимир Александрович Котельников (1908–2005) – академик, дважды Герой Социалистического Труда, выдающийся ученый в области радиотехники, радиотехники, электроники, информатики, радиоастрономии и криптографии.

<sup>8</sup> Свою библиотеку завещал Саратовскому университету и бывший генерал-губернатор Саратовской губернии (в 1870 – 1879 гг.) Михаил Николаевич Галкин-Враской (Галкин-Врасский) (1834–1916).



ных заведениях<sup>9</sup> и потребуются значительно большее число преподавателей, которых не хватает и сейчас, необходимость расширения Императорского Николаевского университета чувствуется еще острее... Мы располагаем новыми зданиями Университета, в части которых разместились три факультета Университета Св. Владимира. После возвращения Университета Св. Владимира в Киев в той же части помещений временно могут разместиться учебно-вспомогательные учреждения физико-математического факультета. Таким образом, возражение Министерства, касающееся помещений, отпадает» [12, с. 21–22]. Кроме того, В. Д. Зёрнов обратил внимание на необходимость перемещения из Физического института находившейся там университетской библиотеки в специальное здание (решение этого вопроса было передано на обсуждении библиотечной комиссии Совета).

Профессор Д. А. Граве предлагал решение «кадровой проблемы», которое может показаться интересным и сегодня при проведении преподавательских рейтингов: «Недостаток лиц, могущих вести преподавание в Университетах, есть явление кажущееся. Если Министерство будет настаивать на необходимости для профессора известной марки – степени, то не только нельзя будет открыть ни одного высшего учебного заведения, но и существующие придут в полное запустение. Профессором может быть тот, кто имеет работы, кто действительно может научить студентов, а получение или неполучение степени во многих случаях дело случайное, чисто с наукой ничего общего не имеющее» [12, с. 22]. Профессор А. П. Котельников также считал, что «Министерство найдет достаточное число преподавателей»:

<sup>9</sup> В [15] подчеркивается, что министр народного просвещения Павел Николаевич Игнатьев (1870–1945) «начал подлинную революцию в российском образовании. Предложенная им концепция масштабной образовательной реформы нашла полную поддержку не только в изданиях самого *Министерства народного просвещения* (МНП), но и в журналах, издававшихся как *Императорским русским техническим обществом* (ИРТО), так и отдельными учебными заведениями.

Директор Московского промышленного училища К. Ю. Зограф восклицал: «С тех пор, как во главе Министерства народного просвещения встал граф П. Н. Игнатьев, у Чернышева моста открылся родник живой воды». А профессора Императорского Московского технического училища говорили: «В лице графа Игнатьева Россия впервые увидела министра просвещения, поставившего на первый план самодовлеющую цель – развитие национальных духовных сил». И хотя многим положениям этой реформы не суждено было реализоваться в жизни, знакомство с ними полезно современному читателю, интересующемуся становлением российского образования».

«если нет докторов, то найдутся магистры, если не хватит магистров, можно поручить преподавание и магистрантам, которые на это имеют право» [12, с. 22].

Одновременно профессор Д. А. Граве утверждал: «Я считаю, что нам и теперь во время войны не мешает учиться у наших хитрых и сильных врагов. В Германии имеется 29 университетов и перед войной и даже во время войны открыто еще четыре новых университета. Вот одна из причин стойкости нашего врага. Если мы хотим быть сильны, нам для России нужно 50 университетов, и я полагаю, что мы должны ходатайствовать не об одном физико-математическом факультете, а о немедленном открытии всех факультетов при Николаевском Университете» [12, с. 23]. Эта точка зрения была поддержана в Совете профессором В. А. Павловым.

Совет Университета 15 февраля 1916 г. утвердил итоговое резюме Комиссии по открытию физико-математического факультета, в котором, в частности, говорилось [12, с. 25]:

«Принимая во внимание своеобразные особенности Юго-Востока России, малоизученные в геологическом, метеорологическом, биологическом, географическом и других отношениях, а вместе с тем и настоятельную нужду в постоянных научных работах для систематического исследования края, наконец, имея в виду настоятельную необходимость в приготовлении преподавательского персонала для средних школ, в коем всюду ощущается постоянный недостаток, открытие физико-математического факультета должно осуществиться в самое ближайшее время».

До постройки дополнительных зданий предполагалось размещение новых «учебно-вспомогательных учреждений» в существующих зданиях университета [12, с. 25]:

«1) Кабинет чистой математики; 2) Кабинет механики; 3) Кабинет астрономии; 4) Физика с физической географией – в здании Физического Института; 5) Химия (неорганическая, физическая, аналитическая и органическая) в здании бывшей Фельдшерской школы<sup>10</sup>; 6) Минералогия – в двух комнатах II и III этажей Института нормальной анатомии; 7) Зоология – в шести комнатах и зале III этажа I корпуса (гигиеническая лаборатория); 8) Ботаника – в восточной половине III этажа I корпуса (гистологическая лаборатория); 9) Геология – в одном из этажей левого крыла Анато-

<sup>10</sup> Требовалось продление истекавшего в июне 1916 г. срока аренды здания бывшей Фельдшерской школы – главного здания, отведенного в 1909 г. городом под университет.



мического Института; 10) Агрономия – в части помещения физиологической лаборатории; 11) Техническая химия – в четырех комнатах II этажа II здания (лаборатория медицинской химии); 12) География – в здании Физического Института».

Интересно отметить, что активные самостоятельные шаги по расширению университета параллельно с его руководством предпринимал городской голова Михаил Федорович Волков [8].

### Открытие факультета

Словом, в начале 1916 г. профессура Саратовского университета, несмотря на военное время<sup>11</sup>, оптимистично смотрела на возможность его обогащения новыми факультетами. Были даже составлены сметы для физико-математического факультета на несколько лет вперед, начиная с учебного 1916/17 года! В середине мая 1916 г. университет посетили Товарищ Министра народного просвещения В. Т. Шевяков и вице-директор департамента народного просвещения Н. О. Палечек<sup>12</sup>. По результатам их поездки 21 июня 1916 г. Совет министров России одобрил предложение Министра народного просвещения П. Н. Игнатъева об открытии в Саратовском университете новых факультетов [1, с. 221].

Однако, как всегда, «жизнь внесла свои коррективы». Очередь до обновления Саратовского университета наступила через год. 1 июля 1917 г. Временное правительство первого состава, в котором Министром народного просвещения был бывший ректор Московского университета профессор Александр Аполлонович Мануйлов, утвердило открытие в Саратовском университете сразу трех новых факультетов – физико-математического, историко-филологического и юридического. На физико-математическом факультете были выделены физико-математическое (математическое) и естественное отделения.

### «Кадры решают всё»

5 сентября 1917 г. первым деканом физико-математического факультета был избран Владимир Дмитриевич Зёрнов. Хорошо зная московскую

научную среду, он развил активную деятельность по подбору преподавателей, и в качестве профессоров нового факультета были приглашены люди, отметившиеся яркими достижениями в науке.

Вот как вспоминал о времени зарождения физико-математического факультета непосредственный участник этих событий В. Д. Зёрнов [11, с. 215, 216]:

*«... С осени 1917 года новые факультеты были открыты. Так как кафедры физико-математического факультета уже отчасти были налицо, нам было разрешено выбрать декана и секретаря факультета из своей среды.*

*В то время имелись следующие кафедры: физики (ею заведовал я), химии (Р. Ф. Холлман), зоологии (Б. И. Бируков), ботаники (Д. Э. Янишевский).*

*<...> Деканом был выбран я, секретарем факультета – Р. Ф. Холлман. Не хватало пока что профессоров математики, механики, второго физика (на кафедру теоретической физики), метеорологии; имелся только один профессор химии, а надо было ещё и органика. Я начал переписку по поводу приглашения математиков с моим бывшим учителем профессором Московского университета Д. Ф. Егоровым, который в то время являлся самым крупным математиком в Москве. Он порекомендовал нам прекрасных математиков – В. В. Голубева и И. И. Привалова. Они приехали в Саратов к началу второго семестра. Когда новые профессора начали читать, все сразу же по заслугам оценили прекрасных учёных и лекторов. После они сами привлекли на факультет Г. Н. Свешникова, тоже очень талантливого математика».*

Владимир Васильевич Голубев стал заведовать кафедрой чистой математики. В 1918–1919 гг. он в связи с избранием В. Д. Зёрнова ректором университета выполнял обязанности декана физико-математического факультета, а в 1921–1922 гг. сменил Зёрнова уже на ректорском посту. В Москву Голубев возвратился в 1930 г., работал в московских вузах, стал членом-корреспондентом АН СССР (1934) [11, 16].

В 1918–1921 гг. на физико-математическом факультете работал глубокий московский математик Иван Иванович Привалов, представитель московской математической школы Д. Ф. Егорова, ставший впоследствии автором классических математических учебников, членом-корреспондентом АН СССР (1939). Свою первую фундаментальную работу «Интеграл Коши» Привалов опубликовал в 1918 г. в «Известиях Саратовского университета».

Блестящий московский физик Сергей Анатольевич Богуславский жил в Саратове в 1918–

<sup>11</sup> С. Р. Миротворцев, А. Б. Арапов и Н. В. Копылов отсутствовали на заседаниях Совета университета «по случаю нахождения на театре военных действий».

<sup>12</sup> Николай Осипович Палечек (1878–1937) при Министре просвещения А. Н. Шварце заведовал вопросами учёных учреждений и высших учебных заведений; при министре просвещения Л. А. Кассо – финансово-хозяйственной деятельностью министерства. По поручению министра П. Н. Игнатъева изучал вопросы об образовании новых факультетов в Саратовском и Томском университетах и об открытии Пермского университета.



1921 г., возглавляя Саратовское общество естествоиспытателей и совмещая (с 1919 г.) посты профессоров Саратовского и Московского университетов. В. Д. Зёрнов так вспоминал приезд Богуславского в Саратов [11, с. 223]:

*«Когда мы жили в институте, в Саратове появилась Сергей Анатольевич Богуславский, которого я пригласил на кафедру теоретической физики, он же читал вначале и теоретическую механику. Для Саратовского университета это было большое приобретение. Сергей Анатольевич был человеком с заграничным образованием. Он докторировался в Гёттингене и, возвратясь в Россию уже во время войны, защитил в Петрограде магистерскую диссертацию. <...> Я был ему очень рад. И для факультета он был необходим, и мне понравился его вид и его европейские повадки.*

*Вначале Сергей Анатольевич появился в Саратове совершенно один, и о нём приходилось заботиться: к практической жизни, в особенности в наступивших революционных условиях, он был мало приспособлен. Потом в Саратов приехала мать Богуславского, а еще позднее и его сестра Елена Анатольевна<sup>13</sup>».*

Николай Николаевич Андреев, сотрудник П. Н. Лебедева, специалист по акустике, будущий академик Академии наук СССР (1953), Герой Социалистического Труда (1970), в 1918–1919 гг. принял преподавательскую эстафету у Богуславского, заняв должность профессора теоретической и прикладной механики Саратовского университета<sup>14</sup>. Зёрнов так описывал эпизод с преподаванием этой дисциплины [11, с. 223]:

*«Найти профессора механики было очень трудно, и этот предмет читал то один, то другой. Появился Н. Н. Андреев и просил дать ему работу, так как он на значительный срок застрял в Саратове. Андреев пробыл в Омск, где находилась его семья, но перебраться через линию фронта и*

<sup>13</sup> Небезынтересный жизненный сюжет на тему «Мир тесен». В 1929 г. В. Д. Зёрнов с семьей совершал путешествие по Крыму. С жильем ему помог Андрей Владимирович Щегляев, племянник Е. А. Богуславской и муж детской писательницы Агнии Барто. Отец А. В. Щегляева, профессор Владимир Сергеевич Щегляев (1857—1919), в свое время, как предполагают, посоветовал студенту Императорского Высшего технического училища Петру Лебедеву продолжить образование в Страсбургском университете у европейского светила – профессора А. Кундта. Что же касается А. В. Щегляева (1902–1970), то он стал крупным специалистом в области теплоэнергетики, профессором Московского энергетического института, членом-корреспондентом Академии наук СССР.

<sup>14</sup> В 1937 г. положительный отзыв Н. Н. Андреева на научные работы В. Д. Зёрнова способствовал присуждению тому без защиты ученой степени доктора физико-математических наук [11, с. 13].

*попасть в Сибирь, занятую Колчаком, оказалось весьма трудным делом, и Андреев решил переждать в Саратове и взялся читать механику, но не по Жуковскому, а в векторном изложении. Такого курса механики у меня не было, но Андреев заверил, что готов читать его по памяти. <...> Позже, когда я был уже в Москве, механику в Саратовском университете читал Г. Н. Свешников».*

Георгий Николаевич Свешников заведовал кафедрой механики Саратовского университета с 1920 г. по 1930 г., а затем работал в Московском авиационном институте. Он прекрасно знал и доносил до студентов свой предмет, а также был известен как полиглот<sup>15</sup>. Так, встречая 15 августа 1928 г. в Большой физической аудитории участников 6-го Всесоюзного съезда физиков с широким международным участием (на съезде присутствовали 5 будущих нобелевских лауреатов [17,18]), Свешников произнес приветственное слово на ... латинском языке [11, с. 273]<sup>16</sup>.

В 1919–1928 гг. на физико-математическом факультете работал физико-химик Николай Александрович Трифонов, впоследствии доктор химических наук, профессор, создатель научной школы в области химии концентрированных растворов и физико-химического анализа (см. библиографические данные в [19]).

В 1921 г. после отъезда В. Д. Зёрнова в Москву заведующим кафедрой физики и Физического института стал еще один представитель научной школы П. Н. Лебедева – профессор Константин Александрович Леонтьев<sup>17</sup>, который начал работу в университете в 1918 г. и с именем которого ассоциируется начало развития радиотехнического и радиофизического направления в Саратовском университете [19]. Леонтьев, по

<sup>15</sup> См.: Pismenny I. Мои институтские преподаватели. Ч. 2. URL: <http://www.proza.ru/2012/12/04/788> (дата обращения: 11.12.2017).

<sup>16</sup> 19 ноября 1924 г. в Саратове у Г. Н. Свешникова родился сын Алексей, ставший крупным специалистом в области вычислительной математики и физики, заслуженным профессором, заведующим кафедрой математики на физическом факультете МГУ, создателем научной школы (15 докторов и 40 кандидатов наук) по решению математических проблем электродинамики. На его долю выпало и участие в Великой Отечественной войне (см.: А. Г. Свешников. URL: [http://www.phys.msu.ru/rus/about/sovphys/ISSUES-2015/01\(110\)-2015/20737/](http://www.phys.msu.ru/rus/about/sovphys/ISSUES-2015/01(110)-2015/20737/) (дата обращения 11.12.2017)).

<sup>17</sup> Семьи Зёрнова, Богуславского, Леонтьева, Свешникова и (во флигеле) Голубева проживали в одном доме на улице Малой Сергиевской (ныне – Мичурина), который по ходатайству Зёрнова в январе 1920 г. был передан под общежитие профессорско-преподавательского состава университета [11, с. 338, 340].



Мартъ 1/2 1918 года.

1) Голубев прфр.	23) Волкова.	46) Сиротина.	71) Кауковъ.
2) Аносова.	24) Поповъ.	47) Голубевъ.	72) Кауковъ.
3) Приваловъ пр.	25) Горбунова.	48) Голубевъ.	73) Кауковъ.
4) Комарова.	26) Тропачева.	49) Голубевъ.	74) Кауковъ.
5) Павловская.	27) Бендикова.	50) Васильевъ.	75) Кауковъ.
6) Петрова.	28) Зарина.	51) Мауэртовъ.	76) Кауковъ.
7) Красильникова.	29) Машкина.	52) Липицкий.	77) Кауковъ.
8) Малюкова.	30) Куперъ.	53) Меркель.	78) Кауковъ.
9) Ошнина.	31) Николаева.	54) д. Сиротина Галина Нико.	79) Кауковъ.
10) Коротковъ.	32) Грановъ.	55) Сомовская.	80) Кауковъ.
11) Сидоровъ.	33) Герновъ.	56) Ершовъ.	81) Кауковъ.
12) Горский.	34) Голубевъ.	57) Тришкинъ.	82) Кауковъ.
13) Васильевъ.	35) Сомовская.	58) Переломовъ.	83) Кауковъ.
14) Васильевъ.	36) Сомовская.	59) Пришвина.	84) Кауковъ.
15) Васильевъ.	37) Сомовская.	60) Степанова.	85) Кауковъ.
16) Васильевъ.	38) Сомовская.	61) Кирьянская.	86) Кауковъ.
17) Васильевъ.	39) Сомовская.	62) Сафоновъ.	87) Кауковъ.
18) Васильевъ.	40) Сомовская.	63) Сергачевъ.	88) Кауковъ.
19) Васильевъ.	41) Сомовская.	64) Ольшевской.	89) Кауковъ.
20) Васильевъ.	42) Сомовская.	65) Геркишевской.	90) Кауковъ.
21) Васильевъ.	43) Сомовская.	66) Сомовская.	91) Кауковъ.
22) Васильевъ.	44) Сомовская.	67) Сомовская.	92) Кауковъ.
	45) Сомовская.	68) Сомовская.	93) Кауковъ.
		69) Сомовская.	94) Кауковъ.
		70) Сомовская.	95) Кауковъ.

40 студентокъ.  
61 студентъ.

Фото Сиротининой Г.Н.

На фото из семейного архива профессора СГУ Ольги Борисовны Сиротининой – преподаватели и студенты Саратовского университета, запечатленные в Большой физической аудитории в марте 1918 г. На пятом ряду вторая слева – Галина Николаевна Сиротинина. На обороте фотографии указаны фамилии присутствующих; среди них – профессора А. А. Голубев и И. И. Привалов (в первом ряду)



его собственному признанию, педагогическую работу рассматривал «как средство, дающее возможность вести научно-исследовательскую работу» [11, с. 337]. Он писал книги по радиотехнике и много переводил ценной физической литературы с иностранных языков.

После смерти в 1932 г. К. А. Леонтьева кафедру физики возглавил его ученик Петр Васильевич Голубков, один из первых студентов физико-математического факультета (он поступил в университет в 1917 г.!), в 1945 – 1946 гг. – декан физического факультета, в 1946–1950 гг. – ректор Саратовского университета (СГУ) [9, 20]. Профессор СГУ В. В. Игонин образно обрисовал такую преемственную цепочку: «Профессор В. Д. Зёрнов открыл физику в Саратовском университете, создал ее материальную базу. Профессор К. А. Леонтьев внес «дух и букву» физической, в широком смысле, школы великого П. Н. Лебедева в нашу альма-матер. Действенную реализацию этого обеспечил и претворил Петр Голубков» [11, с. 337].

Первый выпуск студентов физико-математического факультета состоялся весной 1921 г. В. Д. Зёрнов по этому поводу писал [11, с. 216]:

*«Желающих поступить на физико-математический факультет оказалось гораздо больше, чем мы с нашими весьма скромными средствами могли принять, и мне пришлось провести среди претендентов конкурс аттестатов, в результате чего на первом курсе подобрался отличный состав студентов<sup>18</sup>. Когда они заканчивали своё обучение в университете, меня в Саратове уже не было, но желая, чтобы я всё-таки присутствовал на коллективном снимке выпускной группы, студенты схитрили и сзади на стену повесили над группой мой большой портрет».*

По окончании университета в аспирантуру по кафедре математики поступил Георгий Петрович Боев, ставший впоследствии первым деканом механико-математического факультета.

<sup>18</sup> На первый курс физико-математического факультета в 1917 году поступило 367 человек вместо 240 планировавшихся [11, с. 335].



Сотрудники и выпускники первого набора физико-математического факультета (математическое отделение) Саратовского университета (1921). В первом ряду: крайний справа Г. П. Боев; во втором ряду, слева направо: ?, ?, С. А. Богуславский, К. И. Котелов, ?, В. В. Голубев, И. И. Привалов, Г. Н. Свешников, ?; в третьем ряду, 4-й слева Б. И. Котов, 6-й – Н. П. Неклепаев, 8-й – К. А. Леонтьев. Вверху – портрет находившегося в то время под арестом В. Д. Зёрнова [11]



1 июля 1922 г. физико-математический факультет был «переформатирован» в одно из отделений создаваемого педагогического факультета. Такое «соподчиненное» состояние продолжалось до осени 1931 г., когда на смену «отраслевой» парадигме высшего образования пришло понимание значимости университетского образования для развития научно-педагогического потенциала страны.

### В 1930-е годы

Вторая серьезная волна приглашений выдающихся ученых, в том числе будущих академиков и членов-корреспондентов Академии наук, из научных центров Москвы и Ленинграда на работу в Саратовский университет пришлась на период работы на посту ректора (в терминологии тех лет – директора) Гавриила Кирилловича Хворостина [1, 9, 21, 22]. Хворостин искал выход из сложного положения, которое создалось в университете из-за вывода из него в 1930–1931 гг. (согласно правительственному решению) подразделений, составивших в Саратове основу для 8 (!) новых институтов – медицинского, педагогического, советского права, советского строительства, финансово-экономического, плано-экономического, технологического, кооперативного и нескольких научно-исследовательских учреждений, в том числе Краеведческого института и Института болезней верхних дыхательных путей. Вследствие этого численность профессоров и студентов в университете серьезно сократилась: осталось всего 13 профессоров, а студенческий контингент уменьшился в 10 раз: с 4000 до 400 человек [22].

Для сборника [5], изданного по случаю 25-летия университета, профессор П. В. Голубков подготовил раздел «Кафедра физики», где отметил роль В. Д. Зёрнова и К. А. Леонтьева в организации факультета и кафедры, а также посетовал на возникшие трудности: в 1930–1931 гг. старые сотрудники кафедры перешли на работу в другие вузы, на кафедре – кризис учебной и научной работы... Состав кафедры физики в 1934 г. был таков: профессор Петр Васильевич Голубков, заведующий кафедрой; доцент Венедикт Иванович Калинин, выпускник университета 1930 г., вернувшийся из Ленинграда в Саратов 15 января 1933 г. после работы в Центральной радиолaborатории, будущий заведующий кафедрой радиофизики; доцент Василий Николаевич Немов, первый заведующий кафедрой физики Саратовского педагогического института; ассистент С. А. Суслов,

ассистент П. А. Семенов, лаборанты Владимир Яковлевич Красильников, будущий заведующий кафедрой электро- и радиотехники, и Сергей Варламович Соломонов, будущий легендарный декан физического факультета в 1963–1965 гг., Федор Федосеевич Троицкий, старший механик. Изменение последующего состава кафедры физики можно проследить по статье [20].

Приток новых кадров на физико-математический факультет начался с середины 1935 года, когда из Москвы в Саратов приехали заведовать кафедрами физико-математического профиля СГУ [1, 10]: Александр Яковлевич Хинчин – кафедрой теории вероятностей и теории чисел, Иван Григорьевич Петровский – кафедрой математического анализа, Виктор Владимирович Вагнер – кафедрой геометрии, Александр Геннадиевич Курош – кафедрой алгебры, Дмитрий Иванович Блохинцев – кафедрой (кабинетом) теоретической физики, Сергей Георгиевич Лехницкий – кафедрой теории упругости (проработал в университете 22 года). В 1940 г. после стажировки у академика И. М. Виноградова в Саратов вернулся Николай Григорьевич Чудаков, который возглавил кафедру алгебры и теории чисел. Периодически в университет из МГУ приезжал член-корреспондент Академии наук СССР Л. С. Понтрягин.

В 1935–1937 гг. на кафедре физики работал удивительный Георгий Андреевич Остроумов, изобретатель первого мощного генератора дециметрового диапазона, будущий создатель научной школы по электрогидродинамике и нелинейной акустике, защитивший в 1948 г. диссертацию в ранге докторской при оппонировании Л. Д. Ландау [23]<sup>19</sup>.

Как правило, приход новых преподавателей на физико-математический факультет повышал уровень университетских научных исследований и задавал новые направления научно-исследовательской и учебной деятельности. В [10] упоминается, что в обстоятельствах гражданской войны академик Петербургской АН Аристарх Аполлонович Белопольский в течение 1918/19 учебного года преподавал в университете астрономию и астрофизику, благодаря чему в Саратове было по-

<sup>19</sup> В 1958 г. Г. А. Остроумов был приглашен на кафедру радиофизики Ленинградского университета. Как потом вспоминали его ученики, «Г. А. О. был удивительным учителем. Каждого поражали его нетривиальные, а то и просто шокирующие суждения о тривиальных вещах, которые мы видели, но не догадались как следует обдумать. Поражало количество идей, которые Г.А.О. генерировал без устали до самой смерти в 1985 году». См.: Георгий Андреевич Остроумов. 1898 – 1985. URL : <http://radiosite.niirf.spbu.ru/russian/ostroumov.html>.



ложено начало учебной и научной деятельности в области астрономии. Благодаря приехавшему из Ленинграда Владимиру Пантелеймоновичу Жузе и его ученице в СГУ Зинаиде Ивановне Кирьяшкиной в Саратове стали плодотворно развиваться исследования по физике твердого тела [24, 25]. В 1935–1937 гг. в Саратове работал будущий член-корреспондент РАН Евгений Федорович Гросс, который, читая лекции по оптике и спектроскопии, пробудил научный интерес к этим дисциплинам [10]. Контакты аспиранта (впоследствии – доцента и профессора) А. Д. Степуховича с академиком Н. Н. Семёновым, лауреатом Нобелевской премии, привели к становлению в СГУ исследований по химической физике [26].

В 1937 г. при факультете был создан специальный научно-исследовательский Институт физики, механики и математики, который возглавил В. В. Вагнер.

### История на фотографии

На необыкновенно информативной фотографии из семейного архива профессора СГУ Александра Савельевича Фальковича запечатлен выпуск математического отделения физико-математического факультета 1936 г. Фотография дает представление о учебно-научной жизни университета (на ней представлен преподавательский состав факультета) и отражает события, связанные с коснувшимися университетом репрессиями 1937 г.



Комментарии к фотографии, сделанные А. С. Фальковичем [22]. На коллективной фотографии выпускников физико-математического факультета 1936 г. в центре (среди преподавателей) – портрет Гавриила Кирилловича Хворостина, директора СГУ. После его расстрела по чьей-то инициативе коллективные фотографии

выпуска 1936 г. были заменены на новые, где на месте портрета Хворостина было помещено изображение 3-го корпуса университета, в котором располагался физико-математический факультет. Среди выпускников 1936 г. были С. В. Фалькович и М. Д. Погорелая, которые вскоре поженились, и в семье оказалось две



фотографии. При обмене они одну фотографию заменили, чтобы было, как у всех, а другую спрятали и сохранили.

**Преподаватели.** Черномашенцев Н. А., доцент – работал на кафедре теоретической механики; Правдолюбов А. Л., доцент (см. [27, с. 77]); Боев Георгий Петрович, профессор – заведующий кафедрой математического анализа, декан физико-математического факультета (1943–1945), первый декан мехмата (1945–1947), проректор по учебной работе (1947–1950) (см. [2, с. 45]); Ризенкамф Бруно Константинович, доцент – учитель Савелия Владимировича Фальковича, заведующий кафедрой теоретической механики (см. [1, с. 173]); Вьюшков Павел Васильевич, доцент – заведующий кафедрой астрономии (1930–1954) (см. [2, с. 97]); Немов Василий Николаевич, доцент кафедры физики; Голубков Петр Васильевич, профессор – заведующий кафедрой общей физики (1932–1969), декан физико-математического факультета (1933–1935, 1942–1944), проректор по научной работе (1938–1939, 1943–1946), ректор СГУ (1946–1950) (см. [2, 9, 20]); Хворостин Гавриил Константинович, директор (см. [5, 16, 17]); Чудаков Николай Григорьевич, доцент – заведующий кафедрой алгебры и теории чисел (1940–1962, 1972–1983); с 1962 по 1972 г. работал в Ленинградском отделении Математического института Академии наук (см. [2, с. 61]); Павлючук Алексей Кондратьевич, доцент – вся его жизнь связана с мехматом СГУ: в первой половине 1970-х гг. работал на кафедре алгебры, преподавал высшую алгебру и основы численных методов – «матпрактикум»; Остроумов Георгий Андреевич, доцент – создатель электрогидродинамики, работал в СГУ на кафедре общей физики; Калинин Венедикт Иванович, доцент (см. [28]); Жузе Владимир Пантелеймонович, доцент (см. [24]).

**Студенты.** Тарасов Иван Степанович(?) – жил в Энгельсе; Сус Алексей Николаевич – преподавал в СГУ на кафедре общей физики и кафедре физики в Саратовском мединституте; Катаржина Анна Николаевна, преподаватель физики легендарной 19-й средней школы г. Саратова; Селиверстов Борис Николаевич – преподавал математику в техникумах Саратова; Кирьяшкина Зинаида Ивановна – в будущем доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой физики твердого тела (1945–1985) (см. [2, с. 63; 25]); Штепан В.Э. – астроном (?); Погорелая (Фалькович) Мария Дмитриевна (1915–1989) – преподавала математику в вузах Саратова: с 1937 (1938?) по 1953 г. и в 1960-х гг.

в Институте механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина, в 1950-х гг. в Автодорожном институте; Фалькович Савелий Владимирович (1911–1982) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой аэро- и гидродинамики и теоретической механики (1949–1982), работал в СГУ (1936–1944, 1949–1982) и в 1944–1949 гг. в Москве в Институте механики АН СССР и в ЦАГИ; Раушенбах Т. Э.; Чудаков Иван Григорьевич (брат Н. Г. Чудакова) – работал в СГУ на кафедре аэро- и гидродинамики и теоретической механики.

#### **Физико-математический факультет в военные годы**

В годы Великой Отечественной войны физики и математики, не прерывая учебного процесса, успешно работали по оборонной тематике [3, с. 45–49, 163–164]. К ним подключились и эвакуированные сотрудники Ленинградского университета, среди которых были Е. Ф. Гросс; Владимир Михайлович Чулановский, один из основателей российской школы молекулярной спектроскопии; авторы популярного учебника по общей физике Сергей Эдуардович Фриш, оптик и спектроскопист, будущий член-корреспондент РАН, и Александра Васильевна Тиморева. Как отмечается в [3, с. 164], за годы войны сотрудниками физико-математического факультета было выполнено около 400 разнообразных заданий. Главные из них: в производственных условиях были определены оптимальные режимы получения ацетилена из метана в дуговом разряде (В. П. Жузе, С. Э. Фриш, П. В. Голубков, З. И. Кирьяшкина, В. В. Игогин) [3, с. 164]<sup>20</sup>; налажено серийное производство автоматических запальников к противотанковым зажигательным бутылкам (П. В. Голубков, В. П. Жузе, Г. Ф. Далецкий, В. В. Игогин, Н. И. Коваленко, Л. В. Штромбергер); создан стенд для испытания пробойной силы противотанкового ружья (В. В. Игогин, П. В. Голубков, В. П. Жузе, А. С. Шехтер); налажено изготовление узлов к оптическим прицелам (П. В. Голубков, Ф. С. Сиванов); создан прибор для экспресс-анализа в процессе варки танковых башней; градуировка и паспортизация эталонных спидобарографов для измерения экстремальных значений «потолка» и скорости самолетов-истребителей Саратовского производства (В. В. Игогин, В. П. Жузе) и т.д. [29].

<sup>20</sup> В 1945 г. Зинаида Ивановна Кирьяшкина (1914–1985) защитила кандидатскую диссертацию «Электрокрейнг метана в высоковольтной дуге».



### Разделение физиков и математиков

Эра физико-математического факультета Саратовского университета завершилась летом 1945 г., когда он был разделен на физический факультет и механико (механо)-математический факультет.

В специальном выпуске газеты Саратовского университета «Сталинец» от 20 июля 1945 г., посвященном приемной кампании в университет, профессор П. В. Голубков сообщил [30, с. 2]:

*«... При Саратовском Государственном Университете с 1 сентября текущего года утверждается отдельный, физический факультет (выделяемый из ныне существующего физико-математического). Новый факультет должен готовить квалифицированных физиков-исследователей, имеющих солидную теоретическую подготовку, достаточно широкий кругозор и обладающих серьезными экспериментальными навыками. До настоящего года отдельные физические факультеты существовали лишь при Московском и Ленинградском университетах. В настоящем учебном году физический факультет будет работать в составе четырех кафедр: кафедры общей (экспериментальной) физики, теоретической физики, физики твердого тела и астрономии. Каждая из этих кафедр имеет свои научные интересы. Основным научным направлением кафедры общей физики является область физики сверхвысокочастотных электромагнитных колебаний, имеющая в настоящее время громадный научный и практический интерес в силу ее широких перспектив, в частности – для современной радиофизики. Кафедра физики твердого тела изучает ряд механических и электрических свойств твердых тел. Кафедра теоретической физики работает в одной из современных областей электроники, изучая процессы в электронных совокупностях. Ее научные интересы примыкают к работам кафедры общей физики и физики твердого тела, осуществляя плодотворное объединение экспериментаторов и теоретиков. Кафедра астрономии проводит ряд важных исследований по астрономии и гравиметрии. Новому физическому факультету предоставляется ряд преимуществ: ассигнуются дополнительные средства для нового оборудования, выписки иностранной литературы, увеличивается штат профессорско-преподавательского состава, студентам и работникам факультета предоставляются отсрочки от призыва в РККА и т. д. Оканчивающие физический факультет направляются в качестве исследователей в научно-исследовательские институты, исследователь-*

*ские лаборатории промышленных предприятий и в научные лаборатории вузов и втузов»<sup>21</sup>.*

### Заключение

Физико-математический факультет Саратовского университета стал первой крупной образовательно-научной структурой Нижнего Поволжья и всего Юго-Востока Европейской части России по подготовке квалифицированных физиков и математиков. Выпуск университетом десятков тысяч специалистов физико-математического профиля, обладающих многогранным университетским образованием, обеспечивал и продолжает обеспечивать квалифицированными кадрами учреждения среднего и высшего образования, важные научно-производственные и производственные предприятия региона.

Высокий уровень образовательной подготовки студентов и научных исследований, осуществляемых в университете, был задан профессорами с мировыми именами, академиками и членами-корреспондентами Академии наук, докторами наук. Как уже отмечалось выше, самые первые шаги факультет сделал под патронатом Петра Николаевича Лебедева, мирового научного светила конца XIX – начала XX в. Широкую международную известность факультет приобрел уже в 1920-х гг.

В 1945 г. физико-математический факультет был разделен на физический и механико-мате-

<sup>21</sup> В этом же номере газеты размещена Памятка для поступающих в СГУ [30, с. 2]:

«Порядок поступления в Саратовский Государственный Университет такой же, как во все другие вузы страны. Заявления принимаются до 15 августа. К заявлениям должны быть приложены: аттестат зрелости или аттестат об окончании средней школы (подлинник), автобиография, три фотографические карточки и справка об отношении к воинской обязанности. Окончившие среднюю школу в 1945 году с золотой и серебряными медалями, а также окончившие в 1944 году с аттестатом отличника принимаются в Университет без экзаменов; все остальные принимаются только с экзаменами. При равных условиях участники Отечественной войны пользуются преимуществом. Поступающие в Университет должны выдержать экзамены в объеме средней школы по следующим дисциплинам (в зависимости от выбранного факультета):

<...> 4. На физический – по физике, математике, химии, русскому языку и литературе, иностранному языку.

<...> Экзамены производятся с 15 августа по 25 августа. Поступившие на физический факультет пользуются отсрочкой от призыва в РККА на все время учебы. Начало занятий с 17 сентября. Работающие на предприятиях и в учреждениях на время экзаменов, согласно распоряжению правительства, получают отпуск, а принятые в Университет освобождаются от работы для учебы. Все принятые в Университет иногородние обеспечиваются общежитием и столовой. Адрес для подачи заявлений: Саратов, Астраханская улица, № 83, Ректор Университета».



математический факультеты. Выпускники-физики в 1950–1980-е гг. обеспечили, в частности, превращение Саратова в «электронную столицу» СССР, сделали крупный вклад в развитие атомной промышленности страны. Спрос на них был так велик, что с 1952 г. временно функционировал второй физический (радиофизический) факультет. Механико-математический факультет за те же годы превратился в крупный центр подготовки математиков фундаментального и прикладного плана, специалистов по газо- и гидродинамике, квалифицированных специалистов по вычислительной технике, программированию, информационным технологиям.

Современная научно-техническая дифференциация обусловила создание на базе ряда кафедр физического и механико-математического факультетов новых структурных подразделений университета – факультета нелинейных процессов (1994), компьютерных наук и информационных технологий (2000), факультета нано- и биомедицинских технологий (2005). И сегодня подготовка бакалавров, магистров и аспирантов в области математики, физики и информационных технологий проходит на 5 факультетах Саратовского государственного университета. Эти факультеты являются центром развития и популяризации физических, математических, компьютерных знаний, а также и технологий их преподавания в масштабах региона и страны.

Студенты специализируются по радиофизике, вакуумной и твердотельной электронике, нелинейной физике; микро- и наноэлементной базе электронных приборов; теоретической физике, оптике, лазерной физике, биофотонике, медицинской физике; современным разделам математики, механике и биомеханике, биотехническим системам и технологиям, инновационным технологиям; компьютерным и инфокоммуникационным технологиям, программированию, защите информации; педагогическому образованию.

На факультетах сформировались научно-образовательные школы международного уровня [31, 32], развиваются прорывные научные проекты, в том числе с привлечением ведущих ученых мира. Сборная команда студентов факультетов на протяжении многих лет становится победителем и призером международных олимпиад по программированию. В международных рейтингах отдельных образовательных направлений достигнуты позиции ведущих вузов мира.

Отмечая 100-летие организации физико-математического образования в Саратовском уни-

верситете, важно подчеркнуть, что современные выпускники физико-математических профилей подготовки наделены ответственной миссией по инновационному развитию научно-технического потенциала России.

#### Список литературы

1. Аврус А. И., Гапоненков А. А., Данилов В. Н. История Саратовского университета. 1909–2009 : в 2 т. Т. 1. 1909–1945. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. 296 с.
2. Мясников А. П. История Саратовского университета. 1909–2009: в 2 т. Т. 2. 1945 – 2009. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. 348 с.
3. Саратовский университет. 1909 – 1959. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1959. 292 с.
4. Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского // Государственные университеты и научные учреждения. 2-е изд., перераб. и доп. М. ; Л. : Объединенное науч.-техн. изд-во, 1935. С. 444–452.
5. Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 1909–1934 : материалы по истории СГУ и его кафедр. Юбилейный выпуск / отв. ред. Д. А. Рамзаев. Саратов : [б.и.], 1935. 95 с.
6. Саратовский государственный имени Н. Г. Чернышевского университет в 1925 году (Краткие сведения о состоянии и работе). Приложение к V тому «Ученых записок». Саратов : [б.и.], 1926. 57 с.
7. Семичастнов М. Саратовский университет как культурный центр Нижнего Поволжья // Нижнее Поволжье. 1925. № 10. С. 86–92.
8. Волков М. Ф. История учреждения Саратовского университета и Саратовская городская дума. 1 декабря 1906 г. – 6 декабря 1909 г. : Воспоминания и заметки / Мин-во культуры Саратовской обл., Саратовский областной музей краеведения; [сост. В. В. Критский]. Саратов : Изд-во «Новый ветер», 2015. 232 с.
9. Семёнов В. Н. Ректоры Саратовского университета : Факты жизни и деятельности. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 202 с.
10. Аврус А. И., Сацнин И. В., Соломонов В. А. Саратовцы – академики и члены-корреспонденты Российской академии наук : Биобиблиографические очерки. Саратов : Изд-во «Сателлит», 2005. 366 с.
11. Зёрнов В. Д. Записки русского интеллигента. М. : Изд-во «Индрик», 2005. 400 с.
12. Протоколы заседаний Совета за январь – март 1916 года // Изв. Саратов. ун-та, 1917. Т. VIII, вып. 1 и 2. Университетская летопись. С. 1–76.
13. Аникин В. М. «Фабрика молодых физиков» П. Н. Лебедева и Саратовский университет // УФН. 2016. Т. 186, № 2. С. 169–173.
14. Аникин В. М., Поизнер Б. Н., Соснин Э. А., Шувалов А. В. Феномен научной школы : история, типология получения и передачи знаний, психология коммуникаций / под общ. ред. В. М. Аникина. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. 232 с.



15. Реформа российского образования 1915–1917 гг. По материалам журналов Министерства народного просвещения и Русского технического общества. URL : <https://almavest.ru/ru/node/1278> (дата обращения: 10.12.2017).
16. Хромов А. П. Владимир Васильевич Голубев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 88–89.
17. Усанов Д. А. Международные встречи российских физиков в прошлом и настоящем // Изв. вузов. ПНД. 2013. Т. 21, № 3. С. 127–154.
18. Аникин В. М. «Приобретать умение делать физические измерения и исследования» : к 100-летию физического образования и физической науки в Саратове // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 53–58.
19. Голубков П. В. Константин Александрович Леонтьев // Там же. С. 65 – 68.
20. Дмитриев Б. С. Пётр Васильевич Голубков // Там же. С. 69–75.
21. Аврус А. И. «Я работаю и делаю дело...» (Гавриил Кириллович Хворостин. 1900–1938) // История и историческая память. 2015. Вып.12. С. 281–299.
22. Трубецкова И. А. Университетская Вселенная ректора Г. К. Хворостина : рождение и гибель // Изв. вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 2. С. 89–103.
23. Сорокин М. П. Остроумов Георгий Андреевич (1898–1985) // Профессора Пермского университета (1916–2001). Пермь : Изд-во Перм. ун-та, 2001. 432 с.
24. Усанов Д. А. К 100-летию профессора Владимира Пантелеймоновича Жузе // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 108–109.
25. Усанов Д. А. Кафедре физики твердого тела – 70 лет // Там же. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 55–61.
26. Аникин В. М. Николай Николаевич Семёнов : фрагменты научной биографии. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. 80 с.
27. История отечественной математики: в 4 т. / отв. ред. И. З. Штокало. Т. 3. 1917–1967. Киев : Наук. думка, 1968. 727 с.
28. Анищенко В. С. Профессор В. И. Калинин и университетское образование // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 58–64.
29. Игошин В. В. Работа физиков СГУ в годы Великой Отечественной войны // Университеты в региональном пространстве : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2000. С. 51–54.
30. Голубков П. В. Физический факультет // Сталинец. 1945. 20 июля. № 2. URL : [http://elibrary.sgu.ru/Gazet/Univer/1945\\_07\\_20.pdf](http://elibrary.sgu.ru/Gazet/Univer/1945_07_20.pdf).
31. Аникин В. М. Физический факультет в XXI веке. К 70-летию физического факультета Саратовского университета // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 65–71.
32. Усанов Д. А., Аникин В. М. Саратовские научные и педагогические школы по физике (к 80-летию образования Саратовской области) // Там же. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 178–190. DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-3-178-190.

#### Образец для цитирования:

Аникин В. М. Физико-математический факультет Саратовского университета (1917–1945) // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 64–79. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-64-79.

#### Faculty of Physics and Mathematics of Saratov State University (1917–1945)

##### V. M. Anikin

Valery M. Anikin, ORCID 0000-0002-6506-6997, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, AnikinVM@info.sgu.ru

The article systematizes historical data on the opening in 1917 and the subsequent development of the Physics and Mathematics Department of Saratov University during 1917–1945. Professor Vladimir D. Zernov, Master of Physics, a student of the world famous professor of Moscow University Peter N. Lebedev was elected the first Dean of the Faculty of Physics and Mathematics on September 5, 1917. The further development of the faculty was held with the participation of leading Russian scientists. When writing the article we used the reports of the Council of the Imperial Nikolai Saratov University dated 1916, various historical and biographical materials, family archives, photographs of 1918 and 1936, characterizing

the activity of the Physics and Mathematics Faculty until 1945. In 1945 the Faculty of Physics and Mathematics was divided into the Department of Physics and the Department of Mechanics and Mathematics. Today these faculties are leading educational structures of the Volga region in teaching students in physics, mathematics and information technology.

**Key words:** Saratov State University, Faculty of Physics and Mathematics, Department of Physics, Department of Mechanics and Mathematics.

#### References

1. Avrus A. I., Gaponenkov A. A., Danilov V. N. *Istoriya Saratovskogo universiteta: v 2 t. T. 1. 1909 – 1945* [The History of Saratov University]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 2009, vol. 1. 296 p. (in Russian).
2. Myakshhev A. P. *Istoriya Saratovskogo universiteta: v 2 t. T. 2. 1945 – 2009* [The History of Saratov University]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 2009, vol. 2. 348 p. (in Russian).



3. *Saratovskij universitet* [Saratov University]. 1909 – 1959. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 1959. 292 p. (in Russian).
4. Saratovskiy gosudarstvennyy universitet im. N. G. Chernyshevskogo [Saratov State University]. *Gosudarstvennyye universitety i nauchnyye uchrezhdeniya*, [State universities and scientific institutions]. 2nd ed., revised and add. Moscow, Leningrad, Ob'yedinennoye nauchno-tekhnicheskoye izd-vo, 1935, pp. 444–452 (in Russian).
5. *Saratovskiy gosudarstvennyy universitet im. N. G. Chernyshevskogo, 1909–1934 : materialy po istorii SGU i yego kafedr. Yubileyny vypusk* [Saratov State University. 1909–1934. Materials on the history of SSU and its departments. Anniversary issue]. Ed. D. A. Ramzaev. Saratov, 1935. 95 p. (in Russian).
6. *Saratovskiy gosudarstvennyy imeni N. G. Chernyshevskogo universitet v 1925 godu (Kratkiye svedeniya o sostoyanii i rabote)*. Prilozheniye k V tomu “Uchenykh zapisok” [Saratov State University in 1925 (Brief information about the state and work). Suppl. to vol. V of “Scientific Notes”]. Saratov, 1926. 57 p. (in Russian).
7. Semichastnov M. Saratovskiy universitet kak kul'turnyy tsentr Nizhnego Povolzh'ya [Saratov University as a cultural center of the Lower Volga region]. *Nizhneye Povolzh'ye* [Lower Volga region], 1925, no. 10, pp. 86–92 (in Russian).
8. Volkov M. F. *Istoriya uchrezhdeniya Saratovskogo universiteta i Saratovskaya gorodskaya дума. 1 dekabrya 1906 g. – 6 dekabrya 1909 g. : Vospominaniya i zametki* [History of the institution of the Saratov University and the Saratov City Duma. December 1, 1906 – December 6, 1909 : Memoirs and notes]. Saratov, Min. of Culture of the Saratov Region, Saratov Regional Museum of Local History; comp. V. V. Kritsky. Saratov, Izd-vo “Novy veter”, 2015. 232 p.
9. Semenov V. N. *Rektory Saratovskogo universiteta: Fakty zhizni i deyatel'nosti* [Rectors of Saratov University: Facts about life and activities]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 1999. 202 p. (in Russian).
10. Avrus A. I., Saunin I. V. Solomonov V. A. *Saratovcy – akademiki i chleny-korrespondenty Rossijskoj akademii nauk: Biobibliograficheskie ocherki* [Saratovites – academicians and corresponding members of the Russian Academy of Sciences: Biographic & Bibliographic essays]. Saratov, Izd-vo “Satellit”, 2005. 366 p. (in Russian).
11. Zernov V. D. *Zapiski russkogo intelligenta* [Notes of the Russian Intelligent]. Moscow, Izd-vo “Indrik”, 2005. 400 p. (in Russian).
12. *Protokoly zasedanij Soveta za yanvar' – mart 1916 goda. Universitetskaya letopis'* [Protocols of the Council meetings for January-March 1916. University Chronicle]. *Izv. Saratov Univ.* 1917, vol. VIII, iss. 1, 2, pp. 1–76. (in Russian).
13. Anikin V. M. P. N. Levedev's “Factory of Young Physicists” and Saratov University. *Phys. Usp.*, 2016, vol. 59, no. 2, pp. 162–166. DOI: 10.3367/UFNe.0186.201602e.0169. (in Russian).
14. Anikin V. M., Poizner B. N., Sosnin E. A., Shuvalov A. V. *Fenomen nauchnoj shkoly: istoriya, tipologiya poluchenija i peredachi znanij, psihologiya kommunikacij* [The phenomenon of the scientific school: history, typology of the receipt and transmission of knowledge, communication psychology]. Ed. V. M. Anikin. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 2015. 232 p. (in Russian).
15. *Reforma rossijskogo obrazovaniya 1915–1917. Po materialam zhurnalov Ministerstva narodnogo prosveshcheniya i Russkogo tekhnicheskogo obshchestva* [Reform of the Russian education 1915–1917. Based on the materials of the journals of the Ministry of National Education and the Russian Technical Society]. Available at: <https://almavest.ru/ru/node/1278> (accessed 10 December 2017) (in Russian).
16. Khromov A. P. Vladimir Vasilyevich Golubev. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math., Mech., Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, p. 1, pp. 88–89 (in Russian).
17. Usanov D. A. International meeting of Russian physicists in the Past and Present. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21, no. 3, pp. 127–134 (in Russian).
18. Anikin V. M. “To get the ability to do the physical dimension and research”. A Centenary of physical education and science in Saratov. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 53–58 (in Russian).
19. Golubkov P. V. Konstantin Aleksandrovich Leontiev. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 65–68 (in Russian).
20. Dmitriev B. S. Petr V. Golubkov: pages of Biography in context of Physical Faculty and University history. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 69–75 (in Russian).
21. Avrus A. I. «Ya rabotayu i delayu delo...» [“I work and do matter...”] (Gavriil Kirillovich Hovorostin. 1900 – 1938). *Istoriya i istoricheskaya pamyat'* [History and historical memory], 2015, iss. 12, pp. 281–299 (in Russian).
22. Trubetskova I. A. University Universe of the Principal G. K. Khvorostin: the birth and death. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 89–104 (in Russian).
23. Sorokin M. P. Ostroumov Georgij Andreevich (1898–1985). *Professora Permskogo universiteta (1916–2001)* [Professors of Perm' University]. Perm', Izd-vo Permskogo un-ta, 2001. 432 p. (in Russian).
24. Usanov D. A. On the 100th anniversary of Professor Vladimir P. Zhuse. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 108–109 (in Russian).
25. Usanov D. A. 70 years of the Department of Solid State Physics. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 55–61 (in Russian).
26. Anikin V. M. *Nikolaj Nikolaevich Semyonov: fragmenty nauchnoj biografii* [Nikolai N. Semenov: fragments of the scientific biography]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 2017. 80 p. (in Russian).



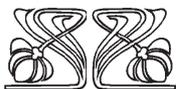
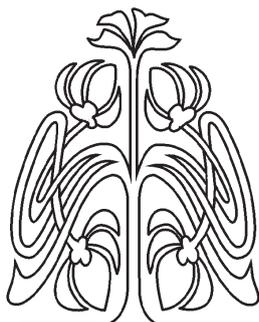
27. *Istoriya otechestvennoj matematiki: v 4 t. T. 3. 1917–1967* [The history of Russian mathematics]. Ed. I. Z. Shtokalo. Kiev, Naukova Dumka, 1968, vol. 3. 727 p. (in Russian).
28. Anishchenko V. S. Professor V. I. Kalinin and university education. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 58–64 (in Russian).
29. Igonin V. V. Rabota fizikov SGU v gody Velikoj Otechestvennoj vojny [The work of the SSU physicists during the Great Patriotic War]. *Universitety v regional'nom prostranstve: materialy mezhdunar. nauch. konf.* [Universities in the regional space: Intern. sci. conf.]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 2000, p. 51–54 (in Russian).
30. Golubkov P. V. Fizicheskii fakul'tet [Physics department]. *Stalinec* [Stalinist], 1945, July 20. no. 2. Available at: [http://elibrary.sgu.ru/Gazet/Univer/1945\\_07\\_20.pdf](http://elibrary.sgu.ru/Gazet/Univer/1945_07_20.pdf) (in Russian).
31. Anikin V. M. Faculty of Physics in the 21st Century. To the 70th anniversary of the Faculty of Physics of the Saratov University. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 65–71 (in Russian).
32. Usanov D. A., Anikin V. M. Scientific and Educational Physical Schools in Saratov (on the 80th Anniversary of the Saratov Region). *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 178–190. DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-3-178-190 (in Russian).

---

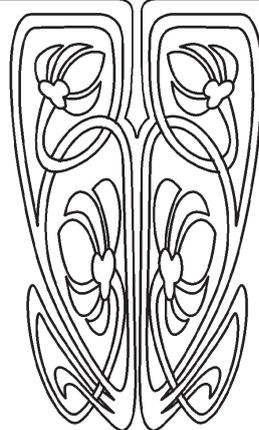
**Cite this article as:**

Anikin V. M. Faculty of Physics and Mathematics of Saratov State University (1917–1945). *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 64–79 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-64-79.

---



**ПОДПИСКА**



**Подписка на II полугодие 2018 года**

Индекс издания в объединенном каталоге  
«Пресса России» 36015, раздел 30  
«Научно-технические издания.  
Известия РАН. Известия вузов».

Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно  
в интернет-каталоге «Пресса по подписке» ([www.akc.ru](http://www.akc.ru))

**Адрес Издательства**

**Саратовского университета:**

410012, Саратов, Астраханская, 83;

**Тел.:** +7 (845-2) 51-45-49, 52-26-89

**Факс:** +7 (845-2) 27-85-29

**E-mail:** [izvestiya@sgu.ru](mailto:izvestiya@sgu.ru)

**Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
физический факультет

**Тел./факс:** +7 (845-2) 51-14-30

**E-mail:** [fizika.sgu@bk.ru](mailto:fizika.sgu@bk.ru)

**Website:** <http://fizika.sgu.ru>