



## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 517.9:621.373.7

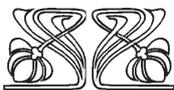
### Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича – Фабриканта

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина

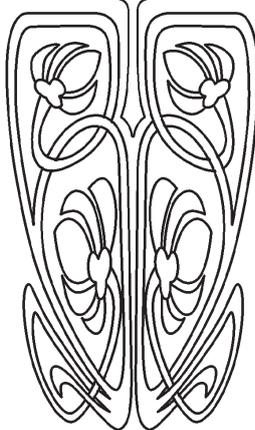
Кузнецов Александр Петрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, [arkuz@rambler.ru](mailto:arkuz@rambler.ru)

Кузнецов Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

Тюрюкина Людмила Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН; доцент факультета нелинейных процессов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, [turukinalv@yandex.ru](mailto:turukinalv@yandex.ru)



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



В работе рассматривается конечномерная трехмодовая модель нелинейного параболического уравнения, предложенная в 1979 г. М. И. Рабиновичем и А. Л. Фабрикантом и описывающая стохастичность, возникающую в результате развития модуляционной неустойчивости в неравновесной диссипативной среде со спектрально узким усилением. Как оказалось, модель Рабиновича–Фабриканта демонстрирует очень богатую динамику, обусловленную наличием в уравнениях нелинейности третьего порядка. Исследование основано на численном решении дифференциальных уравнений и численном бифуркационном анализе с помощью программы *MatCont*. Для модели Рабиновича – Фабриканта построены карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров, зависимости показателей Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. Численно найдены и построены на плоскости управляющих параметров бифуркационные линии для неподвижной точки и предельного цикла периода 1. Показано, что в исследуемой модели имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода предельного цикла, который, в свою очередь, рождается в результате прямой бифуркации Андронова – Хопфа. Также в системе имеет место существенная мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разных типов. Рассматриваемая система является универсальной, так как, хотя она и была разработана как физическая модель, описывающая стохастичность в неравновесной диссипативной среде, она может моделировать системы различной физической природы, в которых имеет место трехмодовое взаимодействие и присутствует кубическая нелинейность. Многие из этих систем имеют очевидное прикладное значение. Среди них можно выделить: волны Толлмина – Шлихтинга в гидродинамических течениях, ветровые волны на воде, волны в химических средах с диффузией, лэнгмюровские волны в плазме и т.д. Кроме того, модель Рабиновича – Фабриканта может описывать и радиотехнические системы, которые допускают как аналоговое моделирование, так и реализацию в радиотехническом устройстве.

**Ключевые слова:** модель Рабиновича–Фабриканта, хаотические аттракторы, мультистабильность, бифуркационный анализ.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18>

© Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В., 2019



## Введение

В 1979 г. Рабинович и Фабрикант представили и исследовали физическую модель, описывающую стохастичность, возникающую из-за модуляционной неустойчивости в неравновесной диссипативной среде [1]. Это конечномерная трехмодовая модель может описывать различные физические системы, такие как волны Толлмина–Шлихтинга в гидродинамических течениях, ветровые волны на воде, волны в химических средах с диффузией, Лэнгмюровские волны в плазме и др. Отметим, что математическая модель Рабиновича–Фабриканта может описывать и радиотехническую схему [2]. Таким образом, очевидно, что модель Рабиновича–Фабриканта носит универсальный характер и может быть применима к системам различной природы, в которых имеет место трехмодовое взаимодействие в присутствии кубической нелинейности.

В последние годы снова возник интерес к этой системе [2–9]. Во-первых, это связано с тем, что модель Рабиновича–Фабриканта моделирует физическую систему и, следовательно, это не искусственная модель. Во-вторых, она демонстрирует богатую сложную динамику, например, хаотические аттракторы разной топологии, мультистабильность, включая сосуществование хаотических аттракторов, и др. При этом, так как модель Рабиновича–Фабриканта содержит кубическую нелинейность, большинство результатов для нее может быть получено только численно.

В свою очередь, системам с сосуществующими хаотическими аттракторами в последние годы уделяется все больше и больше внимания как при теоретическом исследовании, так и в инженерных приложениях. Как показали исследования [10], сосуществующие хаотические аттракторы могут выступать как источник непредсказуемости, а следовательно, такие системы могут представлять определенный интерес для систем коммуникаций [11], механики [12, 13] и т.д. При этом низкоразмерных систем с сосуществующими хаотическими аттракторами известно не так много [14–18]. Поэтому интерес к системе Рабиновича–Фабриканта оправдан.

Система Рабиновича–Фабриканта описывается следующими уравнениями [1]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(v + xy),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $x, y, z$  – динамические переменные, а  $\gamma$  и  $v$  – параметры.

В настоящей работе мы проведем подробное численное исследование системы (1), динамика которой, несмотря на существенное количество работ, исследована все же не достаточно полно. Так, например, во всех соответствующих работах авторами выбираются практически одни и те же значения параметров, а именно  $\gamma=0.1$  и величины  $v$ , меняющиеся в диапазоне от 0.05 до 2.0 (в разных работах диапазон по  $v$  немного отличается). Авторы это объясняли тем, что для больших значений параметров в системе наблюдается разбегание фазовых траекторий. Кроме того, во всех работах в основном рассматривались лишь те случаи, когда система демонстрирует хаотический аттрактор.

В настоящей работе мы рассмотрим и другие (большие) значения параметра  $\gamma$  и покажем, что, несмотря на то что с ростом параметра  $\gamma$  область разбегания действительно увеличивается, диапазон изменения второго параметра, в котором система демонстрирует разнообразную динамику, все же остается достаточно большим. Кроме этого мы покажем, что в определенной области пространства параметров в системе (1) наблюдается не только бистабильность, когда сосуществуют два (симметрично расположенных) аттрактора одного типа (в ряде работ это отмечалось для хаотических аттракторов), но и мультистабильность, когда сосуществуют две пары аттракторов разного типа.

Вдобавок во многих работах, посвященных исследованию системы Рабиновича – Фабриканта, авторами отмечалась ее сложность для численного исследования с использованием стандартных численных методов, так как результаты зависят от шага метода и начальных условий. При современных технологиях компьютерного исследования зависимость от шага интегрирования устраняется, а зависимость от начальных условий связана с возможной мультистабильностью. При этом бассейны притяжения разных аттракторов могут быть очень малы. Некоторые сложности для интегрирования (особенно стандартными программами, например, такими как Matcont) наблюдались при значениях параметра  $\gamma < 0.1$ , когда характерный период временной динамики аттракторов резко возрастал.

## 1. Динамика системы Рабиновича – Фабриканта

Итак, рассмотрим динамику системы (1). Для начала построим для нее карту динамических режимов на плоскости параметров  $(v, \gamma)$



(рис. 1). Такая карта строится при сканировании плоскости параметров, когда в каждой ее точке численно определяется тип наблюдаемого режима, который обозначается соответствующим цветом. На карте (см. рис. 1) имеется большая область разбегания траекторий (показана белым цветом), расположенная по краям карты.

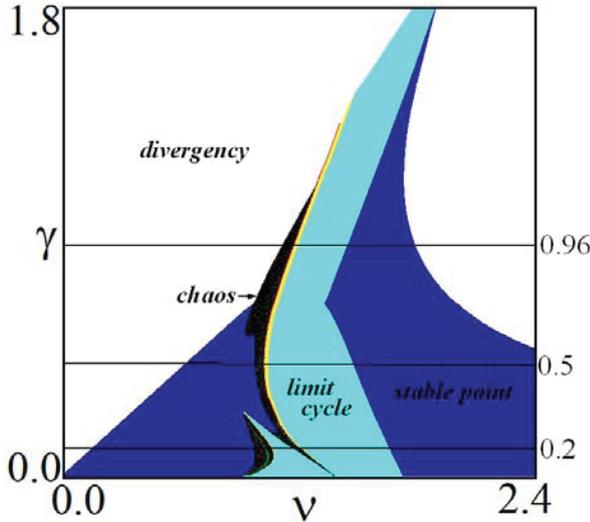


Рис. 1. Карта динамических режимов системы Рабиновича – Фабриканта (1) на плоскости параметров  $(\gamma, \nu)$   
 Fig. 1. Diagram of dynamical regimes of the Rabinovich – Fabrikant model (1) on the  $(\gamma, \nu)$  parameter plane

В центре карты располагаются области периодических и хаотических режимов: темно-серый цвет отвечает неподвижной точке, более светлые оттенки серого – предельным циклам периода 1, 2, 4 и т.д., а черный цвет отвечает хаотическому режиму. (В электронной версии используется следующая палитра: неподвижная точка – темно-синий цвет, предельный цикл периода 1 – голубой цвет, цикл периода 2 – желтый, цикл периода 4 – красный и т.д., хаотическому режиму соответствует черный цвет.) Указанные периоды циклов определяются стандартным образом с помощью сечений Пуанкаре. Отметим, что с ростом параметра  $\gamma$  область периодических и хаотических режимов становится уже, а область разбегания – шире.

### 1.1. Случай $\gamma = 0.96$

Рассмотрим теперь динамику системы (1) более подробно. Для этого построим фазовые портреты и графики зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\nu$  при разных  $\gamma$ . Начнем со случая  $\gamma = 0.96$ . Соответствующие иллюстрации представлены на рис. 2. Так, на

рис. 2, а представлен график зависимости трех показателей Ляпунова. Из рисунка видно, что в области  $\nu > 1.5$  все показатели Ляпунова отрицательные, т.е. в системе существует устойчивая неподвижная точка. Соответствующий фазовый портрет, представленный на рис. 2, б, построен для значения параметра  $\nu = 1.5$ . На нем наблюдаются две сосуществующие неподвижные точки. Показатели Ляпунова, численно полученные для точки  $SP_1^-$ , равны, соответственно,  $\Lambda_1 = -0.007770 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_2 = -0.007771 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_3 = -1.064457 \pm 0.000001$ .

При уменьшении параметра  $\nu$  устойчивая неподвижная точка исчезает, и на ее месте возникает устойчивый предельный цикл (рис. 2, в), а старший показатель Ляпунова становится равен нулю (см. рис. 2, а). Предельные циклы, представленные на рис. 2, в построены для  $\nu = 1.3$ . Для предельного цикла  $LC_1^-$  также численно получены показатели Ляпунова. Они равны, соответственно,  $\Lambda_1 = 0.000000 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_2 = -0.339998 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_3 = -0.340000 \pm 0.000001$ . При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  период предельного цикла удваивается (рис. 2, з), пока в результате каскада бифуркаций удвоения периода не возникнет хаотический аттрактор, при этом старший показатель Ляпунова положительный. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 2, д. Он построен для  $\nu = 1.18$  и на нем наблюдаются сосуществующие хаотические аттракторы. Показатели Ляпунова, вычисленные для аттрактора  $Ch_1^-$ , равны:  $\Lambda_1 = 0.169722 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_2 = 0.000000 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_3 = -0.609722 \pm 0.000001$ . Таким образом, в системе (1) имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения предельного цикла.

Отметим, что система (1) обладает бистабильностью. Как видно из фазовых портретов, представленных на рис. 2, б–д, в фазовом пространстве сосуществуют два симметрично расположенных аттрактора, которые переходят один в другой при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ . Соответствующей симметрией обладает и исходная система. Действительно, сделаем в уравнениях (1) замену переменных:

$$x = -x' \text{ и } y = -y', \quad (2)$$

где штрихом обозначены новые динамические переменные. Тогда система (1) примет вид

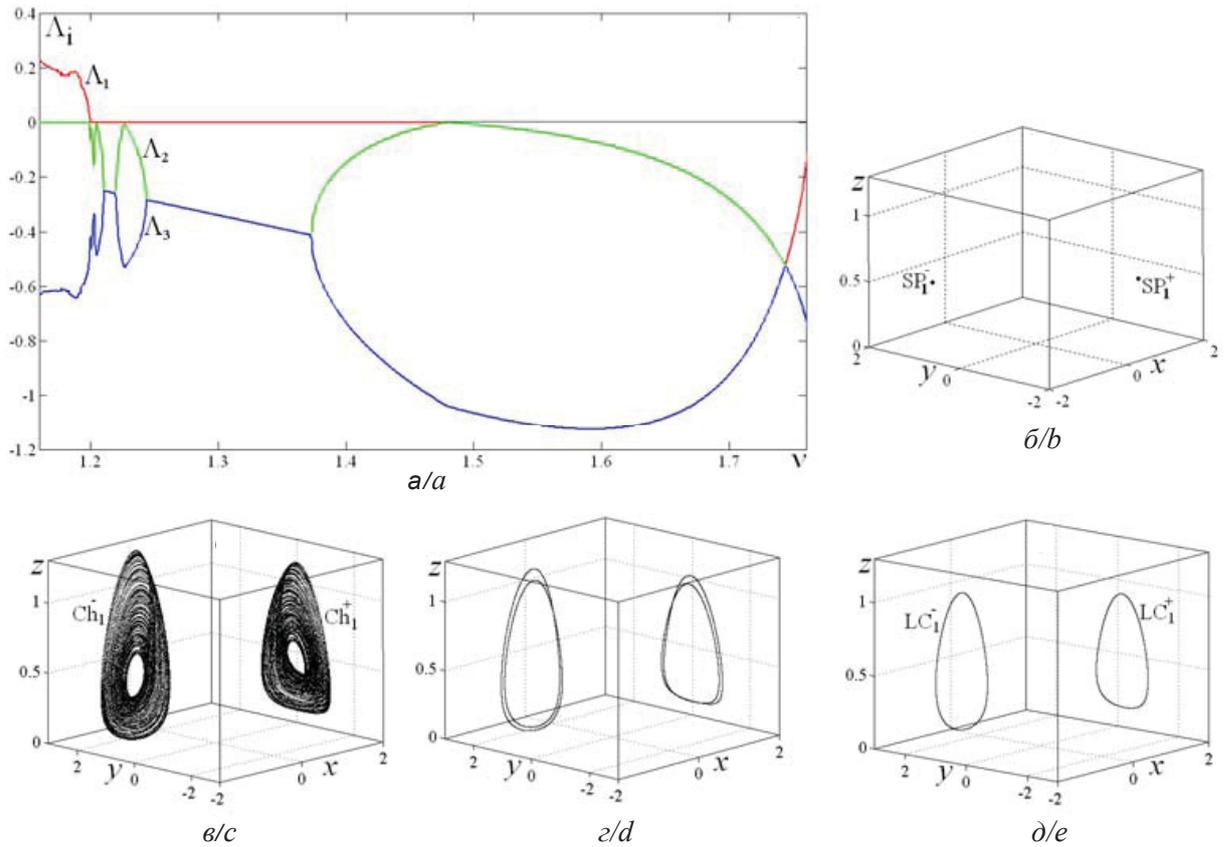


Рис. 2. Зависимость показателей Ляпунова системы Рабиновича – Фабриканта (1) от параметра  $v$  для  $\gamma = 0.96$  (а).  
 Аттракторы системы Рабиновича – Фабриканта (1) для  $\gamma = 0.96$ :  $\delta - v = 1.5$ ;  $\epsilon - v = 1.3$ ;  $z - v = 1.21$ ;  $\delta - v = 1.18$   
 Fig. 2. Dependences of Lyapunov exponents of the Rabinovich – Fabrikant model (1) on the parameter  $v$  for  $\gamma = 0.96$  (a).  
 Attractors of the Rabinovich – Fabrikant model (1) at:  $v=1.5$  (b),  $v=1.3$  (c),  $v=1.21$  (d),  $v=1.18$  (e), for all attractors  $\gamma = 0.96$

$$\begin{aligned} -\dot{x}' &= -y'(z - 1 + (x')^2) - \gamma x', \\ -\dot{y}' &= -x'(3z + 1 - (x')^2) - \gamma y', \\ \dot{z} &= -2z(v + x'y'). \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь умножим правую и левую части первого и второго уравнений на -1 и относительно новых переменных  $x'$  и  $y'$  получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= y'(z - 1 + (x')^2) + \gamma x', \\ \dot{y}' &= x'(3z + 1 - (x')^2) + \gamma y', \\ \dot{z} &= -2z(v + x'y'). \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) полностью совпадает с системой (1). Таким образом, для системы (1) возможно сосуществование режимов, обусловленных указанной симметрией.

Для анализа бистабильности, как известно, удобно построить бассейны притяжения аттракторов. Соответствующие бассейны для случая  $v=1.5$ , когда в системе (1) сосуществуют две неподвижные точки, представлены на рис. 3. На этом рисунке (и на всех последующих аналогич-

ных рисунках) представлены проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$ . Видно, что в фазовом пространстве сосуществуют две устойчивые неподвижные точки  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ , обозначенные на рисунке разными оттенками серого (в электронном варианте синим и зеленым цветами), и неустойчивая неподвижная точка в начале координат. (На этом и на всех последующих рисунках бассейны притяжения окрашены в тот же цвет, что и его аттрактор.) При небольших значениях  $z_0=0.2$  бассейны притяжения представляют собой небольшие симметрично расположенные относительно начала координат округлые области. С ростом  $z_0$  бассейны увеличиваются, а внутри них появляются «острова», отвечающие разбеганию траекторий на бесконечность. Далее эти острова увеличиваются; ограничивающие их справа и слева полосы становятся все уже и уже, пока совсем не разрываются, и у бассейна появляются своеобразные «хвосты». Если и далее увеличивать  $z_0$ , то появляются новые острова, отвечаю-

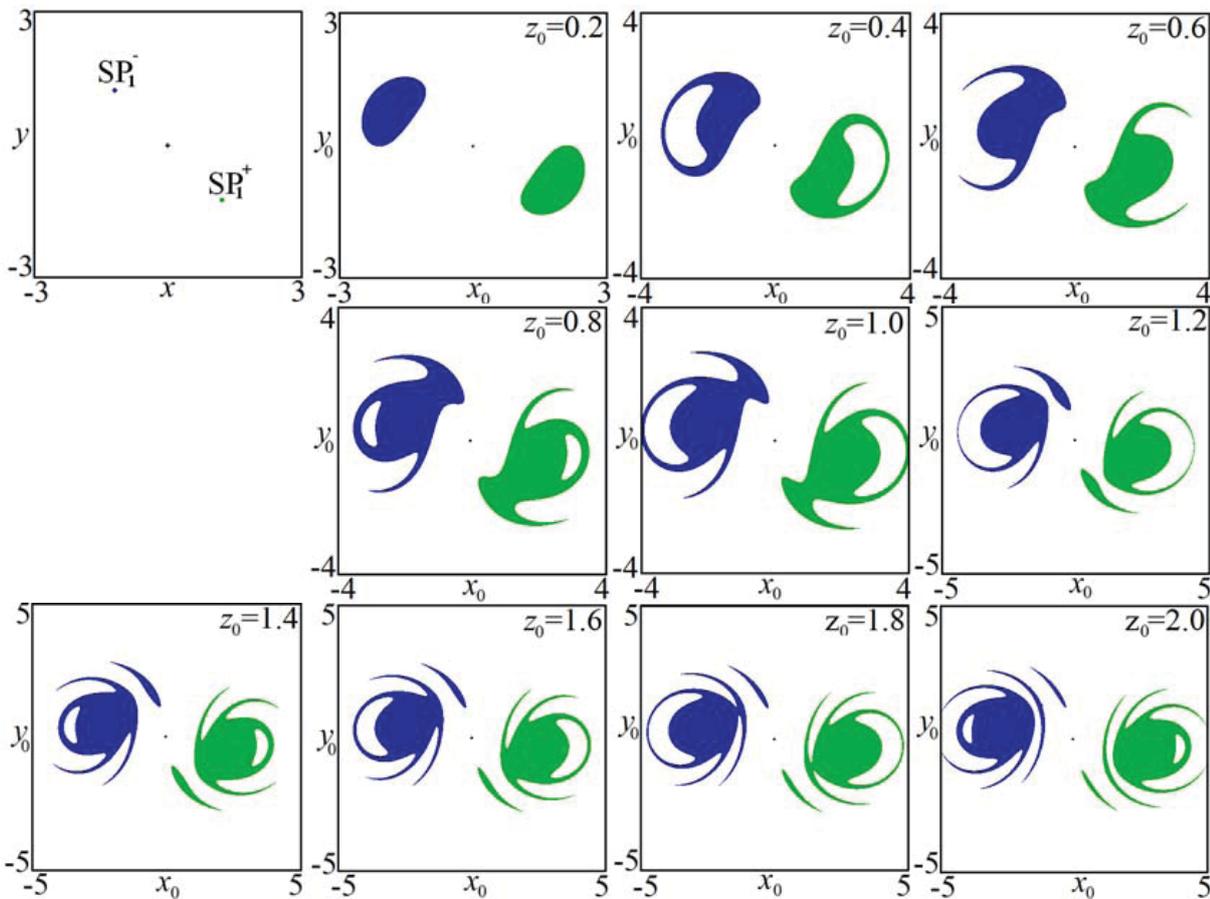


Рис. 3. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения системы Рабиновича – Фабриканта (1) плоскостью  $z_0=\text{const}$ .  $\gamma=0.96$ ,  $\nu=1.5$ . Бассейн притяжения точки  $SP_1^-$  окрашен в темно-серый цвет, а точки  $SP_1^+$  – в серый цвет более светлого оттенка (в электронной версии синий и зеленый цвета соответственно)

Fig. 3. Projection of attractors on the  $(x, y)$  plane and sections of their basins of attraction by the  $z_0=\text{const}$  plane plotted for the Rabinovich – Fabrikant model (1).  $\gamma=0.96$ ,  $\nu=1.5$ . The basin of point  $SP_1^-$  is colored to grey color and the basin of point  $SP_1^+$  is colored to grey lighter shade (in the electronic version, blue and green colors, respectively)

щие разбеганию траекторий на бесконечность, и новые хвосты. Наконец, при  $z_0 > 1$  от основного бассейна отделяются маленькие изолированные области. Отметим, что бассейны притяжения для всех остальных режимов (предельный цикл, циклы удвоенного периода, хаотический аттрактор) качественно не меняются. Отличия лишь количественные: «острова» и «хвосты» образуются при чуть меньших значениях  $z_0$ . Кроме того, как аттракторы, так и их бассейны всегда расположены в области  $z > 0$ .

### 1.2. Случай $\gamma = 0.5$

Теперь рассмотрим меньшие значения параметра  $\gamma$ . Пусть  $\gamma=0.5$ . Соответствующие график зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\nu$  и фазовые портреты представлены на рис. 4. Так же как и в предыдущем случае, при  $\nu > 1.45$

в фазовом пространстве наблюдаются две симметрично расположенные устойчивые неподвижные точки (рис. 4, б). На графике зависимости показателей Ляпунова (рис. 4, а) это отвечает тому, что все показатели отрицательные. Представленные на рис. 4, б аттракторы построены для  $\nu=1.5$ . А вычисленные численно показатели Ляпунова для неподвижной точки  $SP_2^-$  равны соответственно  $\Lambda_1 = -0.007059 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_2 = -0.007060 \pm 0.000001$ ,  $\Lambda_3 = -1.985880 \pm 0.000001$ .

Однако при уменьшении параметра  $\nu$  неподвижные точки не исчезают. Таким образом, в фазовом пространстве сосуществуют уже не два, а четыре аттрактора: две устойчивые неподвижные точки  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  и два устойчивых предельных цикла  $LC_2^-$  и  $LC_2^+$  (рис. 4, в). Аттракторы расположены симметрично парами: предельный цикл и внутри неподвижная точка. При дальнейшем

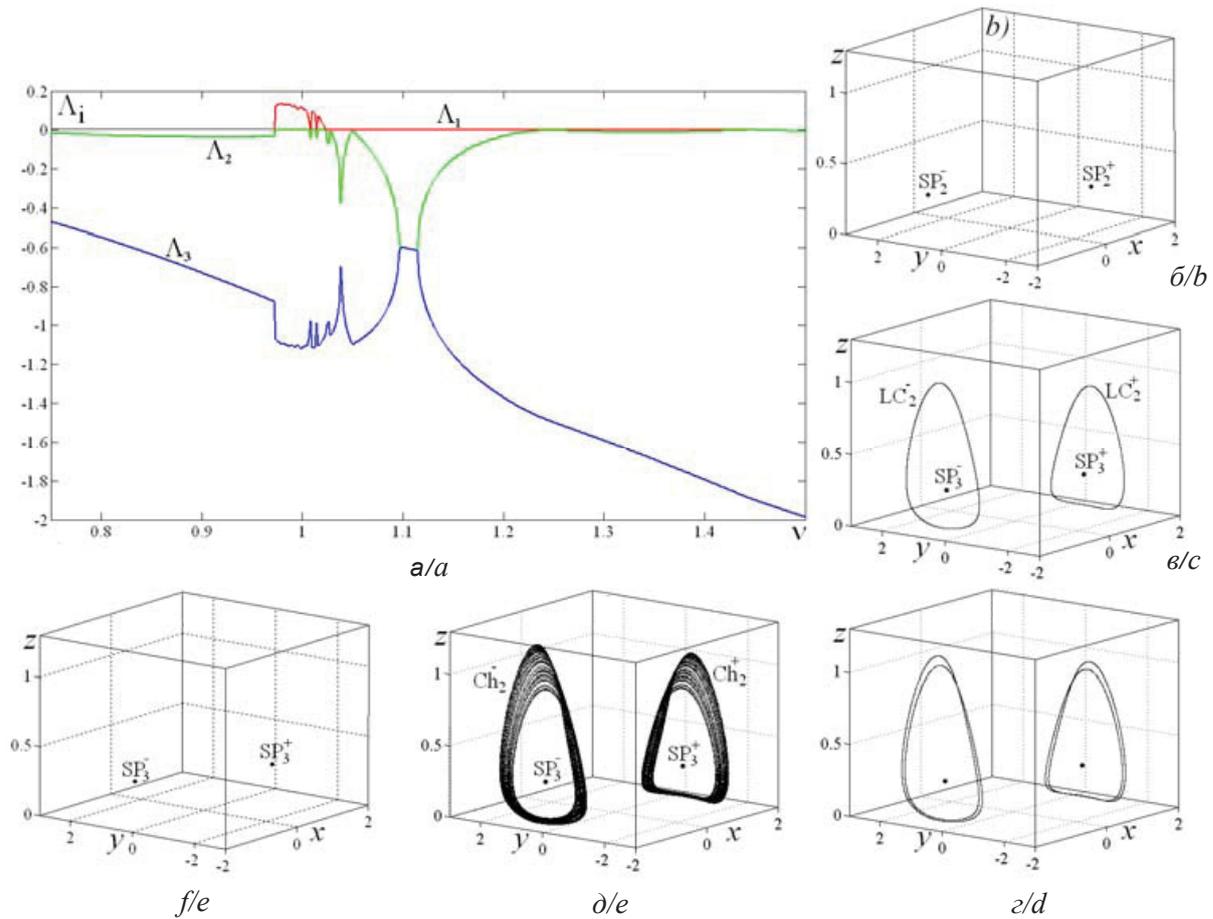


Рис. 4. Зависимость показателей Ляпунова системы Рабиновича – Фабриканта (1) от параметра  $\nu$  для  $\gamma=0.5$  (а). Аттракторы системы Рабиновича – Фабриканта (1) для  $\gamma=0.5$ : б –  $\nu=1.5$ , в –  $\nu=1.1$ , г –  $\nu=1.04$ , д –  $\nu=1.0$ , е –  $\nu=0.9$   
 Fig. 4. Dependences of Lyapunov exponents of the Rabinovich – Fabrikant model (1) on the parameter  $\nu$ ,  $\gamma=0.5$  (a); Attractors of the Rabinovich – Fabrikant model (1) at  $\nu=1.5$  (b),  $\nu=1.1$  (c),  $\nu=1.04$  (d),  $\nu=1.0$  (e),  $\nu=0.9$  (f), for all attractors  $\gamma=0.5$

уменьшении параметра  $\nu$  период цикла удваивается (рис. 4, г), пока, как и в предыдущем случае, не возникнет хаотический аттрактор (рис. 4, д), а старший показатель Ляпунова не станет положительным (рис. 4, а). Для хаотического аттрактора  $Ch_2^-$  были численно получены показатели Ляпунова, которые равны:  $\Lambda_1=0.110261\pm 0.000001$ ,  $\Lambda_2=0.000000\pm 0.000001$ ,  $\Lambda_3=-1.110261\pm 0.000001$ . При этом пара неподвижных точек  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  присутствует на протяжении всех бифуркаций предельных циклов  $LC_2^-$  и  $LC_2^+$ . Соответственно вид графика зависимости показателей Ляпунова от параметра существенно зависит от начальных значений динамических переменных. Так, при построении графика, представленного на рис. 4, а, начальные условия выбирались из бассейна притяжения предельного цикла  $LC_2^-$ . Если и дальше уменьшать параметр  $\nu$ , то хаотический аттрактор разрушается, а в фазовом

пространстве наблюдаются аттракторы в виде симметрично расположенных устойчивых неподвижных точек (рис. 4, е). Это еще одно отличие от случая  $\gamma=0.96$ .

Очевидно, что в данном случае устройство бассейнов притяжения разных аттракторов будет более сложным, чем в случае  $\gamma=0.96$ . Начнем со случая  $\nu=1.5$ , когда в фазовом пространстве сосуществуют две устойчивые неподвижные точки  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$  (рис. 5, а). В этом случае устройство бассейнов притяжения неподвижных точек качественно аналогично случаю для  $\gamma=0.96$  с тем отличием, что внутри островов разбегания на бесконечность появляются очень узкие полосы, представляющие собой бассейн притяжения симметричного режима.

Теперь рассмотрим случай, когда в фазовом пространстве сосуществуют два цикла периода 1:  $LC_2^-$  и  $LC_2^+$  и две неподвижные устойчивые

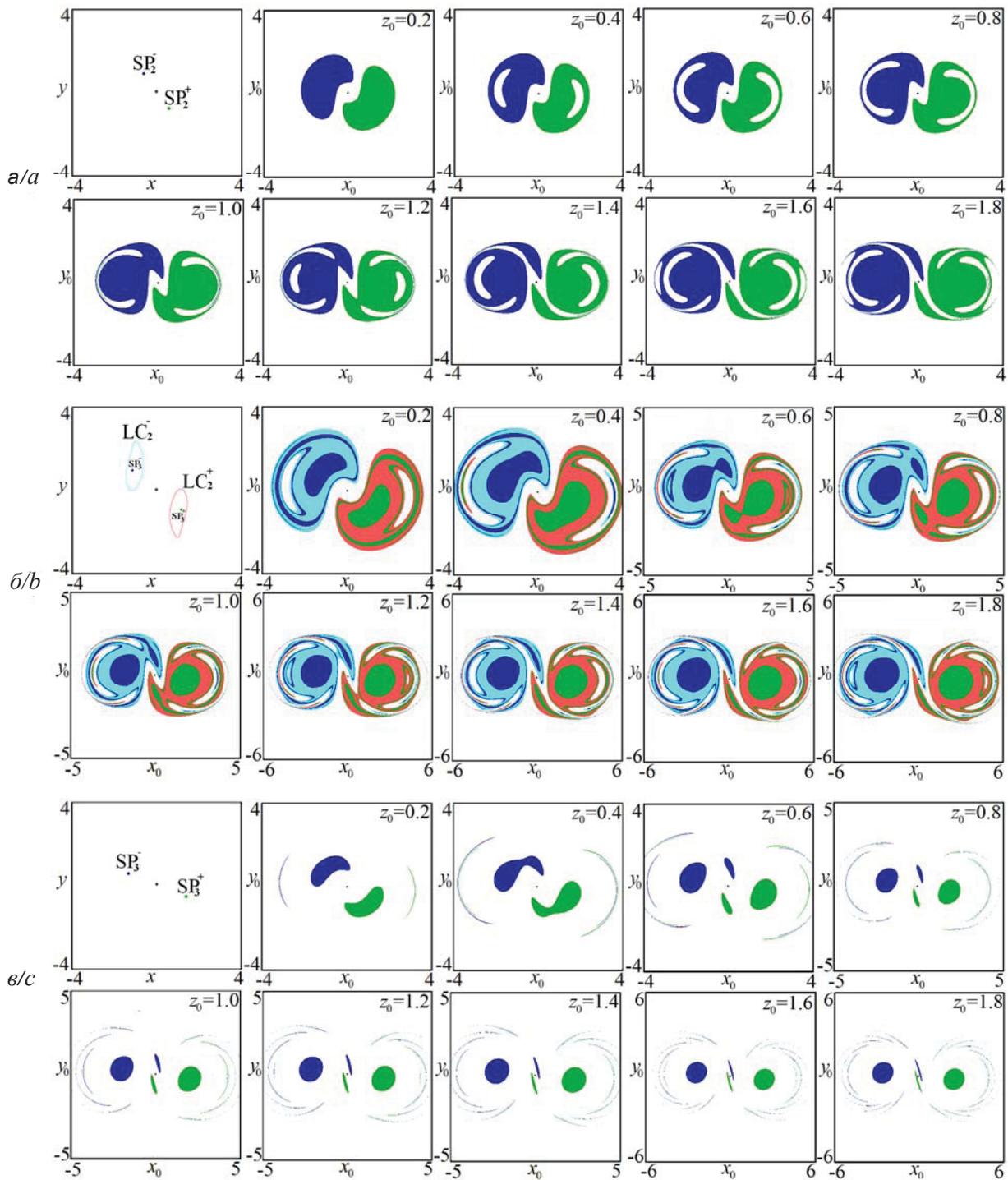


Рис. 5. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения системы Рабиновича – Фабриканта (1) плоскостью  $z_0 = \text{const}$  для  $\gamma=0.5$  и  $\nu=1.5$  (а),  $\nu=1.1$  (б),  $\nu=0.75$  (в). Бассейн притяжения точек  $SP_2^-$  и  $SP_3^-$  окрашен в черный цвет (в электронной версии синий), точек  $SP_2^+$  и  $SP_3^+$  – в темно-серый цвет (в электронной версии зеленый), предельного цикла  $LC_2^-$  – в светло-серый цвет (в электронной версии голубой) и предельного цикла  $LC_2^+$  – в серый цвет (в электронной версии красный)

Fig. 5. Projections of attractors on the  $(x, y)$  plane and sections of their basins of attraction by the  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the Rabinovich – Fabrikant model (1) for  $\gamma=0.5$  and  $\nu=1.5$  (a),  $\nu=1.1$  (b),  $\nu=0.75$  (c). The basins of points  $SP_2^-$  and  $SP_3^-$  are colored to black color (in the electronic version it is blue color), the basins of points  $SP_2^+$  and  $SP_3^+$  are colored to dark grey color (in the electronic version it is green color), the basin of cycle  $LC_2^-$  is colored to light grey color (in the electronic version it is light blue color) and the basin of cycle  $LC_2^+$  is colored to grey color (in the electronic version it is light red color)



точки  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$ . Соответствующие бассейн притяжения и проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  представлены на рис. 5, б. Как и ранее, бассейн окрашивается в тот же цвет, что и соответствующий ему аттрактор. Видно, что уже при небольших значениях динамической переменной  $z_0$  бассейны устроены довольно сложно. Бассейн притяжения неподвижной точки лежит внутри соответствующего бассейна предельного цикла. Также внутри бассейна для предельного цикла наблюдаются острова, отвечающие разбеганию на бесконечность. С ростом динамической переменной  $z_0$  бассейны становятся больше. Острова, отвечающие разбеганию на бесконечность, увеличиваются, а внутри них появляются области, представляющие собой бассейн притяжения симметричного режима и новые острова, отвечающие разбеганию на бесконечность. Помимо этого меняется конфигурация бассейнов: появляется «перешеек», который с ростом  $z_0$  становится все уже и уже, пока (при  $z_0 > 1.2$ ) не разделит их на две части. Если и дальше увеличивать  $z_0$ , то описанная выше процедура повторится. Отметим, что качественное устройство бассейнов притяжения будет таким же и для циклов любых других периодов и для хаотических аттракторов. Однако описанные выше трансформации будут происходить при меньших значениях динамической переменной  $z_0$ .

И, наконец, рассмотрим случай  $v=0.9$ , когда хаотический аттрактор исчез и в фазовом про-

странстве остались лишь устойчивые неподвижные точки  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  (рис. 5, в). В этом случае бассейны довольно маленькие, а большая часть фазового пространства отвечает разбеганию на бесконечность. С ростом переменной  $z_0$  каждый из бассейнов быстро распадается на две области: «круглую», расположенную вдоль линии  $y_0=0$ , и «каплеобразную» – вдоль линии  $x_0=0$ . А справа и слева от основных областей наблюдаются очень узкие «дуги», тоже являющиеся бассейном притяжения соответствующих устойчивых неподвижных точек. При этом наблюдается чередование дуг синего и зеленого цветов, т.е. отвечающих разным неподвижным точкам.

### 1.3. Случай $\gamma = 0.2$

В заключение этого параграфа рассмотрим случай еще меньших значений параметра  $\gamma=0.2$ . В этом случае, двигаясь по плоскости параметров справа налево, мы будем пересекать две области, каждая из которых демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Однако устройство фазового пространства, а соответственно, и вид аттракторов в них будет разным. Сначала, при больших значениях параметра  $v=1.8$  (правая структура), в фазовом пространстве сосуществуют две симметрично расположенные устойчивые неподвижные точки  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  (рис. 6, а). Потом неподвижные точки исчезают, и вместо них рождаются устойчивые предель-

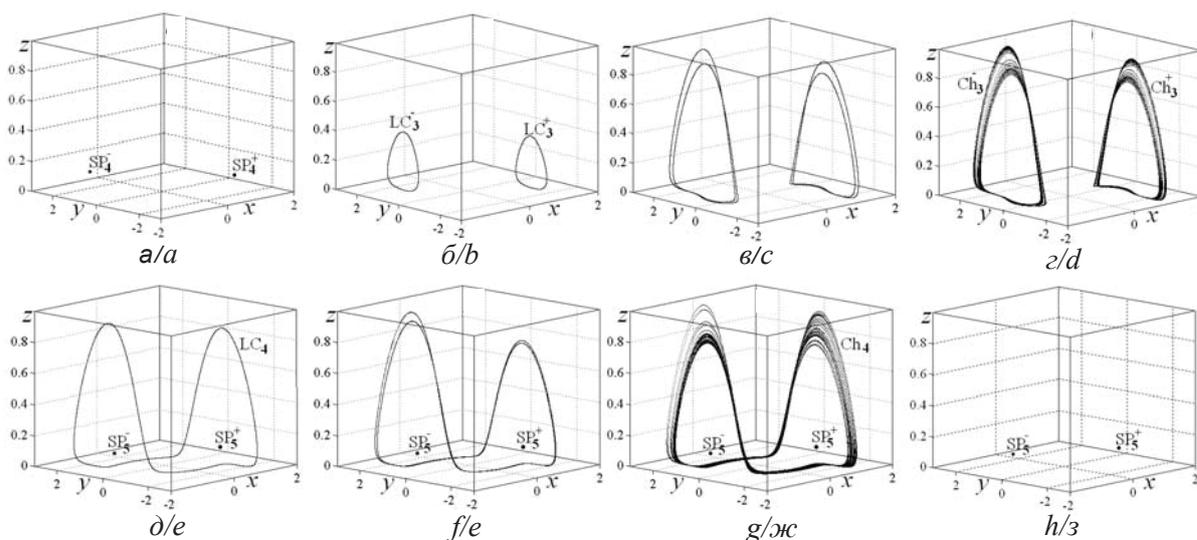


Рис. 6. Аттракторы системы Рабиновича – Фабриканта (1) для  $\gamma=0.2$  и  $v=1.8$  (а),  $v=1.4$  (б),  $v=1.11$  (в),  $v=1.1$  (г),  $v=1.0$  (д),  $v=0.97$  (е),  $v=0.965$  (ж),  $v=0.8$  (з)

Fig. 6. Attractors of the Rabinovich–Fabrikant model (1) at  $v=1.8$  (a),  $v=1.4$  (b),  $v=1.11$  (c),  $v=1.1$  (d),  $v=1.0$  (e),  $v=0.97$  (f),  $v=0.965$  (g),  $v=0.8$  (h), for all attractors  $\gamma=0.2$



ные циклы периода 1  $LC_3^-$  и  $LC_3^+$  соответственно (рис. 6, б), которые в результате последовательности бифуркаций удвоения периода (рис. 6, в) превращаются в хаотические аттракторы  $Ch_3^-$  и  $Ch_3^+$  (рис. 6, з). Таким образом, устройство фазового пространства аналогично случаю  $\gamma=0.96$  (сравним рис. 2, б–д и рис. 6, а–з). А вот бассейны притяжения в этом случае будут отличаться от бассейнов, построенных для случая  $\gamma=0.96$ .

Так, на рис. 7 представлены бассейны притяжения для случая, когда в фазовом пространстве сосуществуют две симметрично расположенные устойчивые неподвижные точки  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$ . Из рисунка видно, что в отличие от случая  $\gamma=0.96$  (см. рис. 3) бассейны притяжения больше по размеру. И если на рис. 5, а бассейны притяжения располагались на некотором расстоянии друг от друга (были разделены областью

убегания траектории на бесконечность), то теперь их границы касаются друг друга. Границей между ними, очевидно, является многообразие неустойчивой точки типа фокус, расположенной в начале координат. С ростом динамической переменной  $z_0$ , как слева и справа от окружности, так и внутри нее, появляются новые области, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора. (Внутри области темно-серого (зеленого в электронной версии) цвета и справа от нее появляется область черного (в электронной версии синего) цвета, а внутри черной и слева от нее – темно-серая.) При этом чем больше  $z_0$ , тем больше чередующихся областей наблюдается. Отметим, что вид бассейнов притяжения для предельных циклов разного периода и хаотического аттрактора такой же, как и для неподвижных точек.

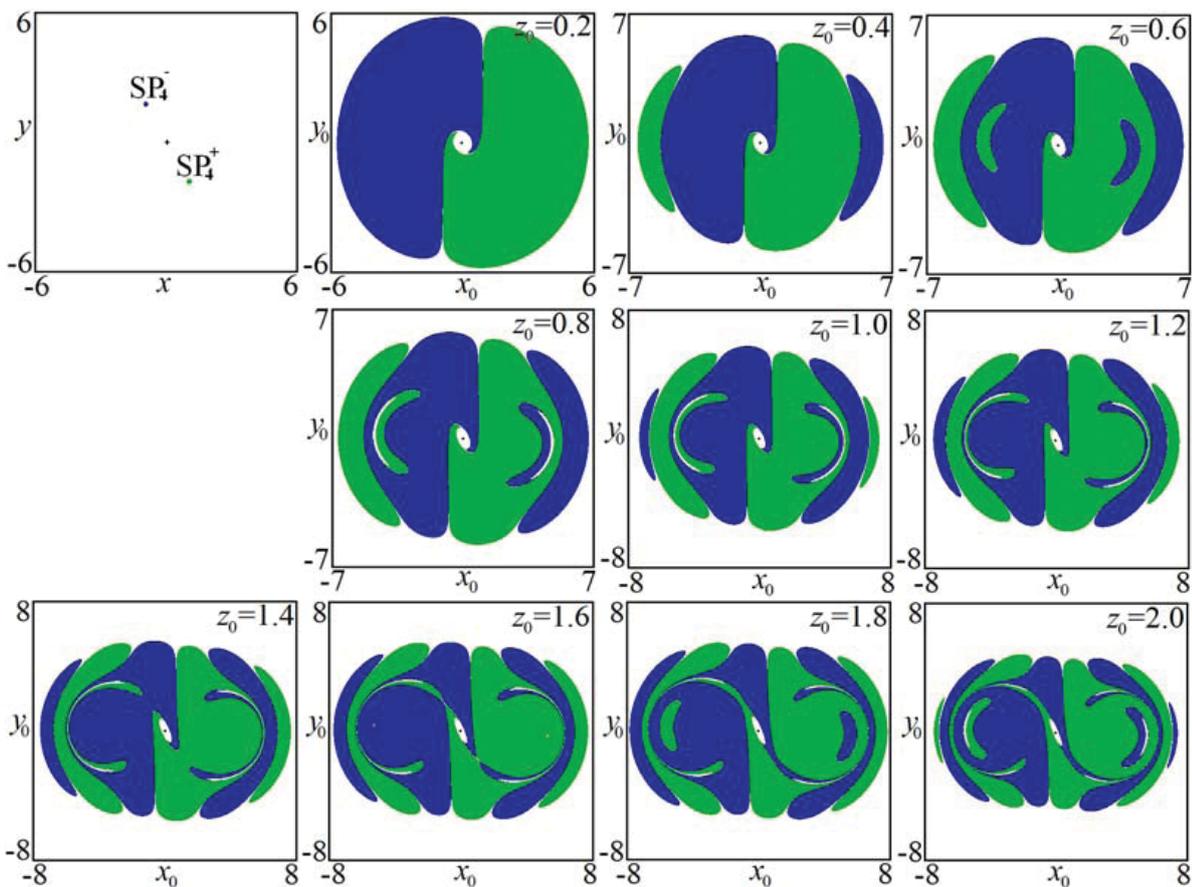


Рис. 7. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения системы Рабиновича – Фабриканта (1) плоскостью  $z_0=\text{const}$ .  $\gamma=0.2$ ,  $\nu=1.8$ . Бассейн притяжения точки  $SP_4^-$  окрашен в черный (в электронной версии синий) цвет, а точки  $SP_4^+$  – в темно-серый (в электронной версии зеленый) цвет

Fig. 7. Projection of attractors on the  $(x, y)$  plane and sections of their basins by the  $z_0=\text{const}$  plane plotted for the Rabinovich – Fabrikant model (1).  $\gamma=0.2$ ,  $\nu=1.8$ . The basin of point  $SP_1^-$  is colored to black color (blue color in the electronic version) and the basin of point  $SP_1^+$  is colored to dark grey color (green color in the electronic version)



И, наконец, рассмотрим динамику системы (1) внутри левой структуры, которую мы пересекаем, двигаясь по плоскости параметров вдоль линии  $\gamma=0.2$ . Аттракторы для этого случая представлены на рис. 6,  $\delta$ – $з$ . Сначала при  $\nu=1.0$  в фазовом пространстве наблюдаются три аттрактора: две симметрично расположенные устойчивые неподвижные точки  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$  и предельный цикл периода 1  $LC_4$  (рис. 6,  $\delta$ ). Однако, если ранее предельный цикл (два симметрично расположенных цикла) был типа наблюдаемых в системе Ресслера, то теперь имеет место цикл, характерный для системы Лоренца. Этот цикл при уменьшении параметра  $\nu$  претерпевает последовательность бифуркаций удвоения

периода (рис. 6,  $e$ ), в результате которых возникает хаотический аттрактор  $Ch_4$  (рис. 6,  $ж$ ). Если и дальше уменьшать параметр  $\nu$ , то хаотический аттрактор исчезает, и в фазовом пространстве остаются две симметрично расположенные устойчивые неподвижные точки (рис. 6,  $з$ ).

На рис. 8,  $a$  представлены бассейны притяжения, построенные для случая  $\nu=0.965$ , когда в фазовом пространстве сосуществуют хаотический аттрактор  $Ch_4$  и две симметрично расположенные устойчивые неподвижные точки  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$  (см. рис. 6,  $ж$ ). В этом случае бассейн притяжения хаотического аттрактора представляет собой окружность. При очень малых значениях динамической переменной

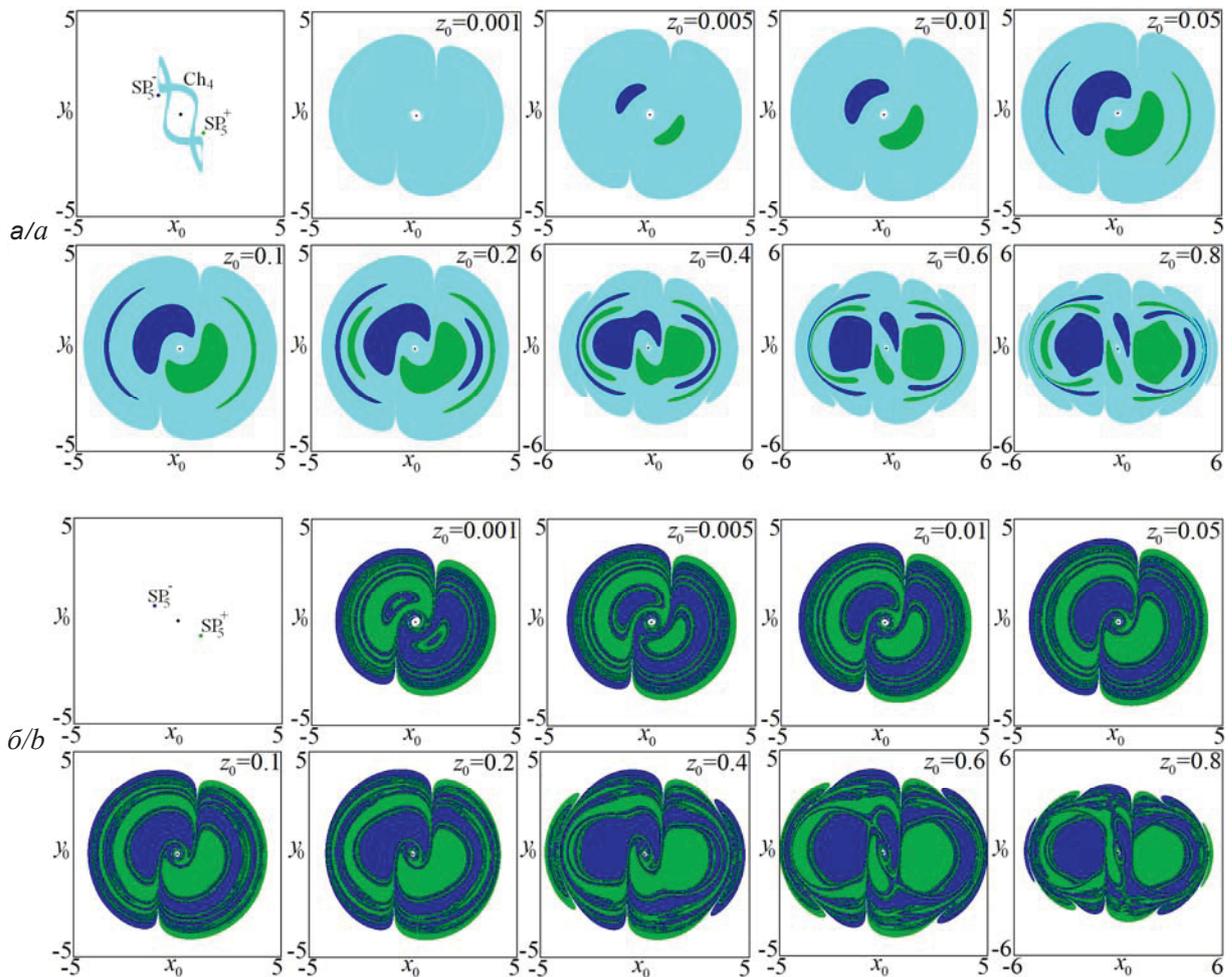


Рис. 8. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения системы Рабиновича – Фабриканта (1) плоскостью  $z_0=\text{const}$  для  $\gamma=0.2$  и  $\nu=0.965$  (а),  $\nu=0.8$  (б). Бассейн притяжения точки  $SP_5^-$  окрашен в черный (в электронной версии синий) цвет, точки  $SP_5^+$  – в темно-серый (в электронной версии зеленый) цвет, хаотического аттрактора  $Ch_4$  – в светло-серый (в электронной версии голубой) цвет

Fig. 8. Projections of attractors on the  $(x, y)$  plane and sections of their basins by the  $z_0=\text{const}$  plane plotted for the Rabinovich – Fabrikant model (1).  $\gamma=0.2$ ,  $\nu=0.965$  (a),  $\nu=0.8$  (b). The basin of point  $SP_5^-$  is colored to black color (blue color in the electronic version), the basin of point  $SP_5^+$  is colored to dark grey color (green color in the electronic version), the basin of chaotic attractor  $Ch_4$  is colored to light grey color (light blue color in the electronic version)



$z_0 \approx 0.001$  бассейнов притяжения неподвижных точек не наблюдается. С ростом  $z_0$  они появляются – сначала две овальные области, которые с ростом  $z_0$  увеличиваются в размере, искривляются, у них образуется перешеек, после исчезновения которого каждая из них распадается еще на две области. Потом справа и слева от овальных областей, появляются узкие дуги, число которых с ростом  $z_0$  увеличивается, а цвета чередуются. Отметим, что конфигурация бассейнов притяжения в случаях, когда сосуществуют предельный цикл различных периодов и две неподвижные точки будет такой же. Если же теперь перейти к случаю  $v=0.8$  (рис. 8, б), когда хаотический аттрактор исчез и остались две симметрично расположенные устойчивые неподвижные точки  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$ , то их бассейны образуют «окружность» с фрактальной структурой, состоящую из бесконечного числа чередующихся областей, отвечающих разным точкам.

## 2. Бифуркационный анализ системы Рабиновича–Фабриканта

Очевидно, что система Рабиновича–Фабриканта (1), несмотря на довольно простые уравнения, богата на бифуркации. Для нее был проведен численный поиск бифуркационных линий с помощью программы Matcont. Соответствующая бифуркационная диаграмма представлена на рис. 9, а. Она хорошо согласуется с картой динамических режимов, представленной на рис. 1.

На бифуркационной диаграмме можно выделить четыре сценария, которые полностью объясняют динамику системы (1). Первый сценарий наблюдается при любых значениях параметра  $\gamma$  при движении по плоскости справа налево и состоит в следующем. На линии SN в результате седло-узловой бифуркации рождаются устойчивая и неустойчивая неподвижные точки. Далее устойчивая неподвижная точка становится неустойчивой на линии  $H_1$  в результате бифур-

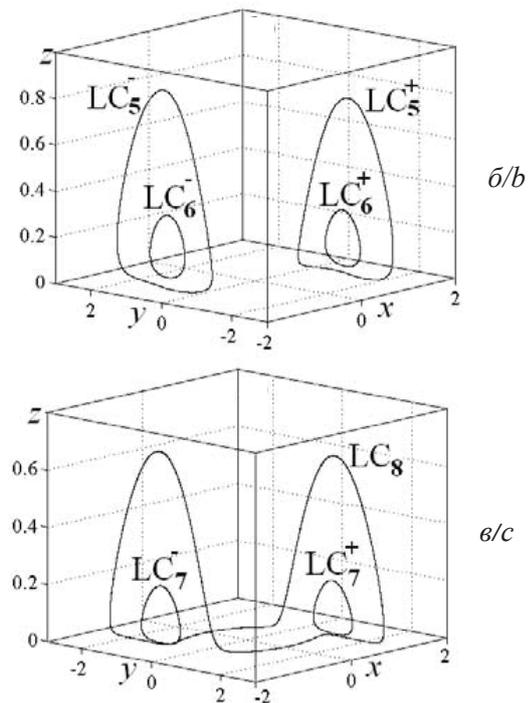
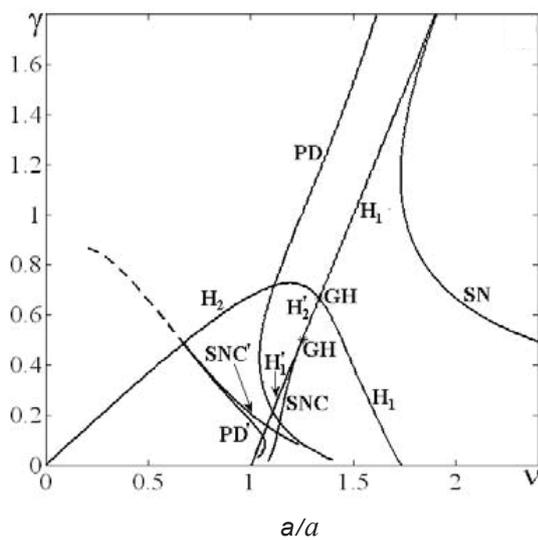


Рис. 9. Бифуркационные линии и точки системы Рабиновича – Фабриканта (1) на плоскости  $(v, \gamma)$  (а): SN – седло-узловая бифуркация неподвижной точки, SNC – седло-узловая бифуркация предельных циклов,  $H_1$  – прямая бифуркация Андронова – Хопфа,  $H_2$  – обратная бифуркация Андронова – Хопфа, PD – бифуркация удвоения периода предельных циклов, GH – обобщенная точка бифуркации Андронова – Хопфа. Аттракторы системы Рабиновича – Фабриканта (1):  $\gamma=0.25$  и  $v=1.15$  (б);  $\gamma=0.1$  и  $v=1.1$  (в)

Fig. 9. Bifurcation lines and points of the Rabinovich – Fabrikant model (1) on the  $(\gamma, v)$  parameter plane (a). SN is a saddle-node bifurcation of a fixed point, SNC is a saddle-node bifurcation of limit cycles,  $H_1$  is a direct Hopf bifurcation,  $H_2$  is an inverse Hopf bifurcation, PD is a period doubling bifurcation of limit cycles, GH is a generalized point of the Hopf bifurcation. Attractors of the Rabinovich – Fabrikant model (1) at  $\gamma=0.25$  and  $v=1.15$  (b);  $\gamma=0.1$  and  $v=1.1$  (c)



кации Андронова – Хопфа. При этом в системе рождается устойчивый предельный цикл, период которого удваивается на линии бифуркации удвоения периода PD. Как следует из вида карты динамических режимов (см. рис. 1), далее будет иметь место каскад бифуркаций удвоений периода, в результате которого в системе (1) возникает хаотический аттрактор. Этому сценарию отвечают аттракторы, представленные на рис. 2, б–д.

Второй сценарий имеет место при движении по плоскости параметров слева направо в области  $0.5 < \gamma < 0.7$  (область между двумя точками GH). Этот сценарий состоит в следующем. В результате обратной бифуркации Андронова – Хопфа на линии  $H_2$  рождается устойчивая неподвижная точка и неустойчивый предельный цикл, которые исчезнут в результате еще одной обратной бифуркации Андронова – Хопфа на линии  $H'_2$ . Однако, так как линия  $H'_2$  лежит между линиями PD и  $H_1$ , то в системе (1) будет иметь место бистабильность: устойчивая неподвижная точка сосуществует с устойчивыми циклами разного периода или хаосом, возникшими из устойчивой неподвижной точки, родившейся в результате седло-узловой бифуркации на линии SN (см. рис. 4, б–е).

Если же двигаться по плоскости параметров слева направо в области  $\gamma < 0.5$ , то описанный выше сценарий изменится. Устойчивая неподвижная точка, возникшая в результате обратной бифуркации Андронова – Хопфа на линии  $H_2$ , станет неустойчивой на линии  $H'_1$  в результате прямой бифуркации Андронова – Хопфа, а в системе возникнет устойчивый предельный цикл. В дальнейшем он исчезнет в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов на линии SNC, слившись с неустойчивым предельным циклом, родившимся в результате обратной бифуркации Андронова – Хопфа на линии  $H_2$ .

И, наконец, последний сценарий наблюдается при движении справа налево в области  $v < 1.5$ . На линии  $SNC'$  в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов рождаются устойчивый и неустойчивый предельные циклы. Пример такого цикла представлен на рис. 6, е. Далее на линии PD' период цикла удвоится. В дальнейшем, как следует из вида карты динамических режимов (см. рис. 1), будет иметь место каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого в системе (1) возникает хаос.

Отметим, что взаимное расположение бифуркационных линий в области  $\gamma < 0.5$  и  $1 < v < 1.5$  таково, что в системе (1) может существовать еще несколько вариантов бистабильности помимо тех, которые описаны в предыдущем параграфе. (Линии прямой бифуркации Андронова – Хопфа  $H'_1$  и седло-узловой бифуркации предельных циклов SNC, выходящие из обобщенной точки бифуркации Андронова – Хопфа GH, при уменьшении параметра  $\gamma$  последовательно пересекают бифуркационные линии PD и PD' – бифуркация удвоения периода предельных циклов и  $SNC'$  – седло-узловая бифуркация предельных циклов.) Например, если параметр  $\gamma$  лежит в области от 0.2 до 0.5, то в системе (1) сосуществуют две пары симметрично расположенных устойчивых предельных циклов (рис. 9, б). Этот вариант бистабильности имеет место в области между бифуркационными линиями  $H'_1$  и SNC и выше линии PD. Другой случай бистабильности, когда сосуществуют три устойчивых предельных цикла (рис. 9, в), два из которых симметрично расположены. Этот вариант имеет место в области между бифуркационными линиями  $H'_1$  и SNC, а параметр  $\gamma < 0.2$ . Также можно подобрать такие значения параметров  $\gamma$  и  $v$ , чтобы в фазовом пространстве сосуществовали устойчивый предельный цикл периода 1 и устойчивые предельные циклы периода 2, 4, 8 и т.д. или хаотический аттрактор. Можно найти и другие варианты бистабильности, но области в пространстве параметров, где они наблюдаются, будут совсем невелики.

### Заключение

В работе численно исследована модельная система Рабиновича – Фабриканта. Для нее построены карта динамических режимов, зависимости показателей Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. Кроме того, для нее были найдены основные бифуркации неподвижных точек и предельных циклов периода 1.

Исследование показало, что система Рабиновича – Фабриканта обладает богатой динамикой. Во-первых, для нее наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения предельного цикла. Во-вторых, система Рабиновича – Фабриканта демонстрирует мультистабильность. В фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разного типа. В за-



висимости от значений параметров можно выделить несколько комбинаций сосуществующих аттракторов, например: устойчивая неподвижная точка и предельный цикл, период цикла может быть любым (или хаотический аттрактор); два предельных цикла разного типа и периода; предельный цикл и хаотический аттрактор и т.д. Кроме того, так как система Рабиновича – Фабриканта обладает симметрией относительно замены переменных  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ , то все аттракторы имеют симметричную пару или обладают соответствующей симметрией.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-12-01008).

### Список литературы

1. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Стохастическая автотомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
2. Danca M.-F., Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, № 10. P. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430
3. Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, № 2. P. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383
4. Liu Y., Yang Q., Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, № 1. P. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008
5. Agrawal S. K., Srivastava M., Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 69, № 4. P. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y
6. Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38, № 13. P. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054
7. Danca M.-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86, № 2. P. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3
8. Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich – Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, № 1. P. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1
9. Luo X., Small M., Danca M.-F., Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, № 9. P. 3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993
10. Dutta M., Nusse H. E., Ott E., Yorke J. A. Multiple attractor bifurcations : A source of unpredictability in piecewise smooth systems // Physical Review Letters. 1999. Vol. 83, № 21. P. 4281. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4281
11. Carroll T. L., Pecora L. M. Using multiple attractor chaotic systems for communication // Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1999. Vol. 9, № 2. P. 445–451. DOI: 10.1063/1.166425
12. Lowenberg M. H. Bifurcation analysis of multiple attractor flight dynamics // Philosophical Transactions – Royal Society of London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1998. P. 2297–2319. DOI: 10.1098/rsta.1998.0275
13. Zhou N. F., Luo J. W., Cai Y. J. Implementation and simulation of chaotic behavior of multiple-attractor generated by a physical pendulum // Journal-Zhejiang University-Sciences Edition. 2001. Vol. 28, № 1. P. 42–45.
14. Lu J., Yu X., Chen G. Generating chaotic attractors with multiple merged basins of attraction : A switching piecewise-linear control approach // IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications. 2003. Vol. 50, № 2. P. 198–207. DOI: 10.1109/TCSI.2002.808241
15. Lu J., Chen G., Cheng D. A new chaotic system and beyond : The generalized Lorenz-like system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, № 5. P. 1507–1537. DOI: 10.1142/S021812740401014X
16. Liu W., Chen G. Can a three-dimensional smooth autonomous quadratic chaotic system generate a single four-scroll attractor? // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, № 4. P. 1395–1403. DOI: 10.1142/S0218127404009880
17. Qi G., Du S., Chen G., Chen Z., Yuan Z. On a four-dimensional chaotic system // Chaos, Solitons & Fractals. 2005. Vol. 23, № 5. P. 1671–1682. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.054
18. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE transactions on circuits and systems. 1986. Vol. 33, № 11. P. 1072–1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869

### Образец для цитирования:

Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича – Фабриканта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 4–18. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18>



## Complex Dynamics and Chaos in the Rabinovich – Fabrikant Model

A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, L. V. Turukina

Alexander P. Kuznetsov, <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>, Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, 38 Zelenaya Str., Saratov 410019, Russia, [apkuz@rambler.ru](mailto:apkuz@rambler.ru)

Sergey P. Kuznetsov, <https://orcid.org/0000-0003-4506-9864>, Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, 38 Zelenaya Str., Saratov 410019, Russia, [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

Ludmila V. Turukina, <https://orcid.org/0000-0002-4221-8900>, Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, 38 Zelenaya Str., Saratov, 410019, Russia, [turukinalv@yandex.ru](mailto:turukinalv@yandex.ru)

**Background and Objectives:** In the work we consider a finite-dimensional three-mode model of the nonlinear parabolic equation. It was proposed in 1979 by M. I. Rabinovich and A. L. Fabrikant. It describes the stochasticity arising from the modulation instability in a non-equilibrium dissipative medium with a spectrally narrow amplification increment. The Rabinovich – Fabrikant system presents some extremely rich dynamics due to the third-order nonlinearities presented in the equations. The considered system is universal. Despite the fact that it was developed as a physical model describing stochasticity in a non-equilibrium dissipative medium, it can simulate various physical systems, in which the three-mode interaction takes place and there is a cubic nonlinearity. Some of these systems have obvious applications, such as the Tollmien – Schlichting waves in hydrodynamic flows, wind waves on water, concentration waves during chemical reactions in a medium where diffusion occurs, Langmuir waves in plasma, etc. In addition, the Rabinovich – Fabrikant model can also simulate radio engineering systems that allow both analog simulation and implementation in a radio engineering device. **Materials and Methods:** The methodological apparatus of the study uses numerical methods for integrating differential equations, methods for calculating Lyapunov exponents, and the numerical bifurcation analysis using the MatCont. **Results:** For the Rabinovich – Fabrikant system we present a diagram of dynamic regimes in the parameter plane, Lyapunov exponents depending on parameters, portraits of attractors and their basins of attractions. Additionally we plot numerically bifurcations lines in the parameter plane. They are plotted for stable points and period one limit cycles. It is shown that Rabinovich – Fabrikant models demonstrate transitions to chaos through the period-doubling bifurcation scenario for a limit cycle, which resulted from a direct Hopf bifurcation. The essential multistability also takes place in Rabinovich – Fabrikant models. In this case different types of attractors coexist. **Conclusion:** In the present work we have numerically studied Rabinovich – Fabrikant models. We have shown that this model has a rich dynamics: transitions to chaos through the period-doubling bifurcation scenario; the fractal structure of attractors' basins; multistability. Depending on the parameters values, several combinations of coexisting attractors can be distinguished: a stable fixed point and a limit cycle; two

limit cycles of different types; a limit cycle and a chaotic attractor; two chaotic attractors, etc. The last case is most interesting since chaotic systems with multiple attractors have received increasing attention in recent years because of their great impact on both theoretical analysis and engineering applications.

**Keywords:** Rabinovich – Fabrikant models, chaotic attractors, multistability, bifurcation analysis.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-12-01008).

## References

1. Rabinovich M. I., Fabrikant A. L. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1979, vol. 77, pp. 617–629.
2. Danca M.-F., Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, vol. 14, no. 10, pp. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430
3. Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich-Fabrikant system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383
4. Liu Y., Yang Q., Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, vol. 234, no. 1, pp. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008
5. Agrawal S. K., Srivastava M., Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich – Fabrikant and Lotka – Volterra systems. *Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 69, no. 4, pp. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y
6. Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich – Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich – Fabrikant system. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, vol. 38, no. 13, pp. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054
7. Danca M.-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich – Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 86, no. 2, pp. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3
8. Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich – Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 88, no. 1, pp. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1
9. Luo X., Small M., Danca M.-F., Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, vol. 17, no. 9, pp. 3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993
10. Dutta M., Nusse H. E., Ott E., Yorke J. A. Multiple attractor bifurcations: A source of unpredictability in piecewise smooth systems. *Physical Review Letters*, 1999, vol. 83, no. 21, pp. 4281. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4281
11. Carroll T. L., Pecora L. M. Using multiple attractor chaotic systems for communication. *Chaos: An Inter-*



- disciplinary Journal of Nonlinear Science*, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 445–451. DOI: 10.1063/1.166425
12. Lowenberg M. H. Bifurcation analysis of multiple attractor flight dynamics. *Philosophical Transactions – Royal Society of London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, pp. 2297–2319. DOI: 10.1098/rsta.1998.0275
13. Zhou N. F., Luo J. W., Cai Y. J. Implementation and simulation of chaotic behavior of multiple-attractor generated by a physical pendulum. *Journal-Zhejiang University-Sciences Edition*, 2001, vol. 28, no. 1, pp. 42–45.
14. Lu J., Yu X., Chen G. Generating chaotic attractors with multiple merged basins of attraction: A switching piecewise-linear control approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, vol. 50, no. 2, pp. 198–207. DOI: 10.1109/TCSI.2002.808241
15. Lu J., Chen G., Cheng D. A new chaotic system and beyond: The generalized Lorenz-like system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, vol. 14, no. 5, pp. 1507–1537. DOI: 10.1142/S021812740401014X
16. Liu W., Chen G. Can a three-dimensional smooth autonomous quadratic chaotic system generate a single four-scroll attractor? *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, vol. 14, no. 4, pp. 1395–1403. DOI: 10.1142/S0218127404009880
17. Qi G., Du S., Chen G., Chen Z., Yuan Z. On a four-dimensional chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 23, no. 5, pp. 1671–1682. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.054
18. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1986, vol. 33, no. 11, pp. 1072–1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869

**Cite this article as:**

Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Turukina L. V. Complex Dynamics and Chaos in the Rabinovich–Fabrikant Model. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 4–18 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18>