



## ФИЗИКА

УДК 621.37:512.64

### МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ МНОГОСВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

А. В. Хохлов

Саратовский государственный университет  
E-mail: av@chaos.ssu.runnet.ru

Представлено матричное описание многосвязанных колебательных систем на основе трехдиагональных матриц с преобладанием диагональных элементов. Рассчитаны собственные частоты полосового фильтра из входного узла дифференциально-коммутирующего радиополяриметра.

**Ключевые слова:** многосвязанные системы, трехдиагональные матрицы, дифференциально-коммутирующий поляриметр.

#### Matrix Description of Multicoupled Oscillatory Systems Based on Tridiagonal Matrixes

A. V. Khokhlov

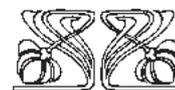
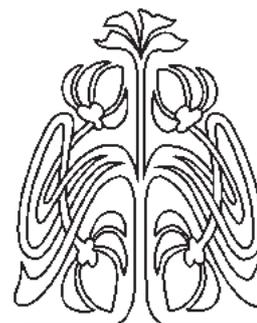
The matrix description of multicoupled oscillatory systems is presented on the base of tridiagonal matrixes with dominating diagonale elements. The eigenfrequencies of a band-pass filter one calculated for the input node of a differential-gated radiopolarimeter.

**Key words:** multicoupled systems, tridiagonal matrix, differential-gated radiopolarimeter.

#### Введение

Цепи из однородных последовательно связанных колебательных систем широко применяются в радиоэлектронике для создания фильтрующих цепей, линий задержки, фазовращателей [1] и используются в качестве моделей полосковых и волноводных устройств. Анализ физических процессов в многоконтурных связанных системах весьма сложен и характеризуется большим числом независимых переменных. Для упрощения анализа многоконтурные системы представляют в виде совокупности связанных одноконтурных подсистем [2], каждая из которых полностью описывается одной переменной. Образуется система однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Расчет собственных частот многоконтурных систем и их частотных характеристик вызывает значительные трудности. Безусловно, расчет любых сложных систем можно выполнить на РС, но при этом не всегда удастся оценить роль и влияние отдельных элементов на характеристики системы в целом.

При расчете и настройке сложных цепей из последовательно связанных элементов часто используется матричное описание последних. Основная трудность, с которой сталкиваются исследователи последовательно связанных элементов, – это большое число параметров, влияя на которые можно получать системы с различными



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





свойствами. В одной из ранних работ [3] мы уже использовали матричные методы при расчете матриц когерентности во входной цепи дифференциально-поляризованного радиополяриметра.

В настоящей статье рассматривается применение разработанной автором методики матричного описания многоконтурных колебательных систем [4] на случай последовательно связанных цепей, используемых, в частности, во входных узлах радиополяриметров, и обосновывается использование трехдиагональных матриц как

эффективного способа описания и расчета систем из последовательно связанных параллельных колебательных контуров.

### Дифференциальные уравнения и матричное описание системы

Пусть на входе системы однородных элементов, содержащей  $n$  параллельных контуров, связанных друг с другом последовательностью параллельных контуров (рис. 1), действует источник тока  $J_1$ .

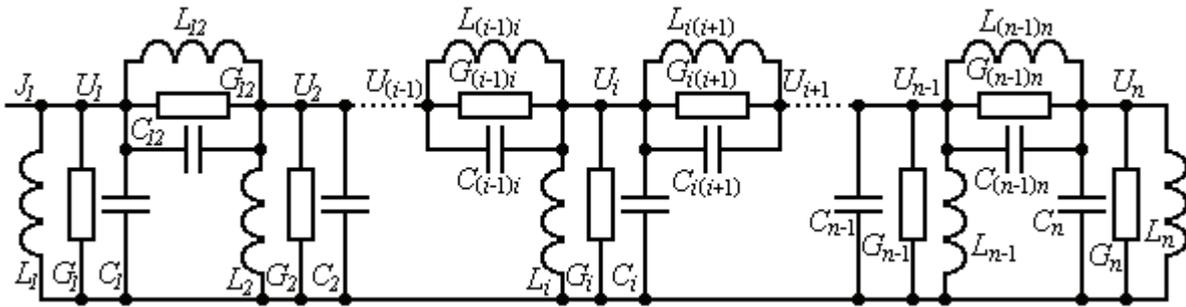


Рис. 1. Схема однородной последовательности  $n$  связанных контуров

Для построения системы дифференциальных уравнений воспользуемся методом узловых напряжений и введем в узлах цепи напряжения

$U_1, U_2, \dots, U_n$ . Тогда в каждом из узлов цепи можно записать интегродифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \frac{dU_1}{dt} + G_1 U_1 + \frac{1}{L_1} \int U_1 dt + C_{12} \frac{d}{dt} (U_1 - U_2) + G_{12} (U_1 - U_2) + \frac{1}{L_{12}} \int (U_1 - U_2) dt = J_1, \\
 & C_{(i-1)i} \frac{d}{dt} (U_i - U_{i-1}) + G_{(i-1)i} (U_i - U_{i-1}) + \frac{1}{L_{(i-1)i}} \int (U_i - U_{i-1}) dt + C_i \frac{dU_i}{dt} + G_i U_i + \frac{1}{L_i} \int U_i dt + \\
 & + C_{i(i+1)} \frac{d}{dt} (U_i - U_{i+1}) + G_{i(i+1)} (U_i - U_{i+1}) + \frac{1}{L_{i(i+1)}} \int (U_i - U_{i+1}) dt = 0, \\
 & C_{(n-1)n} \frac{d}{dt} (U_{n-1} - U_n) + R_{(n-1)n} (U_{n-1} - U_n) + \frac{1}{L_{(n-1)n}} \int (U_{n-1} - U_n) dt + \\
 & + C_n \frac{dU_n}{dt} + R_n U_n + \frac{1}{L_n} \int U_n dt = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Дифференцируя уравнение  $i$ -го контура по времени и вводя обозначения

$$C_{i\Sigma} = C_{(i-1)i} + C_i + C_{i(i+1)}, \quad G_{i\Sigma} = G_{(i-1)i} + G_i + G_{i(i+1)}, \quad 1/L_{i\Sigma} = 1/L_{(i-1)i} + 1/L_i + 1/L_{i(i+1)},$$

получим:

$$\begin{aligned}
 & -C_{(i-1)i} \frac{d^2 U_{i-1}}{dt^2} - G_{(i-1)i} \frac{dU_{i-1}}{dt} - \frac{1}{L_{(i-1)i}} U_{i-1} + C_{i\Sigma} \frac{d^2 U_i}{dt^2} + G_{i\Sigma} \frac{dU_i}{dt} + \frac{1}{L_{i\Sigma}} U_i - \\
 & - C_{i(i+1)} \frac{d^2 U_{i+1}}{dt^2} - G_{i(i+1)} \frac{dU_{i+1}}{dt} - \frac{1}{L_{i(i+1)}} U_{i+1} = \frac{dJ_i}{dt},
 \end{aligned}$$

где  $C_{i\Sigma}$ ,  $G_{i\Sigma}$  и  $L_{i\Sigma}$  – результирующие параметры  $i$ -го контура с учетом контуров связи. Если обе

части равенства разделить на  $C_{i\Sigma}$ , то получим уравнение  $i$ -го контура в виде



$$\frac{d^2U_i}{dt^2} + \alpha_i \frac{dU_i}{dt} + \omega_{0i}^2 U_i - k_{(i-1)i}^C \frac{d^2U_{i-1}}{dt^2} - \alpha_{(i-1)i} \frac{dU_{i-1}}{dt} - \omega_{0i}^2 k_{(i-1)i}^L U_{i-1} - k_{i(i+1)}^C \frac{d^2U_{i+1}}{dt^2} - \alpha_{i(i+1)} \frac{dU_{i+1}}{dt} - \omega_{0i}^2 k_{i(i+1)}^L U_{i+1} = 0,$$

где  $\alpha_i = \frac{G_{i\Sigma}}{C_{i\Sigma}}$ ,  $\omega_{0i}^2 = \frac{1}{L_{i\Sigma} C_{i\Sigma}}$  – параметры  $i$ -го контура,

$$k_{(i-1)i}^C = -\frac{C_{(i-1)i}}{C_{i\Sigma}}, \alpha_{(i-1)i} = -\frac{G_{(i-1)i}}{C_{i\Sigma}}, k_{(i-1)i}^L = -\frac{L_{i\Sigma}}{L_{(i-1)i}}$$

– коэффициенты связи и переходное затухание  $(i-1)$ -го и  $i$ -го контуров,  $k_{i(i+1)}^C = -\frac{C_{i(i+1)}}{C_{i\Sigma}}$ ,

$\alpha_{i(i+1)} = -\frac{G_{i(i+1)}}{C_{i\Sigma}}$ ,  $k_{i(i+1)}^L = -\frac{L_{i\Sigma}}{L_{i(i+1)}}$  – коэффициенты связи и переходное затухание  $i$ -го и  $(i+1)$ -го

контуров. Используя введенные обозначения, можно представить уравнения (1) в матричной форме:

$$\left\| \frac{dJ}{dt} \right\| = \|K^C\| \times \left\| \frac{d^2U}{dt^2} \right\| + \|A\| \times \left\| \frac{dU}{dt} \right\| + \|K^L\| \times \|U\|, \quad (2)$$

$$\text{где } \|K^C\| = \begin{pmatrix} 1 & k_{12}^C & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21}^C & 1 & k_{23}^C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{32}^C & 1 & k_{34}^C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & k_{(n-2)(n-1)}^C & 1 & k_{(n-1)n}^C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{(n-1)n}^C & 1 \end{pmatrix}, \quad \left\| \frac{dJ}{dt} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{dJ_1}{dt} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\| \frac{dU}{dt} \right\| = \begin{pmatrix} dU_1/dt \\ dU_2/dt \\ dU_3/dt \\ \vdots \\ dU_{n-1}/dt \\ dU_n/dt \end{pmatrix},$$

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_2 & \alpha_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_3 & \alpha_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{(n-2)(n-1)} & \alpha_{n-1} & \alpha_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{n(n-1)} & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \left\| \frac{d^2U}{dt^2} \right\| = \begin{pmatrix} d^2U_1/dt^2 \\ d^2U_2/dt^2 \\ d^2U_3/dt^2 \\ \vdots \\ d^2U_{n-1}/dt^2 \\ d^2U_n/dt^2 \end{pmatrix}, \quad \|U\| = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix},$$

$$\|K^L\| = \begin{pmatrix} \omega_{01}^2 & \omega_{01}^2 k_{12}^L & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{02}^2 k_{21}^L & \omega_{02}^2 & \omega_{02}^2 k_{23}^L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{03}^2 k_{32}^L & \omega_{03}^2 & \omega_{03}^2 k_{34}^L & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{0(n-1)}^2 k_{(n-2)(n-1)}^L & \omega_{0(n-1)}^2 & \omega_{0(n-1)}^2 k_{(n-1)n}^L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{0n}^2 k_{n(n-1)}^L & \omega_{0n}^2 \end{pmatrix}.$$

Полученные квадратные матрицы обладают интересным свойством: все элементы каждой матрицы кроме главной и примыкающих к ней сверху и снизу диагоналей равны нулю, причем  $k_{ij}^C = k_{ji}^C$ ,  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ,  $k_{ij}^L = k_{ji}^L$ . Такие матрицы получили название трехдиагональных. По усло-

виям построения элементы главной диагонали превышают по величине соответствующие наддиагональные и поддиагональные элементы. Такие трехдиагональные матрицы называются матрицами с диагональным преобладанием [5, 6]. Определители трехдиагональных матриц



с диагональным преобладанием вычисляются по простой формуле. Например, для матрицы  $\|A\|$  определители второго–четвертого порядка равны

$$\Delta_2 = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_{12}^2, \quad \Delta_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_{12}^2 \alpha_3 - \alpha_{23}^2 \alpha_1 = \alpha_3 \Delta_2 - \alpha_{23}^2 \Delta_1, \quad \Delta_4 = \alpha_4 \Delta_3 - \alpha_{34}^2 \Delta_2.$$

Отсюда следует рекурсивное соотношение

$$\Delta_i = \alpha_i \Delta_{i-1} - \alpha_{(i-1)i}^2 \Delta_{i-2}. \quad (3)$$

Аналогичное рекурсивное соотношение для матрицы  $\|K^L\|$  имеет вид

$$\Delta_i = \omega_{0i}^2 \Delta_{i-1} - k_{(i-1)i}^2 \omega_{0i}^2 \omega_{0(i-1)}^2 \Delta_{i-2}.$$

Рекурсивные соотношения вида (3) представляют эффективный способ вычисления определителей и решения классической задачи на собственные значения матриц. Для отыскания собственных значений матрицы некоторой квадратной матрицы  $\|B\|$  строится характеристический многочлен и приравнивается нулю определитель

$$\text{Det}(\|B\| - \lambda \|I\|) = 0.$$

Если матрица  $\|B\|$  трехдиагональная, то ее собственные значения вычисляются с помощью рекуррентного соотношения (3).

#### Расчет входного узла радиополяриметра

Входным узлом дифференциально-коммутированных радиополяриметров [7, 8] является

волноводное устройство, в плечах которого расположены по две резонансные диаграммы с идентичными параметрами, связанные отрезком волновода с настроечными штырями. Связанные резонансные диафрагмы образуют полосовые фильтры. Фильтры должны пропускать полосу частот шириной  $8 \div 10\%$  и обладать частотной характеристикой прямоугольной формы. Чтобы удовлетворить этим требованиям, используют настроечные штыри, позволяющие изменять величину связи между резонансными диафрагмами.

С учетом описанной конструкции входного узла радиополяриметра его можно представить моделью пятиконтурной связанной колебательной системы ( $n = 5$ ), содержащей два независимых плеча: в третий узел системы поступает сигнал, а первый и пятый узлы являются выходными (рис. 2). При этом резонансные диафрагмы замещаются высокодобротными параллельными контурами, а связь между ними через отрезок волновода – эквивалентной индуктивностью.

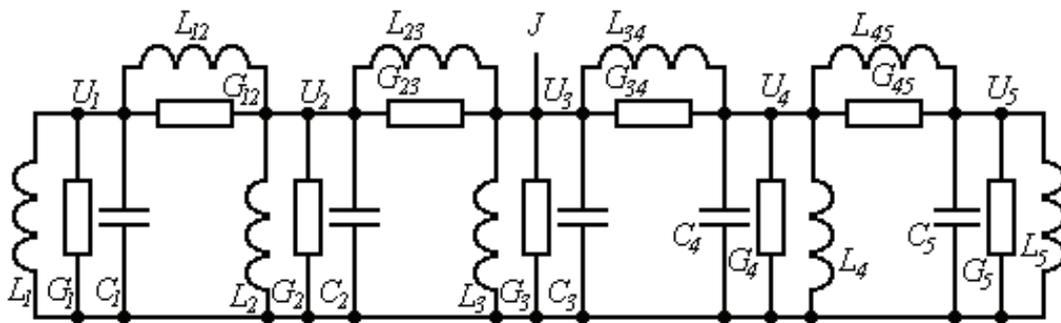


Рис. 2. Схема пятиконтурной модели входного узла радиополяриметра

Поскольку выходные плечи идентичны, рассмотрим левое плечо входного блока, содержащее узлы 1, 2 и 3, и проведем расчет его частотной характеристики в два этапа. На первом этапе пренебрежем резистивными проводимостями элементов, а на втором этапе оценим их влияние. Будем предполагать, что на входе радиополяриметра (узел 3) действует гармонический сигнал  $J(t) = J_0 e^{j\omega t}$ . Тогда систему дифференциальных уравнений вида (1) можно преобразовать к системе алгебраических уравнений

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2)U_1 - k_{12}^L \omega_{01}^2 U_2 = 0,$$

$$-k_{12}^L \omega_{02}^2 U_1 + (\omega_{02}^2 - \omega^2)U_2 - k_{23}^L \omega_{02}^2 U_3 = 0, \quad (4)$$

$$-k_{23}^L \omega_{03}^2 U_2 + (\omega_{03}^2 - \omega^2)U_3 = j\omega J_0$$

с трехдиагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \omega_{01}^2 - \omega^2 & -k_{12}^L \omega_{01}^2 & 0 \\ -k_{12}^L \omega_{02}^2 & \omega_{02}^2 - \omega^2 & -k_{23}^L \omega_{02}^2 \\ 0 & -k_{23}^L \omega_{03}^2 & \omega_{03}^2 - \omega^2 \end{pmatrix},$$



обладающей диагональным преобладанием по условиям построения схемы.

Рассмотрим собственные колебания системы ( $J = 0$ ) и рассчитаем собственные частоты. Допустим, что все параллельные контуры идентичны ( $L_1 = L_2 = L_3$ ,  $C_1 = C_2 = C_3$ ), а коэффициенты индуктивной связи  $k_{12}^L = k_{23}^L \cong 3\%$ . Тогда  $\omega_{01}^2 = \omega_{03}^2$ ,  $\omega_{02}^2 = 0.972\omega_{01}^2$ . Используя формулу (3) и вычисляя определитель системы, находим три собственных частоты:

$$\omega_1 = \omega_{01}, \quad \omega_2 = 0.938\omega_{01}, \quad \omega_3 = 1.028\omega_{01}.$$

При анализе вынужденных колебаний в модели входного узла радиополяриметра было учтено переходное затухание в элементах связи. Амплитудно-частотные характеристики  $T(\omega)$ , рассчитанные для двух значений переходного затухания

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = 0.001 \omega_{01} \text{ (кривая 1)}$$

$$\text{и } \alpha_{12} = \alpha_{23} = 0.002 \omega_{01} \text{ (кривая 2),}$$

представлены на рис. 3.

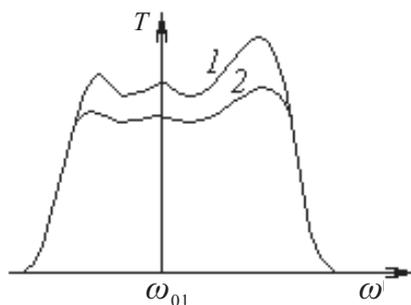


Рис. 3. Приведенные амплитудно-частотные характеристики входного узла радиополяриметра для двух значений переходного затухания

Как видно из рис. 3, с ростом переходного затухания неравномерности характеристики сглаживаются, а ширина полосы частот едва

заметно расширяется. При подстройке поршня в волноводе ширина полосы пропускания фильтра варьировалась в небольших пределах, но уменьшить неравномерность характеристики не удавалось.

### Заключение

Описанная методика расчета входного узла дифференциально-коммутиационного радиополяриметра была использована при согласовании радиополяриметра с антенно-фидерной системой [9].

### Список литературы

1. *Першин В. Г.* Основы современной радиоэлектроники. М. : Феникс, 2009. 544 с.
2. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. М. : Мир, 1971. 562 с.
3. *Ильин В. С., Хохлов А. В.* О базисном наборе трехмерных матриц когерентности // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, вып. 23. С. 40–43.
4. *Хохлов А. В.* Теоретические основы радиоэлектроники : учеб. пособие. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. 296 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 5-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
6. *Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. М. : Наука, 1985. 208 с.
7. *Khokhlov A. V.* Differential-gated method of the microwave space radiation polarization analysis // Turkish J. of Physics. 1996. Vol. 20, № 8. P. 936–942.
8. *Хохлов А. В.* Прецизионные дифференциально-коммутиационные радиополяриметры с.в.ч. и к.в.ч.-диапазонов. Практические реализации и перспективы использования // Приборы и техника эксперимента. 2000. № 3. С. 88–97.
9. *Хохлов А. В.* О согласовании антенно-фидерных систем в дифференциально-коммутиационных поляриметрах СВЧ- и КВЧ-излучения // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 9. С. 17–24.