ФИЗИКА

УДК 514.853

ГЕОМЕТРИЯ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК С МАССАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ КОНФИГУРАЦИИ СИСТЕМЫ

А.В. Гохман

Саратовский государственный университет
E-mail: sgalaev@mail.ru

Представлена интерпретация движения свободной системы материальных точек с массами, зависящими от конфигурации системы, в виде геодезического пути в проективно-евклидовом пространстве аффинной связности.

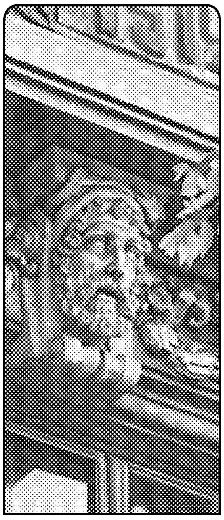
Ключевые слова: механическая система, пространство аффинной связности, геодезический путь.

Geometry of the Free System of Material Points with Masses Depending on the Configuration of the System

A.V. Gohman

The motion of the free system of material points with masses depending on the configuration of the system is considered. We give the interpretation of this motion as a geodesic path in the projectively flat space.

Key words: mechanical system, affinely connected space, geodesic path.



Известна [1] дифференциально-геометрическая интерпретация движения механической системы S с голономными стационарными связями в виде «движения точки единичной массы» в римановом пространстве с метрикой, определяемой кинетической энергией системы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{n} a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}, \qquad (1)$$

где q^{α} – обобщенные координаты системы. В римановом пространстве с метрическим тензором $a_{\alpha\beta}$ определяется контравариантная вдоль пути $q^{\beta} = q^{\beta}(t)$ от векторного поля $v^{\gamma} = v^{\gamma}(t)$ производная

$$\frac{\delta v^{\alpha}}{dt} = \frac{dv^{\alpha}}{dt} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}v^{\gamma}, \qquad (2)$$

где

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\beta}a_{\lambda\gamma} + \partial_{\gamma}a_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda}a_{\beta\gamma}\right) \qquad (3)$$

– так называемые коэффициенты римановой связности. Теперь уравнения рассматриваемой системы S записываются в виде

$$\frac{\delta\dot{q}^{\alpha}}{dt} = Q^{\alpha}, \qquad (4)$$

где Q^α – контравариантные компоненты обобщенной силы. Если $Q^\alpha = 0$, то уравнение (4) совпадает с уравнениями геодезических путей в рассмотренном римановом пространстве.

Рассмотрим теперь свободную систему S_1, состоящую из N материальных точек P_i, массы которых зависят от конфигурации всей системы. При этом конфигурацию системы мы будем называть допустимой, если в ней никакие две точки не занимают одно и то же положение в трехмерном евклидовом пространстве. У всякой допустимой конфигурации существует окрестность допустимых конфигураций, являющаяся открытым подмножеством в $3N$-мерном евклидовом пространстве и, стало быть, $3N$-мерным дифференцируемым многообразием. Такую окрестность мы и будем рассматривать здесь в качестве пространства конфигураций системы S_1 и обозначать его также E_{3N}. Пусть x_i^1, x_i^2, x_i^3 – декартовы координаты точки P_i. Тогда в качестве координат в пространстве E_N возьмем координаты

$$\left(q^\alpha\right) = \left(q^1, q^2, \ldots, q^{3N}\right) = \\ = \left(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_N^1, x_N^2, x_N^3\right) = \left(x_i^a\right), \; a = 1,2,3.$$

Мы рассматриваем систему S_1 при условии, что абсолютные скорости присоединяемых и отбрасываемых частиц равны нулю. В этом случае система уравнений движения имеет вид [2]

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{x}_i^a\right) = F_i^a. \tag{5}$$

Зададим в пространстве конфигураций E_{3N} аффинную связность в системе координат $\left(q^\alpha\right)$ коэффициентами связности

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\delta_\beta^a \overset{i}{p}_\gamma + \delta_\gamma^a \overset{i}{p}_\beta\right), \tag{6}$$

где индексы α и i связаны условиями $q^\alpha = x_i^a$, а

$$\overset{i}{p}_\beta = \partial_\beta \ln m_i. \tag{7}$$

Определим «движение точки единичной массы» в полученном пространстве аффинной связности A под действием обобщенной силы

$$Q^\alpha = \frac{F_i^a}{m_i} \tag{8}$$

уравнениями

$$\frac{\delta \dot{q}^\alpha}{dt} = Q^\alpha \tag{9}$$

и покажем, что они совпадают с системой уравнений (5).

Сравним первые уравнения систем (9) и (5), учитывая (6), (7):

$$\frac{d}{dt}\dot{q}^1 + \Gamma_{\beta\gamma}^1 \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \frac{F_1^1}{m_1},$$

$$\overset{..}{q}{}^1 + \frac{1}{2}\delta_\beta^1 \overset{1}{p}_\gamma \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma + \frac{1}{2}\delta_\gamma^1 \overset{1}{p}_\beta \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \frac{F_1^1}{m_1},$$

$$m_1 \overset{..}{x}{}_1^1 + \frac{\partial m_1}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\gamma \dot{x}_1^1 = F_1^1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{x}_1^1\right) = F_1^1 \cdot$$

Аналогично сравниваем и остальные уравнения.

Таким образом, получаем теорему о том, что рассматриваемая система без воздействия на нее внешних сил движется по геодезическому пути построенного пространства аффинной связности. Это пространство относится к классу так называемых проективно-евклидовых пространств аффинной связности. Его специальные свойства зависят в нашем случае от функций m_i. В частности, пространство A может оказаться и римановым [3]. Если при этом метрический тензор пространства окажется положительно определенным, то система S_1 становится обычной голономной системой.

Список литературы

1. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.

2. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики: В 2 т. М.: Просвещение, 1966. Т.2. 398 с.

3. *Широков П.А.* Проективно-евклидовы симметрические пространства // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1950. Вып.8. С.73–81.