Заключение

Создание объединенной СВЧ-системы и магнитной системы на основе постоянных магнитов позволит уменьшить вес, размеры и стоимость трехсантиметрового микротрона. Моноблок магнетрон-ускоряющий резонатор предполагается создать на основе магнетрона МИ-505. Это позволит уменьшить объем излучающего блока трехсантиметрового диапазона микротрона с энергией 5 МэВ более чем в три раза. Например, у микротрона [16] размеры излучающего блока уменьшатся с 845×420×552 до 420×420×320 мм^3. При этом повысятся электрическая прочность и надежность СВЧ-системы, упростится управление ускорителем и его обслуживание.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №07-02-01288-а).

Список литературы

1. *Векслер В.И.* Новый метод ускорения релятивистских частиц // Докл. АН СССР. 1944. Т.43. С.346.
2. *Капица С.П., Мелехин В.Н.* Микротрон. М.: Наука, 1969. 210 с.
3. *Мелехин В.Н.* Эффективные режимы микротрона // Электроника больших мощностей. М.: Наука, 1968. №5. С.228–237.
4. *Родионов Ф.В., Степанчук В.П.* Об одном режиме ускорения в микротроне // ЖТФ. 1971. Т.41, №5. С.999–1001.
5. *Алексеев И.В., Балаев А.Ю., Горбачев В.П., Степанчук В.П.* Развитие микротронного направления в Саратовском университете // Проблемы современной физики / ОИЯИ. Дубна, 2000. С.22–31.
6. *Shvedunov V.I., Barday R.A., Gorbachev V.P. et al.* A Race-Track Microtron with High Brightness Beams // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2004. Vol.531, №3. P.346–366.
7. *Shvedunov V.I., Ermakov A.N., Gribov I.V. et al.* A 70 MeV Race-Track Microtron // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2005. Vol.550, №1–2. P.39–53.
8. *Косарев Е.Л.* Процессы установления и предельный ток в микротроне // ЖТФ. 1972. T.XLII, вып.10. С.2239–2246.
9. *Заворотыло В.Н., Милованов О.С.* Модель магнетронного генератора для расчета переходных процессов // Ускорители. М.: Атомиздат, 1977. №16. С.34–37.
10. *Бондусь А.А., Горбачев В.П., Степанчук В.П.* СВЧ-система малогабаритного микротрона // The Thirteenth Intern. Workshop Beam Dynamics & Optimization: Program and Abstracts. Saint-Petersburg, 2006. P.28.
11. *Бондусь А.А., Горбачев В.П., Степанчук В.П.* Совмещенная СВЧ система микротрона // The Fourteenth Intern. Workshop Beam Dynamics & Optimization. Saint-Petersburg, 2007. P.13.
12. *Бондусь А.А., Горбачев В.П., Степанчук В.П.* Переходные процессы в моноблоке магнетрон ускоряющий резонатор микротрона // Вестн. СПбГУ. Сер.10. 2008. №3.
13. *Billen I.H., Young L.M.* POISSON SUPERFISH Documentation, LA-UR-96-1834. Los-Alamos, 1996.
14. *Максимов Р.В., Степанчук В.П., Шведунов В.И.* Магнит малогабаритного микротрона // The Thirteenth Intern. Workshop Beam Dynamics & Optimization: Program and Abstracts. Saint-Petersburg, 2006. P.41.
15. *Максимов Р.В., Мутасов Д.В., Степанчук В.П.* Магнитная система моноблока магнетрон-ускоряющий резонатор микротрона // The Fourteenth Intern. Workshop Beam Dynamics & Optimization: Program and Abstracts. Saint-Petersburg, 2007. P.32.
16. *Бондусь А.А., Горбачев В.П., Степанчук В.П.* Малогабаритный микротрон трехсантиметрового диапазона для дефектоскопии // Сб. докл. 11-го Междунар. совещ. по применению ускорителей заряженных частиц в промышленности и медицине. СПб., 2005. С.19–22.

УДК 621.382.029.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКИХ СДВИГОВ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМАХ С ТОЧНОСТЬЮ ДО $\alpha^6 \ln\alpha^{-1}$ МЕТОДОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

Н.А. Бойкова, О.А. Бойкова, Ю.Н. Тюхтяев

Саратовский государственный университет
E-mail: na_boykova@mail.ru

Показано, что хотя количество логарифмических вкладов в тонкий сдвиг уровней энергии в квазипотенциальном подходе возрастает, суммарная поправка $\alpha^6 \ln\alpha^{-1}$ оказывается равной нулю. Рассчитана часть вкладов высшего порядка по α.

Ключевые слова: связанное состояние, тонкий сдвиг, уровень энергии, водородоподобный атом, кулоновское взаимодействие, квазипотенциальный подход, логарифмический вклад, техника Фелла.

The Investigation of the Fine Shift to the Energy Levels in the Hydrogen–Like Atoms with Accuracy $\alpha^6 \ln\alpha^{-1}$ by Quasipotential Method

N.A. Boikova, O.A. Boikova, Yu.N. Tyukhtyaev

In the quasipotential approach the quantity of Logarifmic corrections to the fine shift increased but the sum result of $\alpha^6 \ln\alpha^{-1}$ is equal zero. The past of high order to α corrections is calculated.

Key words: bound state, fine shift, energy level, hydrogen-like atom, Coulomb interaction, quasipotential approach, logarithmic contribution, Fell technics.

Эффективным методом исследования спектров водородоподобных атомов является квазипотенциальный подход, позволяющий последовательно и полно получить тонкую структуру и величины тонких сдвигов с точностью до четвертого и пятого порядка по α.

Основное уравнение квазипотенциального подхода имеет вид

$$F^{-1}(E)\Psi_E(\overline{p}) = V(\overline{p},\overline{q},E)\Psi_E(\overline{p}), \qquad (1)$$

где E – собственное значение полной энергии, $\Psi_E(\overline{p})$ – описывающая систему волновая функция, $F = \overline{G_0}(\overline{p},\overline{q},E)$, G_0 – функция Грина двух невзаимодействующих фермионов, верхняя черта означает интегрирование по относительным энергиям. Квазипотенциал $V(\overline{p},\overline{q},E)$ выражается через амплитуду рассеяния *T*:

$$V = T_+(1+FT_+)^{-1}, \qquad (2)$$

операция $(...)_+ = u_1^* u_2^* \gamma_{10}\gamma_{20}(...)u_1 u_2$ означает проектирование на состояния с положительными энергиями с помощью дираковских биспиноров u_i $(i=1,2)$,

$$u_i = N_i\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\overline{\sigma p}}{M_{ip}}\end{pmatrix},$$

$$M_{ip} = \varepsilon_{ip} + m_i, \quad N_i = \sqrt{\frac{M_{ip}}{2\varepsilon_{ip}}}, \quad \varepsilon_{ip} = \sqrt{m_i^2 + p^2}.$$

Сдвиги уровней энергии определяются при решении квазипотенциального уравнения (1) по теории возмущений. С точностью до второго порядка поправка к кулоновским уровням энергии равна

$$\Delta E_c = \langle \varphi_c | V_{kin} + \Delta V_{1\gamma} + \Delta V_{2\gamma} + \\ + \Delta V_{1\gamma} + V_{kin})\frac{|m\rangle\langle m|}{E_n - E_m}(\Delta V_{1\gamma} + V_{kin})|\varphi_c\rangle, \qquad (3)$$

где φ_c – кулоновская волновая функция, $\Delta V_{1\gamma} = V_{1\gamma} - v_c$, v_c – кулоновский потенциал, $V_{1\gamma}$ и $V_{2\gamma}$ – квазипотенциалы одно- и двухфотонного обменов соответственно,

$$V_{kin} = (-2\pi)^3\delta^3(\overline{p}-\overline{q})\frac{p^4}{2}\left(\frac{1}{m_1 M_{1p}^2} + \frac{1}{m_2 M_{2p}^2}\right).$$

При исследовании тонкого сдвига в водородоподобном атоме, где основным взаимодействием является кулоновское, удобно использовать кулоновскую калибровку фотонного пропагатора.

$$\Delta V_{1\gamma} = (K_c)_+ - v_c + (K_T)_+, \qquad (4)$$

где ядра $(K_c)_+$ и $(K_T)_+$ описывают обмен одним кулоновским и одним поперечным фотонами соответственно. Ограничиваясь обменами двумя кулоновским и поперечным фотонами, для величины тонкого сдвига получаем

$$\Delta E = \langle \varphi_c | (K_T)_+ + (\overline{K_c G_0 K_T})_+ - v_c F(K_T)_+ + \\ + (\overline{K_T G_0 K_c})_+ - (K_T)_+ F v_c + (K_{cT})_+ + \\ + V_{kin} F(K_T)_+ + (K_T)_+ F V_{kin} | \varphi_c\rangle. \qquad (5)$$

Ядро K_{cT} соответствует перекрестному обмену кулоновским и поперечным фотонами.

При исследовании кулоновского взаимодействия [1–3] было выяснено, что использование δ-приближения кулоновских волновых функций

$$\varphi_c(\overline{p}) = (2\pi)^3\delta^3(\overline{p})\varphi_c(0) \qquad (6)$$

устраняет зависимость от внешних импульсов и позволяет определить только поправки порядков α^4 и α^5. В δ-приближении не учитываются зависимости квазипотенциала от внешних импульсов [4], что приводит к появлению расходимостей. Поэтому возникает необходимость введения параметра обрезания и в суммарном выражении расходимости устраняются. Повышение точности теоретических расчетов требует учета зависимости квазипотенциала от импульсов $\overline{p}$, $\overline{q}$ и энергии *E*.

$$V = V(\overline{p},\overline{q},E). \qquad (7)$$

Анализ полученных выражений показывает, что соответствующие квазипотенциальные выражения не содержат расходимостей ни в ультрафиолетовой, ни в инфракрасной областях.

Проблема логарифмических вкладов в шестом порядке по α исследовалась многократно с применением различных методов и подходов. Значительный успех в этом направлении связан с работами Фелла и группы

Хрипловича. Техника вычислений, которую предложил Фелл, оказалась наиболее проста и продуктивна. В таблице работы [5] приведены результаты вычислений логарифмических вкладов шестого порядка по α в тонкий сдвиг уровней энергии позитрония. Если исключить из одного из рассматриваемых в таблице интегралов вклады шестого по α порядка, то получим

$$J_F = \int \frac{d\bar{p}}{(p^2+\alpha^2\mu^2)} \int \frac{d\bar{q}}{(q^2+\alpha^2\mu^2)} \frac{1}{(\bar{p}-\bar{q})^2} = = 4\pi^4 \ln \alpha^{-1}. \quad (8)$$

Этот интеграл, который можно назвать интегралом Фелла, расходится, как впрочем и все остальные в таблице, но его вклад берется в особом «логарифмическом» промежутке. Имеем точный результат:

$$\int \frac{d\bar{q}}{(q^2+\alpha^2\mu^2)} \frac{1}{(\bar{p}-\bar{q})^2} = \frac{2\pi^2}{p} arctg \frac{p}{\alpha\mu}. \quad (9)$$

Таким образом, интеграл Фелла приводится к виду

$$J_F = 8\pi^3 \int_0^\infty \frac{p\,dp}{(p^2+\alpha^2\mu^2)} \left(\frac{\pi}{2} - arctg \frac{\alpha\mu}{p} \right). \quad (10)$$

Логарифмическую поправку дает его расходящаяся часть в пределах $\mu\alpha^2 < p \le \mu$. Поэтому с логарифмической точностью имеем

$$J_F = \int \frac{d\bar{p}}{(p^2+\alpha^2\mu^2)} \int \frac{d\bar{q}}{(q^2+\alpha^2\mu^2)} \frac{1}{(\bar{p}-\bar{q})^2} = \\ = 4\pi^4 \int_{\mu\alpha^2}^{\mu} \frac{p\ dp}{(p^2+\alpha^2\mu^2)} = 2\pi^4 \ln \frac{\mu}{\mu\alpha^2} = 4\pi^4 \ln \alpha^{-1}. \quad (11)$$

Решение задачи о логарифмических по α вкладах метод квазипотенциала позволяет сделать наиболее полно [6]. Проанализируем вначале выражение для тонкого сдвига уровней энергии атома от обмена одним поперечным фотоном:

$$\Delta E_T = \langle \varphi^*{}_c(\bar{p}) | (K_T(\bar{p},\bar{q}))_+ | \varphi_c(\bar{q}) \rangle = \\ = \frac{4\alpha^6\mu^5}{\pi^4} \int \frac{N_p d^3 p}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2} \times \quad (12) \\ \times \int \frac{N_q d^3 q}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2} \frac{[\bar{p}\bar{q}]^2}{(\bar{p}-\bar{q})^4} \left(\frac{1}{M_{1p}} + \frac{1}{M_{1q}} \right) \left(\frac{1}{M_{2p}} + \frac{1}{M_{2q}} \right).$$

Выполняя интегрирование по угловым переменным и выделяя члены порядка $\frac{\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2}$, получим

$$\Delta E_T = \frac{64\alpha^6\mu^5}{\pi^2 m_2} \int_0^\infty \frac{N_p p^2\,dp}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{N_q q^2\,dq}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2} \frac{1}{M_{1q}} \left(1 + \frac{(p^2+q^2)}{2pq} \ln \frac{|p-q|}{p+q} \right). \quad (13)$$

Логарифмический вклад обеспечивает интеграл вида

$$J_{\ln} = \int_0^\infty \frac{p\,dp}{(p^2+\alpha^2\mu^2)} \int_0^\infty \frac{q\,dq}{(q^2+\alpha^2\mu^2)} \frac{1}{\varepsilon_{1q}^2} \ln \frac{|p-q|}{p+q}. \quad (14)$$

Для его выделения в выражении (13) требуется наличие при $\ln\frac{|p-q|}{p+q}$ фактора (p^2q^2). Дополнительную степень q^2 можно получить с помощью преобразования

$$\frac{1}{M_{1q}} = \frac{1}{2m_1} \left(1 - \frac{q^2}{M_{1q}^2} \right) \Rightarrow -\frac{q^2}{8m_1\varepsilon_{1q}^2}.$$

Тогда, полагая $N_p N_q = 1$, получим следующее аналитическое выражение для логарифмической поправки

$$\Delta E_T^1(\alpha^6 \ln \alpha) = -\frac{4\alpha^6\mu^5}{\pi^2 m_1 m_2} \int_0^\infty \frac{p^2\,dp}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{q^2\,dq}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2} \frac{pq}{\varepsilon_{1q}^2} \ln \frac{|p-q|}{p+q}. \quad (15)$$

Вычисления приводят к результату

$$\Delta E_T^1 = -\frac{4\alpha^6\mu^5}{\pi^2 m_1 m_2} J_{\ln} = 2\frac{\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2} \ln \frac{\alpha^{-1}}{2}. \quad (16)$$

Однако полученный логарифмический вклад не является полным. Дополнительные степени p^2 и q^2 выделяются также из нормировочных множителей. Учитывая, что

$$N_p N_q = 1 - \frac{p^2}{2\varepsilon_{1p} M_{1p}(1+N_p)} - \frac{q^2}{2\varepsilon_{1q} M_{1q}(1+N_q)} + \\ + \frac{p^2 q^2}{4\varepsilon_{1p}\varepsilon_{1q} M_{1p} M_{1q} (1+N_p)(1+N_q)},$$

$$N_p N_q \Rightarrow -\frac{p^2}{8\varepsilon_{1p}^2} - \frac{q^2}{8\varepsilon_{1q}^2},$$

получаем аналогичный (16) логарифмический вклад

$$\Delta E_T^2 = 2\frac{\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2}\ln\frac{\alpha^{-1}}{2}. \tag{17}$$

Итак, суммарный результат от однофотонного взаимодействия оказывается следующим:

$$\Delta E_T(\alpha^6\ln\alpha) = \Delta E_T^1(N_p N_q = 1) + \\ + \Delta E_T^2(N_p N_q \neq 1) = 4\frac{\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2}\ln\alpha^{-1}. \tag{18}$$

Анализ однофотонного взаимодействия базируется на логарифмическом интеграле (14), который является аналогом интервала Фелла и приводится к нему с помощью преобразования

$$J_{\ln} = -\frac{1}{8\pi^2}\int\frac{d^3p}{(p^2+\alpha^2\mu^2)}\times \\ \times\int\frac{d^3q}{(q^2+\alpha^2\mu^2)}\frac{1}{(\bar{p}-\bar{q})^2(q^2+m_1^2)} \tag{19}$$

и последующей замены $q^2 + m_1^2 \to m_1^2$, устраняющей вклады порядка α^6. Поэтому с точностью до членов $\alpha^6\ln\alpha$

$$J_{\ln} = -\frac{1}{8\pi^2 m_1^2}J_F. \tag{20}$$

Хотя интеграл Фелла в отличие от $J_{\ln}$ не являются сходящимся, но содержит только искомую логарифмическую поправку без дополнительных членов α^6. Поэтому при расчетах с логарифмической точностью его использование более целесообразно. Однако при повышении точности расчетов до α^6 интеграла J_F оказывается недостаточно.

В работах других авторов [7–9] всюду полагается $N_p N_q = 1$. Часть вклада (18) ΔE_T^1 $(N_p N_q = 1)$ компенсируется в сумме с поправкой от обмена двумя поперечными фотонами. Другая же часть в технике Фелла и Хрипловича уничтожиться не может, так что корректность квазипотенциального подхода к исследованию величины тонкого сдвига уровней энергии зависит от разработки специфической теории возмущений, учитывающей отличие нормировочного множителя дираковского биспонора от единицы. Такая теория возмущения показывает, что зависимость итерационных членов в выражении (5) от величины нормировочного множителя дираковского биспинора различна

$$\Delta E^3 = -\langle\varphi_c|(K_T)_+ Fv_c|\varphi_c\rangle = -\frac{2\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2}\ln\alpha^{-1} \\ \text{при } N_p N_q \neq 1, \tag{21}$$

$$\Delta E^4 = \langle\varphi_c|(K_T)_+ FV_{kin}|\varphi_c\rangle = -\frac{2\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2}\ln\alpha^{-1} \\ \text{при } N_p N_q = 1. \tag{22}$$

Отсюда следует, что часть вклада (18) при $N_p N_q \neq 1$ компенсируется в сумме с величиной (21). Однако существует симметричный итерационный член

$$\Delta E^5 = -\langle\varphi_c|v_c F(K_T)_+|\varphi_c\rangle = -\frac{2\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2}\ln\alpha^{-1} \\ \text{при } N_p N_q \neq 1. \tag{23}$$

Для анализа этой поправки, возникающей из-за отличия нормировочного множителя от единицы, необходимо рассмотреть двухфотонные обмены в выражении (5).

Опуская члены, не имеющие непосредственного отношения к рассматриваемой проблеме, для величины сдвига от параллельного обмена кулоновским и поперечным фотонами имеем:

$$\Delta E_{cT} = -\frac{\alpha^7\mu^5}{\pi^6 m_2}\int\frac{N_p d\bar{p}}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2}\int\frac{N_q d\bar{q}}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2}\times \\ \times\int\frac{d\bar{k}}{(\bar{k}-\bar{p})^2(\bar{k}-\bar{q})^2(k^2+\alpha^2\mu^2)}\frac{M_{1k}}{\varepsilon_{1k}}\times \\ \times[f_1(\bar{k}) + f_2(\bar{p},\bar{k}) + f_3(\bar{q},\bar{k})], \tag{24}$$

где

$$f_1(\bar{k}) = \frac{k^2}{2}\left(3+\frac{M_{1k}}{M_{1q}}\right) - \frac{(\varepsilon_{1k}-\varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2k}-\varepsilon_{2q})}{(\bar{k}-\bar{q})^2}\times \\ \times\left(2m_2 M_{1k} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{M_{1k}}{2m_2}+\frac{2m_2}{M_{1q}}\right)\right),$$

$$f_2(\bar{p},\bar{k}) = \bar{p}\bar{k}\left(\frac{k^2}{M_{1p}M_{1k}} - \frac{(k^2-q^2)^2}{(\bar{k}-\bar{q})^2}\times \\ \times\left(\frac{M_{1k}}{2m_2^2(\varepsilon_{1k}+\varepsilon_{1q})} + \frac{1}{M_{1p}(\varepsilon_{1k}+\varepsilon_{1q})}\right)\right),$$

$$f_3(\bar{q},\bar{k}) = \frac{q^2}{2}\left(1+3\frac{M_{1k}}{M_{1q}}\right) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{M_{1k}}{M_{1q}}\right)\left(\bar{k}-\bar{q}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(k^2-q^2\right)^2\left(\frac{M_{1k}}{2m_2}+\frac{2m_2}{M_{1q}}\right)\left(\frac{1}{2m_2(\varepsilon_{1k}+\varepsilon_{1q})} -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{q^2(k^2-q^2)^2}{2(\bar{k}-\bar{q})^2 2m_2(\varepsilon_{1k}+\varepsilon_{1q})}\left(\frac{M_{1k}}{2m_2}+\frac{2m_2}{M_{1q}}\right)\right)\right].$$

Поправка от блока $f_1(\bar{k})$ представляется выражением

$$\Delta E(f_1) = -\frac{\alpha^7\mu^5}{\pi^6 m_2}\int\frac{N_p d\bar{p}}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2}\times$$
$$\times\int\frac{N_q d\bar{q}}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2}\int\frac{d\bar{k}}{(\bar{k}-\bar{p})^2(\bar{k}-\bar{q})^2(k^2+\alpha^2\mu^2)}\times$$
$$\times\frac{M_{1k}}{\varepsilon_{1k}}\left[\frac{k^2}{2}\left(3+\frac{M_{1k}}{M_{1q}}\right)-\right. \qquad (25)$$
$$\left.-\frac{(k^2-q^2)^2}{k_q^2(\varepsilon_{1q}+\varepsilon_{1k})}\left(M_{1k}+\frac{k^2}{2M_{1q}}\right)\right].$$

Последний член, пропорциональный $\frac{(k^2-q^2)^2 k^2}{(\bar{k}-\bar{q})^4}$, не приводится к интегралу Фелла, так как интегрирование по угловым переменным обеспечивает результат

$$\int\frac{(k^2-q^2)^2 d\Omega}{(\bar{k}-\bar{q})^4} \cong 4\pi,$$

и множитель $(k^2+\alpha^2\mu^2)^{-1}$, необходимый для J_F, исчезает. В оставшемся выражении требуется выделить степень q^2 для погашения фактора $(q^2+\alpha^2\mu^2)$, что достигается преобразованием

$$\frac{M_{1k}}{\varepsilon_{1k}}\left(3+\frac{M_{1k}}{M_{1q}}\right) = 8-\frac{2q^2}{M_{1q}^2} \approx 8-\frac{q^2}{2m_1^2}\cdot$$

Тогда получаем

$$\Delta E_{cT}^1 = -\frac{\alpha^7\mu^5}{2\pi^6 m_2}\int\frac{d^3p}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2}\times$$
$$\times\int\frac{d^3q}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2}\int\frac{d^3k}{(\bar{k}-\bar{p})^2(k^2+\alpha^2\mu^2)}\times \qquad (26)$$
$$\times\left[\frac{N_pN_q}{(\bar{k}-\bar{q})^2}\left(8k^2-\frac{k^2q^2}{2m_1}\right)-4N_p\right].$$

Выражение, пропорциональное $k^2q^2/(\bar{k}-\bar{q})^2$, обеспечивает логарифмический вклад при $N_pN_q=1$.

$$\Delta E_{cT}^1(N_pN_q=1) = \frac{\alpha^6\mu^3}{m_1m_2}\ln\alpha^{-1}. \qquad (27)$$

В остальных членах для выделения вклада $\alpha^6\ln\alpha^{-1}$ требуется учесть нормировочные множители более детально.

$$N_p = 1-\frac{p^2}{2\varepsilon_{1p}(1+N_p)M_{1p}} \Rightarrow -\frac{p^2}{8m_1^2}\cdot$$

Поэтому произведение нормировочных множителей N_pN_q с учетом симметрии подынтегрального выражения по $\bar{p}$ и $\bar{q}$ обеспечивает требуемый для интеграла Фелла фактор:

$$N_pN_q = 1-2(1-N_p)+(1-N_p)(1-N_q) \Rightarrow -\frac{p^2}{4m_1^2}\cdot$$

Итак, детальный учет факторов N_p и N_q обеспечивает весьма существенную логарифмическую поправку, которая оказывается в три раза больше предыдущей.

$$\Delta E_{cT}^1(N_pN_q\neq 1) = 3\frac{\alpha^6\mu^3}{m_1m_2}\ln\alpha^{-1}. \qquad (28)$$

В отличие от f_1 функция f_2 в выражении (24) содержит зависимость от внешнего импульса $\bar{p}$.

$$\Delta E_{cT}^2 = -\frac{\alpha^7\mu^5}{\pi^6 m_2}\int\frac{N_p d\bar{p}}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2}\int\frac{N_q d\bar{q}}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2}\times \qquad (29)$$
$$\times\int\frac{d\bar{k}}{(\bar{k}-\bar{p})^2(\bar{k}-\bar{q})^2(k^2+\alpha^2\mu^2)}\frac{M_{1k}}{\varepsilon_{1k}}f_2(\bar{p},\bar{k}).$$

Преобразуя матричную структуру f_2, выделяем члены, пропорциональные $q^2(\bar{p}\bar{k})$, которые обеспечивают вклады порядка α^7. В оставшемся выражении выполняя интегрирование по $\bar{q}$, получаем фактор $1/\alpha$.

$$\Delta E_{cT}^2 = -\frac{2\alpha^6\mu^4}{\pi^4 m_2}\int\frac{N_p d^3p}{(p^2+\alpha^2\mu^2)^2}\times$$
$$\times\int\frac{(\bar{p}\bar{k})d^3k}{(\bar{p}-\bar{k})^2(k^2+\alpha^2\mu^2)}\frac{1}{M_{1k}M_{1p}}\times \qquad (30)$$
$$\times\left(\frac{k^2}{(k^2+\alpha^2\mu^2)}-1\right).$$

Заметим, что

$$\alpha\mu = \frac{\alpha m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cong \alpha\beta m_2,$$

где $\beta = m_1/m_2$. Следовательно, подынтегральное выражение зависит от двух малых параметров α и β. Выполняя замены $p' = m_1 p$, $q' = m_1 q$, $k' = m_1 k$, исключим зависимость от параметра β и далее исследуем зависимость от параметра $\alpha' = \frac{\alpha}{1+\beta}$.

$$\Delta E_{cT}^2 = -\frac{\alpha^8\mu^3}{4\pi^4 m_2 m_1}\int\frac{N'_p d^3p}{(p^2+\alpha'^2)^2}\times \int\frac{(\bar{p}\bar{k})d^3k}{(\bar{p}-\bar{k})^2(k^2+\alpha'^2)^2}\frac{1}{M'_k M'_p}, \quad (31)$$

где $M'_k = \varepsilon'_k + 1$, $\varepsilon'_k = \sqrt{k^2+1}$, $N'_p = \sqrt{\frac{M'_p}{2\varepsilon'_p}}$.

Рассмотрим «базовый» интеграл выражения ΔE_{cT}^2:

$$J_{pk} = \alpha^8\int\frac{d^3p}{(p^2+\alpha'^2)^2}\int\frac{d^3k}{(k^2+\alpha'^2)^2}\frac{(\bar{p}\bar{k})}{(\bar{p}-\bar{k})^2}. \quad (32)$$

С учетом симметрии его можно представить в виде

$$J_{pk} = \alpha^8\int\frac{d^3p}{(p^2+\alpha'^2)^2}\times \int\frac{d^3k}{(k^2+\alpha'^2)^2}\left(\frac{p^2}{(\bar{p}-\bar{k})^2}-\frac{1}{2}\right). \quad (33)$$

Несмотря на высокую степень коэффициента, J_{pk} приводит к вкладу порядка α^6,

$$J_{pk} = \frac{\pi^4}{4}\alpha^6. \quad (34)$$

Учет фактора $\frac{1}{M'_k M'_p}$ в подынтегральном выражении эквивалентен введению в интеграл дополнительного множителя типа $\frac{p^2}{M_p'^2}$.

$$J'_{pk} = \alpha^8\int\frac{d^3p}{(p^2+\alpha'^2)^2}\int\frac{d^3k}{(k^2+\alpha'^2)^2}\times \left(\frac{p^2}{(\bar{p}-\bar{k})^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p^2}{M_p'^2}+\frac{k^2}{M_k'^2}\right) =$$

$$= \alpha^8\int\frac{d^3p}{(p^2+\alpha'^2)^2}\int\frac{d^3k}{(k^2+\alpha'^2)^2}\times \left[\frac{1}{(\bar{p}-\bar{k})^2}\left(\frac{p^4}{M_p'^2}+\frac{p^2k^2}{M_k'^2}\right)-\frac{p^2}{M_p'^2}\right]. \quad (35)$$

Последний член, не содержащий кулоновского фактора $(\bar{p}-\bar{k})^2$, приводит в вкладу порядка α^7. Первый член вследствие наличия множителя p^4 устраняет фактор $(p^2+\alpha'^2)^{-2}$ и также обеспечивает вклад порядка α^7 без логарифма α. Наличие фактора p^2k^2 повышает порядок вклада до α^8, но, согласно интегралу Фелла, обеспечивает логарифмическую зависимость по α. Итак, выражение ΔE_{cT}^2 не дает логарифмических поправок порядка α^6. Его наибольший вклад составляет

$$\Delta E_{cT}^2 = -\frac{1}{16}\frac{\alpha^6\mu^3}{m_1 m_2}. \quad (36)$$

В блоке ΔE_{cT}^3, содержащем функцию f_3, после выделения в матричном выражении членов порядка α^6, содержащих q^2 и k^2, получим

$$\Delta E_{cT}^3 = -\frac{\alpha^6\mu^4}{2\pi^4 m_2}\int\frac{N_q d^3q}{(q^2+\alpha^2\mu^2)^2}\times \int\frac{M_{1k}d^3k}{(\bar{p}-\bar{k})^2(k^2+\alpha^2\mu^2)^2\varepsilon_{1k}}\times \left[q^2\left(1+3\frac{M_{1k}}{M_{1q}}\right)-2\frac{k^2q^2}{M_{1q}(\varepsilon_{1k}+\varepsilon_{1q})}\right]. \quad (37)$$

В последнем члене, пропорциональном k^2q^2, имеются все необходимые элементы для выделения логарифмического интеграла Фелла. В первом же члене требуется выделить дополнительную степень k^2, что достигается преобразованием

$$\left(1+3\frac{M_{1k}}{M_{1q}}\right)\frac{M_{1k}}{\varepsilon_{1k}} = 8+\frac{6k^2}{M_{1k}M_{1q}}-\frac{4k^2}{\varepsilon_{1k}M_{1k}} \Rightarrow -\frac{k^2}{2m_1^2}.$$

Учет нормировочного множителя N_q не изменяет логарифмической поправки ΔE_{cT}^3

$$\Delta E_{cT}^{3} = -\frac{\alpha^6 \mu^4}{2\pi^4 m_2 m_1^2} \int \frac{q^2 d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\ \times \int \frac{k^2 d^3 k}{(\bar{p} - \bar{k})^2 (k^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} = 2 \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_2 m_1} \ln \alpha^{-1}. \quad (38)$$

Тогда логарифмический вклад выражения (24) оказывается следующим:

$$\Delta E_{cT} = \Delta E_{cT}^{1} + \Delta E_{cT}^{2} + \Delta E_{cT}^{3} = \\ = \Delta E_{cT}(N_p N_q = 1) + \Delta E_{cT}(N_p N_q \neq 1), \quad (39)$$

где

$$\Delta E_{cT}(N_p N_q = 1) = 3 \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1},$$

$$\Delta E_{cT}(N_p N_q \neq 1) = 3 \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1} \cdot$$

Итак, учитывая выражения (18), (21)–(23), (39), для суммарного логарифмического вклада в величину тонкого сдвига от обмена кулоновским и поперечным фотонами получаем результат

$$\Delta E = 2 \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}, \quad (40)$$

который компенсируется учетом вклада от обмена двумя поперечными фотонами [10].

Следовательно, возникающая в однофотонном обмене дополнительная поправка, связанная с учетом отличия нормировочных множителей от единицы, уничтожается в сумме диаграмм, следующих из квазипотенциальной теории возмущений. Таким образом, в наших работах продемонстрирована возможность квазипотенциального метода рассчитать поправки к тонкому сдвигу в высших порядках по α.

Список литературы

1. *Boikova N.A., Boikova O.A., Kleshchevskaya S.V., Tyukhtyaev Yu.N.* On the possibility of precise calculations of the contribution to the fine energy shifts of hydrogen–like atoms due to the motion of the nucleus // Laser Physics and Photonics, Spectroscopy and Molecular Modeling VII, SPIE 2007. Vol.6537. P.6537–19–1–6537–19–8.

2. *Бойкова Н.А., Бойкова О.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н.* К вопросу о новых вкладах в тонкий сдвиг уровней энергии водородоподобных атомов с точностью до шестого порядка по константе тонкой структуры // Теоретическая физика. 2007. Т.8. С.124–130.

3. *Бойкова Н.А., Бойкова О.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н.* Исследование поправок к известному значению тонкого сдвига в высших порядках теории возмущений // Проблемы оптической физики: Материалы 11-й Междунар. молодежной науч. школы по оптике, лазерной физике и биофизике. Саратов, 2008. С.145–151.

4. *Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.* Влияние движения ядра на тонкую структуру водорода / Сообщение ОИЯИ Р2–7493. Дубна, 1973. 16 с.

5. *Fell R.N.* Single transverse photon correction to the 2S energy levels of positronium / Preprint BUW 01742. Massachusetts, 1992. 40 p.

6. *Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.* Техника Фелла и возможности ее обобщения при расчетах тонких сдвигов методом квазипотенциала // Тез. докл. Всерос. совещ. по квантовой метрологии и фундаментальным физическим константам / Государственный научный центр РФ. Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д.И. Менделеева. СПб., 2008. 30 с.

7. *Khriplovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovsky A.S.* Corrections of ($\alpha^6 \ln \alpha$) in two-body QED problem // Phys. Lett. B. 1992. Vol.282. P.237–242.

8. *Khriplovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovsky A.S.* Logarifmic corrections in the two-body QED problem // Physica Scripta. 1993. Vol.146. P.252–260.

9. *Fell R.N., Khriplovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovsky A.S.* On the recoil corrections in hydrogen // Phys. Lett. A. 1993. Vol.181. P.172–174.

10. *Бойкова Н.А., Бойкова О.А., Клещевская С.В., Тюхтяев Ю.Н.* Исследование аномально больших логарифмических вкладов при решении задачи об отдаче ядра квазипотенциальным методом // Проблемы оптической физики и биофотоники: Материалы 12-й Междунар. молодежной науч. школы по оптике, лазерной физике и биофизике. Саратов, 2009. С.118–124.