



in Computer Science / Eds. J. Mira, J.R. Alvarez. Berlin, 2005. P.123–132.

10. Pavlov A.N., Makarov V.A., Makarova I., Panetos F. Sorting of extracellular spikes: When wavelet based methods outperform the principle component analysis // Natural Computing. 2007. Vol.6. P.269–281.

11. Макаров В.А., Павлов А.Н., Тулицын А.Н. Сортировка нейронных спайков на основе параметрического вейвлет-анализа с адаптивной фильтрацией // Цифровая обработка сигналов. 2008. №3. С.26–31.

12. Haykin S. Neural networks. A comprehensive foundation. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

13. Kohonen T. Selforganization and associative memory. N.Y.: Springer-Verlag, 1989.

14. Hopfield J., Tank D. Neural computation of decision in optimization problems // Biol. Cybernet. 1985. Vol.52. P.141–152.

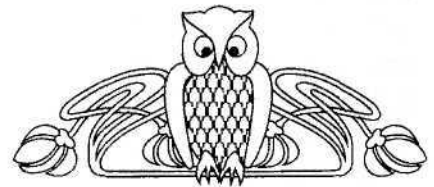
15. Callan R. The essence of neural networks. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

УДК 621.371

## О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ И ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

М.В. Давидович

Саратовский государственный университет  
E-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru



На основе строгого нестационарного подхода получены общие нестационарные балансные уравнения для плотностей энергии и импульса системы поле-вещество, основанные на нестационарных определениях этих плотностей с зависимостью от предыстории процесса создания поля, а также определены скорости их переноса. Конкретное рассмотрение произведено для простейшего закона дисперсии, определяемого связанной с проводимостью диссипацией. Для него найдены плотность электромагнитной энергии в плоской монохроматической волне и скорости: фазовая, групповая, а также скорости переноса энергии и импульса. Показано, что плотность энергии на низких частотах в этом случае имеет вид электростатической плотности с заменой диэлектрической проницаемости на ее реальную часть, а скорость энергии в плоской монохроматической волне с указанной дисперсией равна фазовой скорости. Групповая же скорость может превышать скорость света. Показана необходимость использования формы Минковского для плотности импульса и определена скорость его переноса, которая в рассматриваемом случае также совпадает с фазовой скоростью. Продемонстрировано выполнение законов сохранения энергии и импульса в плоской электромагнитной волне в среде и при её дифракции на проводящей магнитодиэлектрической пластине.

**Ключевые слова:** тензор энергии-импульса, плотность импульса по Абрагаму и по Минковскому, скорость переноса энергии, скорость переноса импульса.

**On Conservation Laws for Energy and Momentum in Electromagnetic Field in Media and Under Plane Wave Diffraction on Conducting Plate**

M.V. Davidovich

The general nonstationary balance equations for energy and momentum densities of field-matter system based on rigorous nonstationary approach for their definitions with dependence from the field creation

prehistory have been obtained. Also the transport velocities of these densities have been derived. The concrete examination and detailed consideration have been performed for simplest dispersion law which is defined by the conductivity connected with the dissipation. There are following parameters which have been found for plane monochromatic wave under this law: the energy density, the phase velocity, the group velocity, and the transport velocities of energy and momentum. It has been shown that the energy density has the static form in which the dielectric permittivity must be replaced by its real part, and the energy transport velocity coincides with the phase velocity. The group velocity in this case may exceed the light velocity in the vacuum. It has been also shown that correct form of momentum density is the Minkowski one, and the momentum transport velocity in this case also coincides with phase velocity. The energy and momentum conservation have been shown for plane electromagnetic wave in the conducting medium and for plane wave diffraction on the conducting plate.

**Key words:** energy-momentum tensor, the Abraham and Minkowski momentum densities, energy transport velocity, momentum transport velocity.

### Введение

В электродинамике сплошных сред до настоящего времени сохраняется парадоксальное состояние, когда вот уже более ста лет нет однозначности в отношении выбора правильного определения тензора энергии-импульса (ТЭИ) [1–13]. Имеются два основных определения: Минковского [1] и Абрагама [2]. Соответственно имеется много публикаций как за определение Минковского, например, [13], и против определения Абра-



гама, так и наоборот – за Абрагама и против Минковского (см., например, публикации [3–6], последние обзоры [11, 12], работу [13] и литературу в них). Кроме этого имеются работы, авторы которых утверждают или считают, что указанные два определения эквивалентны (например, [3, 12]), но все-таки тензор Абрагама более предпочтительный или правильный. Тем не менее тензором Минковского тоже можно пользоваться, он часто более удобен и точнее соответствует сплошной среде [3]. В других публикациях тензор Минковского считается более верным. Есть ряд публикаций об экспериментальных подтверждениях и опровержениях как первого, так и второго из определений [12]. В частности, есть публикации по измерению силы Абрагама  $\vec{f}^A$  – величины, являющейся довеском к производной по времени от плотности импульса по Абрагаму  $\partial_i \vec{g}^A$ , в результате которого получается производная  $\partial_i \vec{g}^M$  для плотности импульса по Минковскому [3]. Заметим, что все указанные эксперименты произведены для квазистационарных или нестационарных (импульсных) процессов, а объемная сила Абрагама не эквивалентна сумме сил Лоренца, действующих на электрический и магнитный токи поляризации вещества [5]. Далее (во избежание недоразумений) под электромагнитным импульсом, или цугом, понимаем нестационарную электромагнитную волну, а под импульсом электромагнитного поля  $\vec{G}$  или моментом – интеграл по объему от плотности линейного импульса системы поле-вещество  $\vec{g}$ .

Упомянутая неоднозначность породила также ряд попыток определить и вывести ТЭИ по-другому, например, с использованием микроскопической электродинамики [7, 8], уравнений движения вещества или с использованием теоремы Нётер [13]. Считается, что однозначно можно определить только ТЭИ системы поле-вещество, а по отдельности указанные величины определяются неоднозначно. Между тем неоднозначность в определении плотности импульса поля ведет к неопределенности скорости его переноса

$\vec{v}_i^{(EM)}$ , скорости движения вещества  $\vec{v}^{(M)}$  и полной скорости переноса импульса поле-вещество  $\vec{v}_i$ . Также из нее следует неоднозначность силы давления электромагнитной волны на вещество.

В данной работе получены нестационарные балансные уравнения для энергии и импульса и введены нестационарные определения их плотностей, зависящие от предыстории процесса создания поля. На основе этого приведены выражения для скорости переноса энергии и импульса системы поле-вещество, а также для скорости переноса импульса поля и вещества. Для простоты общие полученные результаты конкретизируются рассмотрением одномерных задач: а) о плоской электромагнитной волне в среде с дисперсией, обусловленной проводимостью; б) о её дифракции на плоскопараллельной проводящей пластине. Указанные соотношения для монохроматического процесса позволяют построить ТЭИ и определить скорости переноса энергии и импульса системы поле-вещество, которые для указанной дисперсии совпадают с фазовой скоростью.

### 1. Балансные уравнения для энергии и импульса

Всегда, когда возникают парадоксы, необходимо искать, где произошла подмена понятий или неправомерно применены некие понятия к явлениям [14]. В случае ТЭИ, плотностей энергии и импульса в среде это заключается в неправомерной замене нестационарных понятий стационарными. В частности, плотность энергии поля в веществе определяют так:

$$u(\vec{r}, t) = [\vec{D}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \vec{H}(\vec{r}, t)] / 2,$$

т.е. как в статике, что неверно [14–16]. Аналогично плотность импульса по Абрагаму определена в виде  $\vec{g}^A = \vec{S} / c^2$ , а по Минковскому – в виде

$$\vec{g}^M = \vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) = n^2 \vec{S}(\vec{r}, t) / c^2 = n^2 \vec{g}^A,$$

где  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  – показатель преломления (индекс рефракции, или коэффициент замедления),  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$  – вектор Пойн-



тинга. Соответственно в подавляющем большинстве работ, касающихся ТЭИ, полагается, что материальные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t),\end{aligned}$$

т.е. в предположении отсутствия временной (частотной) дисперсии, что также имеет место лишь в статике. Приведенная запись соответствует неоднородной среде. В большинстве работ  $\varepsilon$  и  $\mu$  – просто числовые константы. Мы рассмотрим материальные уравнения в обобщенной форме Казимира [17]:

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \partial_t^{-1} \partial_r^{-1} \left( \hat{\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') \right), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \partial_t^{-1} \partial_r^{-1} \left( \hat{\mu}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') \vec{H}(\vec{r}', t') \right),\end{aligned} \quad (1)$$

хотя есть и другие формы (например, Ландау–Лифшица) [18]. Здесь введены следующие интегральные операторы:

$$\begin{aligned}\partial_t^{-1}(f(t')) &= F(t) = \int_0^t f(t') dt', \\ \partial_r^{-1}(\varphi(\vec{r}, \vec{r}')) &= \Phi(\vec{r}) = \int_V \varphi(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r',\end{aligned} \quad (2)$$

где под интегралами могут стоять как скалярные, так и векторные функции, а  $d^3 r' = dV'$  есть элемент объема точки источника. В первом интеграле нижний предел можно взять в виде  $-\infty$ , и тогда должно выполняться  $f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Для простоты мы рассматриваем однородные во времени процессы, в силу чего ядра в (1) зависят от разности  $t - t'$ , т.е. выполняется принцип причинности:

$$\hat{\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') = \hat{\mu}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') = 0 \quad \text{при } t' > t.$$

Во втором интеграле объем выбирается из условия  $|\vec{r} - \vec{r}'|/c \leq t - t'$ , т.е. опять выполняется принцип причинности. Он означает, что вклад в индукции вносят поля в точках, расположенных не далее расстояния, за которое свет проходит путь  $c(t - t')$ , что соответствует учету пространственной дисперсии (здесь всегда  $t \geq t'$ ). Обычно пространственной дисперсии соответствует гораздо мень-

шая область, чем обозначенная выше. Ядра в (1) в общем случае тензорные и неоднородные по координатам, что соответствует анизотропным неоднородным средам.

Запишем уравнения Максвелла в общей форме:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \partial_t \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}^e(\vec{r}, t), \\ -\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= \partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{J}^m(\vec{r}, t).\end{aligned} \quad (3)$$

Здесь, как обычно,  $\nabla \equiv \partial_r$  означает векторный дифференциальный оператор. Смысл уравнений Максвелла (3) достаточно прост: это полный баланс токов, причем в левой части стоит полная плотность тока (электрического в первом уравнении и магнитного во втором уравнении), а в правых частях стоят суммы соответствующих токов смещения и сторонних токов. Уравнения (3) наиболее полные, поскольку всё влияние среды (в частности, токи проводимости) учтено в материальных соотношениях. Учёт электрической проводимости в форме  $\vec{J}_\sigma^e(\vec{r}, t) = \sigma^e(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)$  (т.е. так, как для постоянного тока) возможен путем следующего представления ядра:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') &= \delta(t - t') \left[ \hat{\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}') + \right. \\ &\left. + \left( \sigma^e(\vec{r}) / \varepsilon_0 \right) \partial_t^{-1} \right] + \kappa^e(\vec{r}, \vec{r}', t - t'),\end{aligned}$$

где  $\kappa^e(\vec{r}, \vec{r}', t - t')$  – ядро оператора электрической восприимчивости,  $\partial_t \partial_t^{-1} = I$  – единичный оператор. В простом случае только частотной дисперсии такой учет проводимости соответствует появлению полюса у спектральной функции диэлектрической проницаемости на нулевой частоте [17]. В общем случае следует использовать формулу Друде для частотной зависимости проводимости, что соответствует виду ядра  $\hat{\varepsilon}$  интегрального оператора для плазмы. Во второе уравнение (3) входит сторонний магнитный ток. Хотя магнитный заряд (монополю Дирака) до сих пор не обнаружен, введение  $\vec{J}^m(\vec{r}, t)$  весьма полезно для симметрии, поскольку сторонние магнитные токи могут быть эквивалентны определенным конфигурациям сто-



ронных электрических токов. Далее мы считаем, что поле при  $t < 0$  отсутствовало. Соответственно плотность энергии и импульса поля и вещества (с точностью до энергии покоя) до момента  $t < 0$  были равны нулю. В момент  $t_0 = 0$  включаются источники, которые производят работу по созданию поля и изменению энергии и импульса поля и вещества. Обычно считается, что энергия источников носит неэлектромагнитный характер, что удобно чисто математически, хотя физически часто эта энергия все же электромагнитная, но действует вне объема рассмотрения поля. Часть произведенной энергии диссипируется в тепло  $q(\vec{r}, t)$ . Указанная энергия не является электромагнитной и не учитывается в балансе. Разогрев вещества в общем случае приводит к неравновесному процессу, причем разогретое вещество излучает во всем спектре, процесс является нестационарным, неравновесным и требует решения кинетического уравнения. Далее мы считаем процесс квазиравновесным и происходящим при постоянной температуре, т.е. интенсивности возбуждаемых полей считаем достаточно малыми, а теплоемкость вещества достаточно большой (бесконечно большой).

Уравнения баланса мощности получаются традиционно путем скалярного умножения каждого из уравнений (1) на вектор другого поля и сложения с использованием тождества  $\vec{a}(\nabla \times \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \times \vec{a}) = -\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ . Здесь точкой обозначено скалярное произведение, а символом "×" – векторное. Указанную точку (если нет недоразумений) часто будем опускать. В результате имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) + [\vec{E}(\vec{r}, t) \partial_t \vec{D}(\vec{r}, t) + \\ + \vec{H}(\vec{r}, t) \partial_t \vec{B}(\vec{r}, t)] = \\ = -[\vec{E}(\vec{r}, t) \vec{J}^e(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \vec{J}^m(\vec{r}, t)]. \end{aligned} \quad (4)$$

В правой части (4) стоит плотность мощности, затрачиваемая источниками на создание поля. Это уравнение имеет форму

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) + \partial_t w(\vec{r}, t) = \\ = -[\vec{E}(\vec{r}, t) \vec{J}^e(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \vec{J}^m(\vec{r}, t)], \end{aligned}$$

характерную для баланса [19]. Первый член есть плотность вытекающего потока мощности поля, а  $\partial_t w(\vec{r}, t)$  есть плотность накапливаемой мощности поля и вещества. Чтобы подсчитать затраченную работу, указанную величину надо проинтегрировать:

$$\begin{aligned} w(\vec{r}, t) = \partial_t^{-1} [\vec{E}(\vec{r}, t') \partial_t \vec{D}(\vec{r}, t') + \\ + \vec{H}(\vec{r}, t') \partial_t \vec{B}(\vec{r}, t')]. \end{aligned} \quad (5)$$

Именно эту величину, а не величину  $[\vec{E}(\vec{r}, t) \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \vec{B}(\vec{r}, t)]/2$  (как обычно принято) следует ассоциировать с  $w(\vec{r}, t)$  [16]. Энергия (5), затраченная на поле и вещество, зависит от всей предыстории процесса, что для электродинамики сплошных сред естественно, тогда как для поля в вакууме этого не требуется [20]. Решая (3) совместно с (1), определим все поля во временном промежутке  $(0, t)$ . Это позволяет вычислить плотность диссипированной энергии  $q(\vec{r}, t)$  (выделенное тепло единицы объема). Заметим, что диссипация связана не только с проводимостью, но и с запаздыванием поляризации (т.е. отклика в виде индукций на воздействие полей). Окончательно для плотности энергии поле–вещество имеем  $e(\vec{r}, t) = w(\vec{r}, t) - q(\vec{r}, t)$ . Согласно концепции Н. Умова [21], скорость переноса энергии есть  $\vec{v}_e(\vec{r}, t) = \vec{S}(\vec{r}, t)/e(\vec{r}, t)$ . Она определена в каждой точке для каждого момента времени.

Уравнения Максвелла (3) теперь перепишем в виде

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}^e(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^e(\vec{r}, t), \\ -\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \partial_t \vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{J}^m(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^m(\vec{r}, t), \end{aligned}$$

а балансное уравнение так:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) + \partial_t w_{(EM)}(\vec{r}, t) = \\ = -[\vec{E}(\vec{r}, t) (\vec{J}^e(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^e(\vec{r}, t)) + \\ + \vec{H}(\vec{r}, t) (\vec{J}^m(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^m(\vec{r}, t))], \\ w_{(EM)}(\vec{r}, t) = \partial_t^{-1} (\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t') \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t') + \\ + \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t') \partial_t \vec{H}(\vec{r}, t')) = \\ = [\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \mu_0 \vec{H}^2(\vec{r}, t)]/2. \end{aligned} \quad (7)$$



Поскольку  $\vec{S}$  есть плотность потока мощности поля и вещества, а уравнение (6) такое же, как для возбуждения поля в вакууме источниками в виде суммы сторонних токов и соответствующих токов поляризации, то смысл выражения (7) может быть в том, что это есть плотность собственной энергии поля. Величина  $w_{(EM)}$  в (6) определена с точностью до постоянной. Поскольку при  $t=0$  полная плотность энергии поля равна нулю, равна нулю и указанная постоянная. Величина вектора Пойтинга  $\vec{S}$  также определена с точностью до произвольного соленоидального вектора  $\vec{S}_0$ , т.е. такого, который удовлетворяет уравнению  $\nabla \cdot \vec{S}_0(\vec{r}, t) = 0$  [19]. Поток указанного вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю, поэтому его влияние на общий поток энергии отсутствует. Однако можно показать, что нет никакой циркуляции энергии по замкнутым контурам. Поскольку при  $t=0$  поле отсутствовало, решать приведенное уравнение следует при условии  $\vec{S}_0(\vec{r}, 0) = 0$ , откуда имеем  $\vec{S}_0(\vec{r}, t) = 0$ . Для решения вопроса о скорости переноса собственной энергии поля, т.е. энергии, связанной только с фотонами (квазифотонами) [3], необходимо найти плотность потока энергии вещества. Если решена задача о движении частиц вещества в поле, можно определить среднюю его скорость  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  в физически бесконечно малом объеме. Тогда, выбирая некий объем  $\Delta V$ , ограниченный поверхностью  $\Delta S$ , окружающей точку  $\vec{r}$ , в нерелятивистском пределе определим плотность потока так:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \vec{S}_{(M)}(\vec{r}, t) = \\ & = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta V} \oint_{\Delta S} \rho(\vec{r}', t) \vec{v}^2(\vec{r}', t) \vec{v}(\vec{r}') \cdot \vec{v}(\vec{r}', t) d^2 r'. \end{aligned}$$

Здесь предел следует понимать в смысле перехода к бесконечно малому объему. Отсюда имеем

$$\vec{S}_{(M)}(\vec{r}, t) = \left[ (1/2) \rho(\vec{r}, t) \vec{v}^2(\vec{r}, t) \right] \vec{v}(\vec{r}, t),$$

где  $\rho(\vec{r}, t)$  – плотность вещества,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  – скорость его движения. Соответственно

$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}_{(M)}(\vec{r}, t) + \vec{S}_{(EM)}(\vec{r}, t)$ . В релятивистском случае следует использовать известную связь энергии с импульсом или со скоростью [22, 23]. Однако такой подход не очень конструктивен, поскольку он требует самосогласованно решать уравнения движения и уравнения возбуждения. На уровне макроскопического описания требуется решать уравнения возбуждения сторонними источниками и токами поляризации, а также и уравнения для векторов электрической и магнитной поляризации. По-видимому, используя только балансные соотношения, нельзя разделить баланс мощности или энергии на составляющие для поля и вещества. Для рассмотрения этого вопроса приведем уравнение (6) к виду

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \vec{S}_{(EM)}(\vec{r}, t) + \partial_t w_{(EM)}(\vec{r}, t) = \\ & = - \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{J}^e(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \vec{J}^m(\vec{r}, t) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \vec{S}_{(EM)}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) + \\ & + \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \vec{J}_p^m(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (8) такое же, как в вакууме. Вопрос стоит так: можно ли однозначно определить из (9) вектор  $\vec{S}_{(EM)}$ ? Согласно теореме Гельмгольца векторное поле  $\vec{S}_{(M)}$  представимо в виде суммы его потенциальной и соленоидальной частей:

$$\begin{aligned} & \vec{S}_{(M)}(\vec{r}, t) = \vec{S}(\vec{r}, t) - \vec{S}_{(EM)}(\vec{r}, t) = \\ & = \nabla \Phi(\vec{r}, t) + \nabla \times \vec{C}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда имеем уравнение Пуассона для определения величины (10):

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) + \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) + \\ & + \vec{H}(\vec{r}, t) \vec{J}_p^m(\vec{r}, t) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что эта величина плотности потока мощности определена с точностью до ротора вектора  $\vec{C}(\vec{r}, t)$ . Хотя указанный ротор есть вектор соленоидальный и поток не создает, так как его поток через любую замкнутую поверхность есть нуль, однако в общем случае  $\vec{C}(\vec{r}, t) \neq 0$ . Более того, может быть  $\vec{C}(\vec{r}, 0) \neq 0$ , т.е. в момент возникновения



поля в веществе могут циркулировать потоки. Следовательно, вектор (10) определен неоднозначно. Для того чтобы решить уравнение (11), необходимо предположить, что вещество находится в некотором ограниченном объеме  $V$  (что в нестационарном случае является требованием естественным). В этом случае, если известны  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ , решение может быть получено, например, методом функции Грина  $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}') = (4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|)^{-1}$  для уравнения Пуассона. Тогда собственная энергия поля переносится со скоростью  $\vec{v}_e^{(EM)}(\vec{r}, t) = \vec{S}_{(EM)}(\vec{r}, t)/w_{(EM)}(\vec{r}, t)$ . По-видимому, указанный подход нельзя распространить на бесконечную среду. Более того, скорость  $\vec{v}_e^{(EM)}(\vec{r}, t)$ , в отличие от скорости  $\vec{v}_e(\vec{r}, t)$ , не содержит в себе определенный физический смысл. Рассмотрим, например, плоскую монохроматическую волну в бесконечной среде. Амплитуды  $E_0$  электрического и  $H_0$  магнитного полей в ней связаны соотношением  $H_0 = Z_0 \rho_0 E_0$ , где  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , а  $\rho_0$  – действительный нормированный импеданс. В общем случае потерь в такой волне поля сдвинуты по фазе на угол  $\varphi$ . Для монохроматической волны могут выполняться условия

$$\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) \rangle \approx 0, \quad \langle \vec{H}(\vec{r}, t) \vec{J}_p^m(\vec{r}, t) \rangle \approx 0,$$

где скобки Дирака означают усреднение за период, т.е. поле в среднем не обменивается энергией с веществом. Эти уравнения выполняются строго в среде без дисперсии, т.е. для идеальных материальных соотношений  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ . Тогда величиной (10) в среднем можно пренебречь, и вычислить величины  $\langle \vec{S} \rangle$  и  $\langle w_{(EM)} \rangle$ . Пусть волна движется вдоль направления единичного вектора  $\vec{z}_0$  оси  $z$ . Тогда мы должны были бы получить для скорости распространения чистой электромагнитной энергии выражение

$$\vec{v}_e^{(EM)} \approx \vec{z}_0 \frac{2c \cos(\varphi)}{\rho_0 + 1/\rho_0} \leq c. \quad (12)$$

В случае рассмотренных материальных уравнений имеем:

$$\varphi = 0, \quad \rho_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}, \quad \vec{J}_p^e = \epsilon_0(\epsilon - 1)\partial_t \vec{E}, \\ \vec{J}_p^m = \mu_0(\mu - 1)\partial_t \vec{H}.$$

В случае  $\rho_0 = 1$ , т.е. при  $\epsilon = \mu$ , уравнение (12) дает скорость света, тогда как  $v_e = c/n = c/\epsilon$ . Если рассмотреть балансное соотношение (8), то видно, что второй член в правой части (9) естественным образом добавляется к  $w_{(EM)}$  и получается полная плотность энергии  $w = u = nw_{(EM)}$ , тогда как  $\vec{S}_{(EM)} = \vec{S}$ ,  $\vec{S}_{(M)} = 0$ .

Рассмотрим теперь баланс импульса. Первое уравнение в (3) умножим слева векторно на  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , а второе – на  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  и вычтем одно из другого:

$$\begin{aligned} & [\vec{B}(\vec{r}, t) \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{D}(\vec{r}, t) \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)] + \\ & + \partial_t (\vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \quad (13) \\ & = -[\vec{J}^e(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{J}^m(\vec{r}, t)] = \\ & = -\vec{f}^L(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

В правой части (13) стоит с обратным знаком сила Лоренца  $\vec{f}^L(\vec{r}, t)$ , действующая на сторонние токи, т.е. это сила, затрачиваемая сторонними источниками на создание импульса поля и вещества. Второй член слева в (13) есть производная плотности импульса поле–вещество по времени. Соответственно сама плотность импульса с точностью до постоянного вектора  $\vec{g}_0^M(\vec{r})$  есть

$$\vec{g}^M(\vec{r}, t) = \vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t),$$

т.е. её следует взять в форме Минковского. Первый член в (13) представим в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\Sigma}(\vec{r}, t) &= \partial_v \hat{\Sigma}_v^v(\vec{r}, t) = \\ &= [\vec{B}(\vec{r}, t) \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) + \\ &+ \vec{D}(\vec{r}, t) \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)]. \end{aligned} \quad (14)$$



Здесь  $\nu = x, y, z$ . Величина  $\hat{\Sigma}(\vec{r}, t)$  есть тензор второго ранга в трехмерном пространстве. Поэтому дивергенция от него (свертка по одному индексу) есть стоящий в правой части (14) вектор. Указанный тензор также определен с точностью до произвольного тензора, для которого  $\nabla \cdot \hat{\Sigma}_0(\vec{r}, t) = 0$ . Поскольку при  $t = t_0 = 0$  поле отсутствовало, следует наложить начальные условия  $\vec{g}_0^M(\vec{r}) = 0$ ,  $\hat{\Sigma}_0(\vec{r}, 0) = 0$ . При указанных условиях в любой момент времени  $\vec{g}^M(\vec{r}, t)$  и  $\hat{\Sigma}(\vec{r}, t)$  определяются однозначно через решения задачи возбуждения, т.е. через поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  во все предыдущие моменты, при этом для определения  $\vec{g}^M(\vec{r}, t)$  следует вычислить интегралы (1), а для определения  $\hat{\Sigma}(\vec{r}, t)$  необходимо еще решить дифференциальное уравнение (14). Для решения (14) также можно воспользоваться теоремой Гельмгольца и решать уравнение Пуассона. Таким образом, уравнение баланса записывается так:

$$\partial_\nu \Sigma_\nu^v(\vec{r}, t) + \partial_t g_\nu^M = -f_\nu^L = -\partial_t \partial_t^{-1} f_\nu^L, \quad (15)$$

$$\nu' = x, y, z.$$

Здесь первый член есть поток компоненты  $\nu'$  полного импульса. Из этого уравнения следует, что скорость переноса компоненты  $\nu'$  импульса системы поле-вещество есть [19]

$$v_{i\nu'} = \partial_\nu \hat{\Sigma}_\nu^v(\vec{r}, t) / g_\nu^M, \quad (16)$$

а  $g_\nu^M$  – полный созданный импульс поля и вещества. Если рассмотреть все бесконечное пространство или объем, ограниченный поверхностью с радиусом  $r = ct$ , то сохраняется полный импульс поля, вещества и источника  $G_{\nu'} = \partial_r^{-1} g_\nu^M = \partial_r^{-1} (g_\nu^M + \partial_t^{-1} f_\nu^L) = 0$ , поскольку поток через поверхность равен нулю. Рассмотрим импульс, переданный веществу. Очевидно, указанная передача производится посредством токов поляризации

$$\vec{J}_p^e = \partial_t (\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}) = \sigma \vec{E} + N_p^e \partial_t \vec{p}^e,$$

$$\vec{J}_p^m = \partial_t (\vec{B} - \mu_0 \vec{H}) = N_p^m \partial_t \vec{p}^m.$$

Как уже было указано, ток проводимости  $\sigma \vec{E} = e \vec{v} N$ , где  $N$  – число носителей заряда в единице объема, учтен в токе поляризации. Соответственно  $N_p^e$  и  $N_p^m$  – числа электрических и магнитных диполей с моментами  $\vec{p}^e$  и  $\vec{p}^m$ . Переданный веществу удельный импульс есть

$$\vec{G}_{(M)} = \partial_t^{-1} \vec{g}_{(M)},$$

$$\vec{g}_{(M)}(\vec{r}, t) = \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{J}_p^m(\vec{r}, t). \quad (17)$$

Осталось найти плотность потока вещества. Для этого перепишем уравнения (3) в виде

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) + \vec{J}^e(\vec{r}, t),$$

$$-\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \partial_t \vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{J}_p^m(\vec{r}, t) + \vec{J}^m(\vec{r}, t) \quad (18)$$

и запишем для этой формы уравнений Максвелла баланс импульса, умножив первое уравнение (18) слева векторно на  $\mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t)$ , а второе – векторно на  $\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)$  и вычтем одно из другого:

$$\nabla \cdot \hat{\Sigma}_{(EM)}(\vec{r}, t) + \partial_t \vec{g}^A(\vec{r}, t) = -\vec{f}^L(\vec{r}, t). \quad (19)$$

Здесь сила Лоренца

$$\vec{f}_{(M)}^L(\vec{r}, t) = \vec{J}_p^e(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{J}_p^m(\vec{r}, t),$$

действующая на вещество, перенесена в левую часть (19) и учтена в некой плотности потока  $\hat{\Sigma}_{(EM)}$ . Указанная плотность удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla \cdot \hat{\Sigma}_{(EM)}(\vec{r}, t) = [\mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t) \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)] + \vec{f}_{(M)}^L(\vec{r}, t) =$$

$$= \mu_0 [\nabla \vec{H}^2(\vec{r}, t) / 2 - (\vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \nabla) \vec{H}(\vec{r}, t)] +$$

$$+ \epsilon_0 [\nabla \vec{E}^2(\vec{r}, t) / 2 - (\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}, t)] + \vec{f}_{(M)}^L(\vec{r}, t). \quad (20)$$



Рассмотрим смысл баланса (19). Плотность Абрагама  $\vec{g}^A(\vec{r}, t)$  есть собственная плотность электромагнитного импульса поля. Она создается первичными (сторонними) источниками и вторичными источниками (токами поляризации вещества), определяющими  $\hat{\Sigma}_{(EM)}^A(\vec{r}, t)$ . При отсутствии источников ( $\vec{J}^L = 0$ ) уравнение (19) есть типичный закон сохранения. Следовательно, тензорная величина  $\hat{\Sigma}_{(EM)}^A(\vec{r}, t)$  определяет плотности потоков компонент собственного импульса поля. Она также определена с точностью до некоторого тензора  $\hat{\Sigma}_{(EM)}^{(0)}(\vec{r}, t)$ , дивергенция которого равна нулю и при начальном условии  $\hat{\Sigma}_{(EM)}^{(0)}(\vec{r}, 0) = 0$ . Поток импульса вещества определен тензором

$$\hat{\Sigma}_{(M)}^A(\vec{r}, t) = \hat{\Sigma}^A(\vec{r}, t) - \hat{\Sigma}_{(EM)}^A(\vec{r}, t).$$

Теперь можно определить скорости переноса собственного импульса поля и вещества соответственно:

$$\begin{aligned} v_{iv'}^{(em)} &= \partial_{v'} \hat{\Sigma}_{(EM)v'}^A(\vec{r}, t) / g_{v'}^A(\vec{r}, t), \\ v_{iv'}^{(M)} &= \partial_{v'} \hat{\Sigma}_{(M)v'}^A(\vec{r}, t) / g_{(M)v'}^A(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (21)$$

Для преобразования (20) было использовано векторное тождество

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \\ &+ \vec{a} \times \nabla \times \vec{b} + \vec{b} \times \nabla \times \vec{a}, \end{aligned}$$

которое при  $\vec{a} = \vec{b}$  принимает вид

$$\nabla \vec{a}^2 = 2(\vec{a} \cdot \nabla)\vec{a} + 2\vec{a} \times \nabla \times \vec{a}.$$

Аналогично для преобразования введенных тензоров, например, тензора  $\hat{\Sigma}^A(\vec{r}, t)$ , можно использовать векторно-тензорное тождество

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) &= \\ = \nabla \cdot [\hat{I}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{a} \otimes \vec{b} - \vec{b} \otimes \vec{a}] + \\ + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}). \end{aligned}$$

Для одинаковых векторов оно приобретает форму

$$2\vec{a} \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla \cdot [\hat{I}\vec{a}^2 - 2\vec{a} \otimes \vec{a}] + 2\vec{a}(\nabla \cdot \vec{a}).$$

Для вакуума тензор  $\hat{\Sigma}^A(\vec{r}, t)$  равен максвелловскому тензору напряжений  $\hat{\sigma}_v^A$ , взятому с обратным знаком. Он также может быть преобразован с учетом того, что согласно (3)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= -\partial_i^{-1}(\nabla \cdot \vec{J}^e(\vec{r}, t')) = \\ &= \partial_i^{-1}(\partial_i \rho^e(\vec{r}, t')) = \rho^e(\vec{r}, t), \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= -\partial_i^{-1}(\nabla \cdot \vec{J}^m(\vec{r}, t')) = \\ &= \partial_i^{-1}(\partial_i \rho^m(\vec{r}, t')) = \rho^m(\vec{r}, t), \end{aligned}$$

поскольку сторонние источники удовлетворяют уравнению непрерывности (закону сохранения зарядов):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J}^e(\vec{r}, t) + \partial_t \rho^e(\vec{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{J}^m(\vec{r}, t) + \partial_t \rho^m(\vec{r}, t) &= 0. \end{aligned}$$

Так как сторонних магнитных зарядов нет, т.е.  $\rho^m(\vec{r}, t) = 0$ , плотность стороннего магнитного тока соленоидальна и может быть представлена как ротор от плотности некоторого электрического тока.

Итак, если плотность импульса определена по Минковскому, в недиспергирующей среде она есть плотность субстанции поле-вещество, а скорость ее переноса есть скорость фазовая. Её обобщение на диспергирующие среды приводит к скорости переноса (16), которая суть скорость переноса полного импульса поле-вещество. В этом случае для полного определения всех величин следует строго решать нестационарную задачу возбуждения, а все рассмотренные выше величины зависят от предыстории процесса, т.е. могут сложным образом зависеть от времени. Следует заметить, что полученные локальные (дифференциальные) балансные соотношения могут быть записаны в виде интегральных соотношений для некоторого объема  $V$ . Тогда интегралы от  $u$  и  $\vec{g}^M$  по указанному объему представляют собой соответственно полную энергию  $U$  и полный импульс  $\vec{G}^M$  указанного объема, которые сохраняются в смысле глобального закона сохранения. Может быть два случая. 1) В объеме есть источники поля. Тогда балансы полной энергии и импульса представляют





собой неоднородные балансные соотношения, в правые части которых входят величины, соответствующие производству энергии и импульса в объеме. Отрицательное производство энергии означает диссипацию. 2) В объеме не было источников до рассматриваемого момента времени  $t$ . В этом случае источники расположены вне объема, и в качестве момента  $t_0$  можно взять момент входа поля в объем. В этом случае энергия и импульс в объеме сохраняются в том смысле, что величина  $\partial_t(U + Q)$  в каждый момент времени равна вытекаемой из объема мощности, а изменение полного импульса объема равно вытекаемому из него импульсу. В случае стационарного (монохроматического) во времени поля или волны для ряда простых законов дисперсии можно получить конкретные виды указанных величин. В этом случае при предельном переходе от квазистационарного возбуждения к стационарному усредненные за период плотности «забывают свои начальные значения», т.е. перестают от них зависеть, а электромагнитный процесс выходит на стационарные значения своих величин. Для вакуума все полученные величины ТЭИ, плотности энергии и импульса совпадают с формой Абрагама. Заметим, что в нашем случае все величины определены однозначно. Так, решение дифференциальных уравнений  $\nabla \cdot \hat{\Sigma}_0(\vec{r}, t) = 0$  с нулевыми начальными условиями дает нулевые компоненты тензора  $\hat{\Sigma}_0(\vec{r}, t)$ .

## 2. Плоская монохроматическая волна в проводящем магнитодиэлектрике

Для более конкретного и простого анализа рассмотрим падение плоской монохроматической волны на слой магнитодиэлектрика толщины  $d$ . Пусть указанный слой расположен в области  $0 \leq z \leq d$  и имеет постоянные действительные спектральные проницаемости  $\varepsilon'$  и  $\mu$ , причем  $\varepsilon', \mu \geq 1$ . Это означает отсутствие у них частотной дисперсии, что справедливо в некоторой области частот  $0 < \omega \ll \omega_{\min}$ , где  $\omega_{\min}$  — некая минимальная частота из набора собст-

венных резонансных частот вещества, частоты нарушения нормального скин-эффекта (если таковой имеется), а также плазменной частоты свободных носителей заряда  $\omega_p$ .

Поскольку мы такие рассматриваем, среда предполагается проводящей, т.е. имеющей комплексную спектральную диэлектрическую проницаемость с полюсом на нулевой частоте [17]

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon' - j\sigma/(\varepsilon_0\omega) \quad (22)$$

и магнитную проницаемость  $\mu = \text{const}$ , что мы далее и используем. Например, для воды  $\omega_{\min} \sim \omega_c = 1/\tau$  лежит в районе 100 ГГц,  $\omega_c$  — частота столкновений, а  $\tau$  определяет время релаксации в формуле Дебая. Для металлов  $\omega_{\min}$  может лежать в диапазонах от инфракрасного до ультрафиолетового [24, 25]. Далее мы также будем рассматривать плоскую квазимонохроматическую волну (длинный цуг или волновой пакет), подошедшую в момент  $t_0 = 0$  слева к границе слоя и возбужденную на бесконечности при  $t = -\infty$ . Формально математически такая плоская волна может быть возбуждена в обе стороны листом стороннего тока с плотностью  $\vec{J}_{inc}^e(x, y, z, t) = \vec{x}_0 \chi(t + \tau) I_x(t) \delta(z + l)$ , расположенного при  $z = -l$  и начавшего действовать в момент  $t = -\tau$  [26]. Здесь  $\chi$  — функция Хевисайда, а для квазимонохроматической волны удобно взять  $I(t) = \sin(\omega t)$ .

Далее мы рассмотрим дифракцию указанного цуга на пластине. Однако сначала рассмотрим плоскую квазимонохроматическую волну. Для нее плотность тока введем так:

$$\vec{J}_{inc}^e(x, y, z, t) = \vec{x}_0 \chi(t + \tau) \times I_x \delta(z + l) [1 - \exp(-\delta t)] \sin(\omega t), \quad (23)$$

и будем рассматривать поле при больших временах  $t \gg \tau + l/c$ . Как частный случай возбуждение с плотностью (23) будем также рассматривать в однородной проводящей бесконечной магнитодиэлектрической среде. Введенные плотности тока создают плоскую волну с компонентами  $E_x = E$  и  $H_y = H$  (да-



лее индексы  $x$  и  $y$  часто будем опускать). Указанная волна удовлетворяет уравнениям Максвелла в форме

$$\partial_z H = -\varepsilon_0 \varepsilon' \partial_t E - \sigma E, \quad \partial_z E = -\mu_0 \mu \partial_t H. \quad (24)$$

В вакууме  $\varepsilon' = \mu = 1, \sigma = 0$ .

Как известно, для плоской монохроматической волны с комплексной зависимостью  $\exp(j(\omega t - \beta(\omega)z) - \alpha(\omega)z)$ , движущейся вдоль  $z$  в диспергирующей среде, можно ввести две скорости, определяющие перенос присущих ей физических субстанций или ее характеристик: скорость движения энергии  $v_e$  и скорость движения электромагнитного импульса поля  $v_i$  [27–29] (в силу одномерности обозначение векторов опускаем). Кроме этого для закона дисперсии  $\beta(\omega)$  можно ввести еще две величины, определяющие движение математических (кинематических) характеристик волны: фазовую  $v_p(\omega) = \omega / \beta(\omega)$  и групповую  $v_g(\omega) = (\partial\beta(\omega) / \partial\omega)^{-1}$  скорости. Первая характеризует скорость движения фазы, а вторая – скорость движения фазовых возмущений или интерференционной картины (биений) двух бесконечно близких по частоте волн одинаковой амплитуды (как ее ввел Стокс). При этом положительное значение производной соответствует положительной дисперсии или прямой волне, а отрицательное – отрицательной дисперсии или обратной волне. Коэффициент  $n'(\omega) = c / v_p(\omega)$  определяет замедление и преломление волны на границе раздела, а коэффициент  $n''(\omega)$  – потери. При этом нормальной дисперсии соответствуют значения

$$\partial n'(\omega) / \partial\omega > 0 \text{ и } \partial v_p(\omega) / \partial\omega < 0,$$

а аномальной – соответственно [30]

$$\partial n'(\omega) / \partial\omega < 0 \text{ и } \partial v_p(\omega) / \partial\omega > 0.$$

Последние две скорости в общем случае не соответствуют движениям физических субстанций и являются лишь удобными математическими понятиями при описании волн [14–16, 31–41], хотя часто  $v_g(\omega)$  отождеств-

ляют с  $v_e(\omega)$ , что для диссипативных сред неверно [14–16, 33–35, 39–40]. Поскольку все реальные среды в той или иной мере имеют диссипацию,  $v_g(\omega) = v_e(\omega)$  выполняется лишь для ряда идеальных модельных случаев, например в идеальной бесстолкновительной плазме. Случай дисперсии в идеальном проводящих волноводах, включая и периодические волноводы, совсем иной: там при гармонической волне нет частотной спектральной группы волн, а закон дисперсии возникает из-за наличия пространственной спектральной группы парциальных волн, движущихся под углом  $\theta$  к оси волновода с фазовой скоростью, равной скорости света. Указанная группа в общем случае зависит от двух углов, один из которых определяет скорость переноса энергии вдоль оси, а другой может иметь непрерывный спектр [16]. При этом

$$v_p = c / \cos(\theta), \quad v_g = c \cos(\theta) \text{ и } v_p v_g = c^2.$$

Данный случай тривиален, соответствует электродинамическим структурам, а не средам, и здесь не рассматривается. В ряде работ, например, в [41], утверждается, что всегда  $v_g \leq c$ , хотя это не так [14–16, 39, 40]. Строго говоря, в задаче о распространении импульса (частотного волнового пакета или дуга) можно ввести бесконечное число величин, имеющих размерность скорости. Например, можно ввести такие скорости:  $v_n = (\omega^{n-1} \partial^n \beta(\omega) / \partial \omega^n)^{-1}$ . Для математического описания вводятся и соответствующие комплексные скорости, в которых величина  $\beta$  заменена комплексной постоянной распространения  $\gamma(\omega) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$  [15, 37] и соответственно комплексный показатель преломления (коэффициент замедления)  $n(\omega) = n'(\omega) - jn''(\omega)$  [17]. Комплексная  $v_p$  для сигнала может иметь (и имеет) математический смысл, в отличие от комплексной  $v_g$ , которую можно ввести лишь для комплексных сигналов. В работе [42] введен 4-вектор групповой скорости, что имеет смысл в случае самосопряженного гамильтониана, когда



лагранжиан есть квадратичная по обобщенным координатам и импульсам функция. В литературе для консервативных (недиссипативных) систем известна теорема Леонтовича–Лайтхилла [27–29, 31, 43–45], согласно которой при указанном выше гамильтониане имеет место соотношение  $v_g = v_e$ . В нашем случае (и вообще для диссипативных сред) условия этой теоремы никогда не выполняются.

Традиционно  $v_g$  вводится путем разложения в спектральном интеграле фазовой постоянной  $\beta(\omega)$  в ряд Тейлора в окрестности некоторой частоты (например, несущей) с оставлением членов нулевого и первого порядков (первое приближение теории дисперсии) [36–38]. Иногда используют и обратное разложение  $\omega(\beta)$  [35]. Учет членов высших порядков как раз и приводит к появлению указанных выше скоростей, при этом вторая производная  $\partial^2 \beta / \partial \omega^2$  в первом приближении характеризует скорость расплывания импульса как целого [33–37]. В диссипативных средах можно ввести аналогичные комплексные скорости, зависящие также от постоянной затухания  $\alpha(\omega)$ . Указанные разложения являются асимптотическими [38, 46], т.е. не обязательно сходящимися. Сначала рассмотрим не распространение импульсов (цугов или волновых пакетов), а простейший одномерный случай плоской монохроматической волны. В такой волне нет частотной группы волн, поэтому и нет основания для введения групповой скорости (хотя формально для закона дисперсии  $\beta(\omega)$  ее ввести можно, что мы и делаем).

Часто необходимо рассматривать проводящие среды при достаточно низких частотах, когда дисперсией, не связанной с проводимостью, можно пренебречь. К ним, например, относятся полупроводники и металлы в радио и СВЧ диапазонах, морская вода в радиодиапазоне, ионосферная плазма (например, слой Хевисайда) при сверхнизких частотах. Указанный закон, когда дисперсия определяется только проводимостью  $\sigma$ , не зависящей от частоты (т.е. проводимостью на постоянном токе) имеет вид [35]

$$\beta(\omega) = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon' \mu / 2 \left[ 1 + \sqrt{1 + \sigma^2 / (\varepsilon_0^2 \varepsilon'^2 \omega^2)} \right]} = \omega n'(\omega) / c, \quad (25)$$

$$\alpha(\omega) = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon' \mu / 2 \left[ -1 + \sqrt{1 + \sigma^2 / (\varepsilon_0^2 \varepsilon'^2 \omega^2)} \right]} = \omega n''(\omega) / c. \quad (26)$$

Уже непосредственное применение формулы (22) демонстрирует, что групповая скорость может превышать величину  $c/\tilde{n}$ , где  $\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon' \mu}$  – коэффициент замедления или рефракции (показатель преломления) в среде в отсутствие проводимости. Более того, она может превышать и скорость света в вакууме  $c$ . Пусть  $\mu = 1$ . Обозначив  $\tilde{\omega} = \sigma / (\varepsilon_0 \varepsilon)$ , имеем:

$$\frac{d}{d\omega} \beta(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{\omega} \times \left\{ 1 - \frac{(\tilde{\omega}/\omega)^2}{2 \left( 1 + \sqrt{1 + (\tilde{\omega}/\omega)^2} \right) \sqrt{1 + (\tilde{\omega}/\omega)^2}} \right\}_{\omega=\tilde{\omega}} = \frac{0.8535\dots}{v_p(\tilde{\omega})} = \frac{\tilde{n}/c}{1.0663\dots} \quad (27)$$

Указанное превышение наступает при  $\tilde{n} < 1.0663\dots$ , что может выполняться, например, в слабо ионизированном воздухе при условиях  $\omega_c \gg \omega_p$  и  $\omega_c \gg \tilde{\omega}$ . Введение в рассмотрение дисперсии диэлектрической проницаемости в ряде случаев позволяет сделать это превышение еще более существенным [16]. Сошлемся на две работы [39, 40], которые одними из первых отмечают факт превышения групповой скоростью скорости света в области аномальной дисперсии (см. также [15]) и в то же время показывают, что сигнал при этом распространяется со скоростью  $v < c$ . Таким образом, в проводящей среде  $v_g$  никак не может характеризовать скорость движения энергии. Наоборот, фазовая скорость в такой среде, обладающей аномальной положительной дисперсией, всегда меньше скорости света:

$$v_p(\omega) = c / n'(\omega) < c.$$



Целью данной работы также является доказательство для рассмотренного выше случая соотношений  $v_e = v_p$  и  $v_i = v_p/2$ . Заметим, что в работе [16] соотношение  $v_e = v_p$  для сред с аномальной положительной дисперсией, диэлектрическая проницаемость которых описывается формулой Дебая (т.е. для полярных диэлектриков с жесткими диполями), доказано двумя независимыми методами. Мы будем считать процесс распространения волны квазиравновесным, т.е. происходящим без разогрева при постоянной температуре.

### 3. Плотность электромагнитной энергии в монохроматической волне

Пусть плоская линейно поляризованная монохроматическая волна с компонентой электрического поля  $E_x$  распространяется в проводящей среде. Указанная волна создает плотность тока проводимости  $J_{x\sigma} = \sigma E_x$ , которая приводит к диссипации энергии волны. Эта диссипация имеет экспоненциальное распределение вдоль оси  $z$  вида  $\exp(-2\alpha(\omega)z)$  и создает неоднородный вдоль  $z$  нагрев бесконечного пространства. Неоднородный нагрев, в свою очередь, генерирует тепловое излучение в направлениях  $\pm z$ , имеющее все возможные спектральные компоненты. Таким образом, процесс изначально неравновесный. Его можно приближенно считать равновесным и одночастотным, если амплитуда волны на рассматриваемом участке мала (бесконечно мала) или же теплоемкость среды бесконечно велика.

В бесконечных диссипативных средах незатухающая гармоническая волна может распространяться только за счет энергии распределенных сторонних источников, которые компенсируют потери энергии волны на диссипированное тепло  $Q$  [17]. Мы предполагаем, что подобные источники находятся вне зоны рассмотрения волны (обычно на бесконечности). Для плоской волны энергия источника должна быть бесконечной даже в отсутствие затухания, что характеризует волну как удобную математическую абст-

ракцию (решение однородных уравнений Максвелла). Формально математически плоская волна возбуждается в обе стороны листом стороннего тока с плотностью (23), действующего бесконечно долго. Если же источники находятся на бесконечности, плоская волна есть предел сферической волны.

Диэлектрическая проницаемость (22) получается путем непосредственной подстановки экспоненциальных зависимостей для полей в уравнения Максвелла с учетом тока проводимости. Можно привести и другой вывод этой величины, а именно необходимо подсчитать среднюю за период поляризацию единицы объема и воспользоваться соотношением

$$D_x(\omega, t, z) = D(\omega, t, z) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) E(\omega, t, z) = \varepsilon_0 E(\omega, t, z) + P_x(\omega, t, z). \quad (28)$$

Здесь  $E(\omega, t, z) = E_x(\omega, 0, 0) \exp(j\omega t - j\gamma(\omega)z)$ . Обозначим  $E_0 = E_x(\omega, 0, 0)$ . Соотношение (28) необходимо усреднить по периоду колебаний. В нашем случае  $\langle P_x(\omega, t, z) \rangle = (\kappa_1 + \kappa_2(\omega)) \langle E(\omega, t, z) \rangle$ . Для введенных восприимчивостей можно написать  $\kappa_1 = \varepsilon' - 1$ ,  $\kappa_2(\omega) = -j\sigma/(\varepsilon_0\omega)$ . Действительно, поляризация единицы объема в рассматриваемой среде создается поляризацией собственно вещества среды и движением свободных зарядов, рассеивающихся на атомах или молекулах вещества и друг на друге. Первая поляризация происходит без запаздывания (мгновенно) в силу нашего предположения, что характерные частоты вещества весьма высоки. Движение зарядов описывается уравнением  $\dot{x}(t) = \sigma(Ne)^{-1} \times E_x(\omega, t, z)$  и происходит так, что их потенциальная энергия равна нулю, а средняя кинетическая энергия имеет вид

$$\langle U_K \rangle = m\sigma^2 E_0^2 / (4Ne^2) \exp(-\alpha(\omega)z),$$

где  $\sigma = Ne^2/(m\omega_c)$ ,  $N$  – число заряженных частиц в единице объема. Этот результат также можно получить из диэлектрической восприимчивости плазмы



$$\kappa_p(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\omega_c)} \quad (29)$$

в предположении, что  $\omega \ll \omega_p$  и  $\omega \ll \omega_c$ , т.е. что плазменная частота и частота столкновений весьма велики, при этом  $\sigma = \varepsilon_0 \omega_p^2 / \omega_c$  – проводимость при нулевой (бесконечно низкой) частоте. Иначе говоря, проводящую среду можно рассматривать как плазму при очень низких частотах. Усредненная плотность электрической части электромагнитной энергии и диэлектрическая проницаемость газа осцилляторов с собственной частотой  $\omega_0$  получены в [15] и имеют вид

$$\langle U_E(t, z) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left\{ 1 + \frac{\omega_p^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_c^2 \omega^2} \right\} \times \exp(-2\alpha(\omega)z), \quad (30)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_0^2 + j\omega\omega_c)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_c^2 \omega^2}. \quad (31)$$

Для непроводящей среды без дисперсии следует положить  $\omega \ll \omega_0$  (или  $\omega = 0$ ), что дает

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_{p1}^2 / \omega_0^2 = 1 + \kappa_1 = \varepsilon' = \text{const}. \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \langle U_E(t, z) \rangle &= (1/4) \varepsilon_0 E_0^2 (1 + \omega_{p1}^2 / \omega_0^2) \times \\ &\times \exp(-2\alpha(\omega)z) = \\ &= (1/4) \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \exp(-2\alpha(\omega)z). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь индексом 1 отмечена плазменная частота, связанная с концентрацией диполей вещества. В такой среде энергия на частотах ниже  $\omega_{\min}$  распространяется с фазовой скоростью. Для проводящей среды с плазмой носителей следует добавить члены из формул (30), (31), в которых  $\omega_0 = 0$  (свободные заряды). В этом случае  $\omega_{p2} \gg \omega$ , поэтому

$$\langle U_E(t, z) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} (1 + \omega_{p1}^2 / \omega_0^2 + \omega_{p2}^2 / \omega_c^2) \times \exp(-2\alpha z), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + \omega_{p1}^2 / \omega_0^2 - j\omega_{p2}^2 / (\omega_c \omega) = \\ &= 1 + \kappa_1 + \kappa_2. \end{aligned} \quad (35)$$

#### 4. Скорость движения энергии

Для любого волнового процесса скорость переноса некой субстанции определяется согласно [21] ее плотностью и вектором плотности ее потока в единицу времени. В нашем случае для энергии это вектор Пойтинга  $\vec{S}(z, t) = \vec{z}_0 S(z, t)$ , при этом:

$$\begin{aligned} \vec{v}_e(z, t) &= \vec{z}_0 v_e(z, t) = \vec{S}(z, t) / u(z, t) = \\ &= \vec{z}_0 E(z, t) H(z, t) / u(z, t), \end{aligned} \quad (36)$$

что следует из закона сохранения энергии (4) при общих предположениях. В (36) и далее использованы реальные физические поля. В случае гармонических полей в однородной среде, усредняя (36) по времени с учетом (30) и учитывая магнитную энергию, получим:

$$v_e(\omega) = c \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon' \mu}} \frac{\sqrt{1 + \delta}}{1 + \zeta + \delta} < v_p(\omega), \quad (37)$$

где  $\delta = \sqrt{1 + \zeta^2}$ ,  $\zeta = \sigma / (\varepsilon_0 \varepsilon' \omega)$ . Если выполнены условия  $\omega \ll \omega_c$  и  $\sigma \gg \varepsilon_0 \varepsilon' \omega_c$ , то вторым слагаемым в знаменателе (37) можно пренебречь, и мы получим

$$v_e(\omega) \approx c \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon' \mu} \sqrt{1 + \delta}} = v_p(\omega). \quad (38)$$

При указанных приближениях единицей под корнем также можно пренебречь, и тогда

$$\begin{aligned} v_e(\omega) &= v_p(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon' \mu}} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon' \omega}{\sigma}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \mu \sigma}} = v_g(\omega) / 2. \end{aligned} \quad (39)$$

Для  $\mu = 1$  в дисперсии (39) при небольших замедлениях возможно превышение групповой скоростью скорости света в пустоте. Именно из требования  $v_g > c$  имеем условие  $\sigma < 8\omega\varepsilon_0$ . Используя условие получения формулы (39), имеем  $\omega\varepsilon_0\varepsilon \ll \sigma < 8\omega\varepsilon_0$ . Для сред с  $\varepsilon \sim 1$  можно считать это неравенство выполненным при приближении  $\sigma$  к  $8\omega\varepsilon_0$  снизу. Однако при частотах порядка  $\sigma / (8\varepsilon_0)$  пренебречь полностью током сме-



щения по сравнению с током проводимости уже нельзя, поэтому следует рассматривать строгое соотношение (25).

Результат (38) можно получить другим способом – путем перехода от квазистационарного процесса к стационарному [16]. Пусть при  $z = 0$  в момент  $t = 0$  возник создающий поле источник поверхностного тока (23). При  $t < 0$  поле отсутствовало. В области  $|z| > 0$  он создает плоскую волну. Тогда плотность работы (энергии)  $w$ , затрачиваемой источником на создание поля (5), в нашем случае для наглядности запишем так:

$$\begin{aligned}
 w(z, t) = & \int_0^t \{ E(z, t') \partial_t D(z, t') + \\
 & + H(z, t') \partial_t B(z, t') \} dt' = \\
 = & \frac{\varepsilon_0 E^2(z, t) + \mu_0 H^2(z, t)}{2} + \\
 & + \int_0^t \{ \varepsilon_0 \hat{\kappa}^e(0, z) E^2(z, t') + \\
 & + \mu_0 \hat{\kappa}^m(0, \vec{r}) H^2(z, t') + \\
 & + \int_0^t [ \varepsilon_0 E(z, t') \partial_t \hat{\kappa}^e(t' - t'', z) \vec{E}(t'', z) + \\
 & + \mu_0 \vec{H}(z, t') \partial_t \hat{\kappa}^m(t' - t'', z) \vec{H}(z, t'') ] dt'' \} dt'.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь введены ядра интегральных операторов диэлектрической и магнитной восприимчивостей  $\hat{\kappa}^e$  и  $\hat{\kappa}^m$ . В силу однородности далее зависимость у них от  $z$  опускаем, а поля имеют экспоненциальную зависимость от  $z$ . Заметим, что в (40) в качестве нижнего предела можно взять  $-\infty$ . Для рассматриваемого закона дисперсии  $\hat{\kappa}^m(t) = (\mu - 1)\delta(t)$ , а оператор диэлектрической восприимчивости имеет вид

$$\begin{aligned}
 \hat{\kappa}^e(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \\
 = & (\varepsilon' - 1)\delta(t) + \chi(t)\sigma / \varepsilon_0,
 \end{aligned}$$

где  $\chi(t)$  – функция Хевисайда. Для определения плотности энергии поля из (40) необходимо вычесть плотность диссипированной энергии  $q$  (теплоты) [15–17]. Определяя эти

величины при больших временах  $t \gg 1/\delta$  и  $t \gg 1/\omega$ , получим указанные параметры для квазимонохроматического процесса. Усредняя по периоду колебаний  $2\pi/\omega$  и переходя к пределу  $t \rightarrow \infty$ , найдем энергию монохроматического процесса. Подставляя в интегралы типа (40) выражения всех входящих в них величин через спектральные интегралы, выделяя дельта-функции и интегрируя с ними по времени, а затем, вычисляя спектральный интеграл методом теории вычетов, придем к формуле (30). Заметим, что результат  $\langle U_E \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon' |\vec{E}|^2 / 4$  для проводящей среды ( $\omega_0 = 0$ ) на малых частотах сразу следует из теоремы Умова–Пойтинга в комплексной форме [34,35]. Этот же результат следует из явного представления полей для уравнений (24) [35]:

$$\begin{aligned}
 E_x = E = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \exp(-\alpha z), \\
 H_y = H = H_0 \cos(\omega t - \beta z - \varphi) \times \\
 \times \exp(-\alpha z).
 \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь  $\varphi = \arctan(\alpha / \beta)$  – фазовый сдвиг, определяемый формулой (6.32) из [35], а отношения амплитуд в (18) дают действительный импеданс

$$Z = E_0 / H_0 = \omega \mu_0 \mu / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

При этом  $Z = Z_0 \sqrt{\mu / \sqrt{\varepsilon'^2 + \sigma^2} / (\omega^2 \varepsilon_0^2)}$  (формула (6.31) из [35]),  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ . Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 v_e = \frac{\langle S \rangle}{\langle U \rangle} = & 2 \frac{E_0^2 \cos(\varphi) / Z}{\varepsilon_0 \varepsilon' E_0^2 + \mu_0 \mu E_0^2 / Z^2} = \\
 = & \frac{2}{\omega \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon' + \varepsilon_0 \varepsilon' \sqrt{1 + \zeta^2}} = \\
 = & \frac{2}{\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon' \mu_0 \mu (1 + \delta)} = \frac{\omega}{\beta} = v.
 \end{aligned}$$

### 5. Скорость переноса импульса поля

Рассмотрим вопрос о скорости переноса электромагнитного импульса поля. В вакууме плотность импульса определяется од-



нозначно вектором Абрагама  $\vec{g}^A(t, z) = \vec{z}_0 S(t, z) / c^2$ . В сплошной среде традиционно имеются две формы: Абрагама  $\vec{g}^A$  и Минковского

$$\vec{g}^M(t, z) = \vec{z}_0 \tilde{n}^2 S(t, z) / c^2 = \tilde{n}^2 \vec{g}^A(t, z),$$

причем до сих пор вопрос в пользу выбора одного из них не решен [3–13, 41], что даже отражено в физической энциклопедии. В отсутствие дисперсии оба определения приводят к одинаковым законам сохранения для соответствующих тензоров энергии–импульса (ТЭИ) поля в форме Минковского и Абрагама, которые эквивалентны [3]. Считается, что выбор вида для плотности импульса невозможен без решения уравнений движения вещества в поле и определения ТЭИ среды. Однако без определения плотности импульса и его потока, а также хотя бы одной из этих величин невозможно определить и скорость переноса импульса. Подобные неоднозначности вообще характерны для электродинамики сплошных сред. Так, введение электродинамических потенциалов в среде также неоднозначно [47], что связано не только с калибровочными преобразованиями. В нашем случае плоской волны  $\vec{g}^M(t, z)$  и  $\vec{g}^A(t, z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{g}^A(t, z) &= \vec{z}_0 g^A(t, z) = \\ &= \frac{\vec{z}_0 E_0^2}{c^2 Z} \cos(\omega t - \beta(\omega)z) \times \end{aligned} \quad (42)$$

$$\times \cos(\omega t - \beta(\omega)z - \varphi) \exp(-2\alpha(\omega)z),$$

$$\vec{g}^M(t, z) = \vec{z}_0 g^M(t, z) =$$

$$= \frac{\vec{z}_0 \tilde{n}^2 E_0^2}{c^2 Z} \cos(\omega t - \beta(\omega)z) \times \quad (43)$$

$$\times \cos(\omega t - \beta(\omega)z - \varphi) \exp(-2\alpha(\omega)z).$$

Мы введем еще одно определение, которое ближе к определению Минковского:  $\vec{g} = \vec{z}_0 \tilde{g}^M$ , где  $\tilde{g}^M = S / v_p^2 = n'^2(\omega) g^A$ . При  $\sigma = 0$  имеем  $g^M = \tilde{g}^M$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\epsilon' \mu} / c$ , при этом импульс в среднем веществе не передается (за исключением случаев отраже-

ния от границ разделов), поскольку сила Лоренца и ток электрической поляризации  $\vec{J}_p^e = \epsilon_0(\epsilon' - 1) \partial \vec{E} / \partial t$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , и импульс движется с фазовой скоростью  $v_i = v_p = c / \tilde{n}$  [29]. Это же относится к силе Лоренца  $\epsilon_0 \epsilon' \vec{E} \times \vec{J}_p^m$  для магнитного тока поляризации  $\vec{J}_p^m = \mu_0(\mu - 1) \partial \vec{H} / \partial t$ .

В диссипативных средах за счет поглощения фотонов происходит передача импульса веществу, поток импульса направлен по  $z$ , поэтому уравнение баланса для вектора плотности импульса можно записать в виде [19, 29]

$$-\partial_t [g(t, z) + g_\sigma(t, z)] = \partial_z [v_i(t, z)g(t, z)] = v_i(t, z) \partial_z g(t, z), \quad (44)$$

где введен переданный веществу импульс  $g_\sigma(t, z)$ . Здесь предположено, что в силу однородности среды  $v_i$  не зависит от  $z$ . Для любой из трех форм имеем функциональную зависимость  $g(t, z) = G(\omega t - \beta z) \exp(-2\alpha z)$ . Скорость изменения импульса, передаваемого слою вещества толщины  $dz$  с единичной площадью, есть разность потоков  $g$  через сечения  $z$  и  $z + dz$ , поэтому

$$\partial_t g_\sigma(t, z) = 2\alpha v_i(t, z)g(t, z). \quad (45)$$

Величина (45) равна давлению поля на слой единичной толщины. Для получения давления на конечный слой (45) следует интегрировать в пределах его координат. В бесконечном слое весь импульс поля передается веществу. Подставляя (45) в (44), получим, что скорость переноса импульса постоянна и равна половине фазовой скорости:

$$v_i(t, z) = -\partial_t g(t, z) / [\partial_z g(t, z) + 2\alpha(\omega)g(t, z)] = \omega / 2\beta(\omega) = v_p(\omega) / 2. \quad (46)$$

Здесь форма записи импульса не конкретизирована. Это же соотношение можно получить из следующего рассуждения. Уравнения Максвелла записываются в форме (24). Отсюда следует уравнение баланса

$$\begin{aligned} \partial_z [\epsilon_0 \epsilon' E^2 / 2 + \mu_0 \mu H^2 / 2] = \\ = -\partial_t g^M - \mu_0 \mu \sigma E H. \end{aligned} \quad (47)$$



Поскольку  $\partial S / \partial t = -v_p (\partial S / \partial z + 2\alpha S)$ , то единственный вид  $g = \eta S / c^2$ , компенсирующий действующую на заряды силу Лоренца  $\mu_0 \mu \sigma S$ , получается при форме  $\tilde{g}^M$ . Действительно, требуем выполнения уравнения баланса  $2\alpha \eta S v_p / c^2 = \mu_0 \mu \sigma S$ . Указанный баланс записан для зарядов среды, откуда  $\eta = c^2 \omega \mu_0 \mu \sigma \beta / (2\alpha \omega^2) = c^2 / v_p^2$ . Поэтому в правой части (47) делаем замену  $\partial g^M / \partial t = \partial \tilde{g}^M / \partial t + \tilde{f}$ , где  $\tilde{f} = c^{-2} (\tilde{n}^2 - n'^2) \partial S / \partial t$ . Средняя плотность энергии в (47) имеет вид  $\langle u \rangle = \langle S \rangle / v_p = E_0^2 \cos(\varphi) / (2Zv_p) = E_0^2 / (2v_p^2 \mu_0 \mu)$ . Аналогично для третьей формы импульса имеем  $\langle \tilde{g}^M \rangle = n'^2 \langle S \rangle / c^2 = n'^2 E_0^2 / (2v_p \mu_0 \mu)$ . Поэтому скорость переноса импульса  $\tilde{g}^M$  есть

$$\tilde{v}_i^M = \langle u \rangle / \langle \tilde{g}^M \rangle = c^2 / (n'^2 v_p) = v_p(\omega) / 2. \quad (48)$$

В этом случае в уравнении баланса появляется дополнительный член  $\tilde{f}$ . Он подобен силе Абрагама и действует на среду. Однако появление указанной силы (как и силы Абрагама) не должно приводить к каким-то возражениям по невыполнению уравнений баланса, поскольку  $\langle \partial S / \partial t \rangle = 0$  для любого фазового сдвига  $\varphi$ . Поэтому как указанная сила, так и сила Абрагама импульс веществу в среднем не передают. В непроводящей среде  $\tilde{f} = 0$ ,  $\tilde{g}^M = g^M$ , а энергия и импульс распространяются с фазовой скоростью  $v_p = \omega / \beta = c / \tilde{n}$ , не зависящей от частоты. Перенос дивергентную часть  $\tilde{g}^M$  в левую часть равенства (47), получаем другое уравнение баланса  $\langle u - S / v_p \rangle = 0$ , которое есть тождество. Оставшийся член в его правой части  $\tilde{f}$  есть сила, действующая на среду, но не передающая в среднем за период ей импульс. Заметим, что использование тради-

ционного вектора плотности импульса по Минковскому не приводит к какому-либо физически ясному выражению для скорости его переноса в проводящей среде. Однако если есть локализованный сторонний электрический ток, а  $\sigma = 0$ , то введение  $\tilde{g}^M$  более удобно и приводит к переносу полного импульса со скоростью  $v_i = v_p = v_g = v_e = c / \tilde{n}$ , что тривиально, поскольку при этом нет дисперсии. Собственно так традиционно и вводится ТЭИ в среде [3–5].

В большом числе работ принято определять правильную плотность импульса по Абрагаму  $g^A(t, z) = S(t, z) / c^2$  [3–5]. При этом дополнительно возникает объемная сила Абрагама  $f^A = c^{-2} (\epsilon' \mu - 1) \partial S / \partial t$ . Такое определение считается более строгим, хотя для электродинамики сплошных сред определение Минковского часто более удобно [3,5] и соответствует экспериментам по давлению света. Уравнение баланса (47) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \partial_z [\epsilon_0 \epsilon' E^2 / 2 + \mu_0 \mu H^2 / 2] = \\ = -\partial_i g^A - f^A - \mu_0 \mu \sigma S. \end{aligned} \quad (49)$$

Теперь изменение плотности импульса в секунду, воздействующее на вещество, есть  $(2\alpha \omega \epsilon' \mu / \beta) S / c^2$ . Это есть результат вклада первого и второго членов в правой части (49). Но оно не компенсирует последнее слагаемое, поскольку  $\tilde{n} \neq n'$ . Очевидно, использование первого или второго членов в правой части (49) порознь тоже не приводит к какой-либо подобной компенсации. Используя в качестве плотности импульса величину  $g^A$ , также не удастся получить какое-либо разумное определение скорости его движения, которая бы не превышала  $c$  в случае среды с дисперсией. Исключение составляет случай непроводящей недисперсивной среды с  $\tilde{n} = n'$ . Поскольку  $c^{-2} (\epsilon' \mu - 1) \partial_i S = -v_p c^{-2} (\epsilon' \mu - 1) \partial_z S$ , то, внося дивергентную часть  $f^A$  в плотность потока, имеем:





$$\begin{aligned} v_i^A &= \frac{\langle u - v_p (\varepsilon' \mu - 1) S / c^2 \rangle}{\langle g^A \rangle} = \\ &= c^2 \langle [S] / v_p - v_p (\varepsilon' \mu - 1) [S] / c^2 \rangle / \langle S \rangle = \\ &= c \tilde{n} - v_p (\tilde{n}^2 - 1) = v_p = c / \tilde{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае импульс поля переносится с фазовой скоростью, которая меньше скорости света и совпадает со скоростью энергии в недиспергирующей среде.

Рассмотрим передаваемый среде в единицу времени (секунду) импульс. Для этого запишем уравнение баланса в форме

$$\begin{aligned} \partial_z [\varepsilon_0 E^2 / 2 + \mu_0 H^2 / 2] = \\ = -\partial_t g^A - \mu_0 \mu \sigma S + \mu_0 (\mu - 1) \sigma S - \\ - c^2 (\varepsilon' - 1) H \partial_t E - c^2 (\mu - 1) E \partial_t H. \end{aligned} \quad (50)$$

Оно также получено из уравнений Максвелла, когда среда учитывается в виде токов поляризации: электрического  $J_{px}^e = \varepsilon_0 (\varepsilon' - 1) \partial_t E$  и магнитного  $J_{py}^m = \mu_0 (\mu - 1) \partial_t H$ . Такой подход более присущ микроскопической электродинамике [7, 8], при этом описание становится весьма сложным. Известно, что сила Абрагама не полностью характеризует воздействие на среду [5]. Три последних члена в (50) правильно отражают такое воздействие. Именно  $f_\sigma^L = \mu_0 \mu \sigma S = \sigma E B$  есть сила Лоренца, действующая на ток проводимости,  $f_{pe}^L = c^{-2} (\varepsilon' - 1) H \partial_t E = J_{px}^e B$  есть сила Лоренца, действующая на ток электрической поляризации среды, а  $f_{pm}^L = c^{-2} (\mu - 1) E \partial_t H = D_x J_{py}^m$  — сила Лоренца, действующая на ток магнитной поляризации среды (здесь  $B = \mu_0 \mu H$ ). Для первой силы мы получили усредненное значение  $\langle f_\sigma^L \rangle = \mu_0 \mu \sigma \langle S \rangle = \sigma E_0^2 \beta / 2 \omega = n' \sigma E_0^2 / (2c)$ . Для второй и третьей сил соответственно имеем  $\langle f_{pe}^L \rangle = -(\varepsilon' - 1) E_0^2 \sigma / (4n'c)$  и  $\langle f_{pm}^L \rangle = (\mu - 1) \times E_0^2 \sigma / (4n'c)$ . Поскольку обычно  $n' \gg 1$ ,

первый член играет решающую роль в передаче импульса подвижным зарядам. Они, рассеиваясь на молекулах и атомах вещества, передают импульс ему. В единицу времени через единичную поверхность переносится энергия  $S = v_p u$ . Теряемая в единице объема мощность  $\sigma E_0^2 \cos^2(\omega t - \beta z)$ , усредненная за период, есть  $\sigma E_0^2 / 2$ . С другой стороны, эту же величину можно определить так:  $\langle \partial u_\sigma / \partial t \rangle = v_p^{-1} \langle \partial S_\sigma / \partial t \rangle$ , что равно  $2\alpha \langle S \rangle = \alpha E_0^2 \cos(\varphi) / Z = \sigma E_0^2 / 2$ . Потерянной энергии соответствует переданный импульс  $\langle \partial g_\sigma / \partial t \rangle$ . Для трех введенных определений плотности импульса соответственно имеем:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t g_\sigma^M \rangle &= 2\alpha \tilde{n}^2 v_p E_0^2 \cos(\varphi) / (c^2 Z) = \\ &= \sigma \tilde{n}^2 E_0^2 v_p / (2c^2), \\ \langle \partial_t g_\sigma^A \rangle &= 2\alpha v_p E_0^2 \cos(\varphi) / (c^2 Z) = \\ &= \sigma \tilde{n}^2 E_0^2 v_p / (2c^2), \\ \langle \partial_t \tilde{g}_\sigma^M \rangle &= 2\alpha n'^2 v_p E_0^2 \cos(\varphi) / (c^2 Z) = \\ &= \sigma E_0^2 / (2v_p). \end{aligned}$$

Поскольку свободные заряды удовлетворяют уравнению движения

$$Nex(t) = \sigma E_0 \cos(\omega t - \beta(\omega)z) \exp(-\alpha(\omega)z),$$

может показаться, что у вещества есть колеблющаяся  $x$ -компонента импульса. Однако это не так. Коль скоро мы предполагаем вещество электрически нейтральным, всегда имеются заряды, смещающиеся в противоположную сторону, которым и передается противоположный импульс (например, в металлах это кристаллическая решетка). Может возникнуть вопрос: откуда взялся у поля, возбуждаемого диполем или системой диполей (плоскостью диполей в нашем случае) импульс, коль скоро источники его не имели? Здесь ответ тривиален: источник возбуждает две волны в сторону положительных и отрицательных  $z$ , импульсы которых равны и противоположны.



Следует заметить, что в веществе элементарные кванты импульса поля переносятся фотонами между актами их рассеяния на частицах вещества со скоростью света  $c$ . Перенос импульса с фазовой скоростью есть коллективный результат указанных элементарных актов с учетом соответствующих фазовых задержек и интерференций. Формально учет влияния вещества может быть осуществлен введением токов поляризации. Для недиссипативных сред (т.е. в отсутствие дисперсии  $\varepsilon'$  и  $\mu$ ) сдвиг между ними и полями есть  $\pi/2$ , при этом импульс среде посредством этих токов не передается, а передается только с помощью тока проводимости. Уравнение баланса (50) (и аналогичное для баланса мощности) с введением плотности  $u_0 = (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)/2$  также не удобно для определения явлений переноса в монохроматической волне в среде.

Балансные соотношения с введением токов поляризации и сторонних токов, создающих поле, весьма продуктивны при нестационарном возбуждении [16]. В этом случае накопленная в некотором объеме энергия и импульс зависят от предыстории процесса создания поля. Например, в плазме следует учитывать энергию и импульс системы поле-вещество. Для плазмы это означает учет кинетической энергии колебаний заряженных частиц и передаваемый частицам импульс. Решая уравнения движения системы поле-вещество, в принципе можно определить ТЭИ поля и вещества в любой момент и соответственно мгновенные величины  $\vec{v}_e(\vec{r}, t)$  и  $\vec{v}_i(\vec{r}, t)$ . В случае макроскопической электродинамики сплошной среды усреднение по физически бесконечно малому объему (гомогенизация) приводит к материальным уравнениям, являющимся аналогом уравнений движения. Например, одномерные нестационарные уравнения (24) в однородной среде запишем с учетом только временной (частотной) дисперсии:

$$\begin{aligned} -\partial H / \partial z &= \partial D / \partial t + J^e, \\ -\partial E / \partial z &= \partial B / \partial t + J^m. \end{aligned} \quad (51)$$

Все величины в (51) есть функции времени и одной координаты  $z$ , что упрощает рассмот-

рение. Возьмем материальные уравнения, определяющие дисперсию, в форме

$$\begin{aligned} D(z, t) &= \varepsilon_0 \int_0^t \varepsilon(z, t-t') E(z, t') dt', \\ B(z, t) &= \mu_0 \int_0^t \mu(z, t-t') H(z, t') dt'. \end{aligned} \quad (52)$$

Не уменьшая общности, будем считать, что поле отсутствовало при  $t=0$ . Если источники расположены в плоскости  $z=0$ , то в момент  $t$  поле будет расположено в пределах  $|z| \leq ct$ . Наличие проводимости соответствует полюсу в нуле у спектральной комплексной диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} \varepsilon(z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(z, t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \int_0^t \varepsilon(z, t') \exp(-j\omega t') dt'. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\varepsilon(z, t) = 0$  при  $t < 0$ . Наиболее удобно использовать модель плазмы. Для волны в плазме можно ввести затухание Ландау и исключить указанный полюс. Записывая уравнение баланса для импульса, получим такую форму:

$$\begin{aligned} \partial_z u_0(z, t) &= -[\mu_0 H \partial_t D(z, t) + \varepsilon_0 E \partial_t B(z, t)] - \\ &= -\mu_0 H J^e - \varepsilon_0 E J^m. \end{aligned} \quad (53)$$

Последние два члена и создают импульс поля и вещества. Однако они соответствуют силе Лоренца в вакууме, а не в веществе. Подразумевая, что в квадратной скобке должна стоять величина типа  $\partial_t g(z, t)$ , получаем после интегрирования соотношение

$$\begin{aligned} g(z, t) &= \partial_t^{-1} (\varepsilon_0 E(z, t') \partial_t B(z, t') + \\ &+ \mu_0 H(z, t') \partial_t D(z, t')) = \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon(z, 0) E(z, t) + \mu_0 \mu(z, 0) H(z, t) + \\ &+ \partial_t^{-1} (\varepsilon_0 \partial_t \varepsilon(z, t-t') E(z, t') + \\ &+ \mu_0 \partial_t \mu(z, t-t') H(z, t')) = \\ &= \mu_0 H(z, t) D(z, t) + \varepsilon_0 E(z, t) B(z, t) - \\ &- \partial_t^{-1} (\mu_0 \partial_t H(z, t') D(z, t') + \\ &+ \varepsilon_0 \partial_t E(z, t') B(z, t')). \end{aligned} \quad (54)$$



Из него следует, что эта  $z$ -компонента (54) в момент  $t$  зависит не только от значений полей в данный момент, но и от всех предыдущих их значений. Волны в однородной плазме  $\mu(z, t) = \delta(t)$ ,  $\varepsilon(z, t) = \delta(t) + (\omega_p^2 / \omega_c) \times (1 - \exp(-\omega_c t)) \exp(-\omega_L t)$ , где последняя экспонента определяет затухание Ландау, причем в окончательных результатах можно считать  $\omega_L \rightarrow 0$ . Тогда  $\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 / (\omega^2 - j\omega\omega_c)$ . Задавая плотность электрического тока в виде  $J^e = I[1 - \exp(-t/\tau)] \sin(\omega t)$ , можно решить уравнения (51) и определить плотность (54) при больших значениях  $t$ , когда процесс становится квазистационарным. Однако соотношение (54) не соответствует импульсу в сплошной среде. Для вакуума оно становится тривиальным:  $g = g^A = S/c^2$ . Сплошной среде более соответствует плотность  $g = g^M = DB$  и уравнение баланса импульса, имеющее для (51) вид

$$\partial_z \Sigma + \partial_t g^M = -B_y J_x^e - D_x J_y^m. \quad (55)$$

Здесь  $\partial_z \Sigma = B \partial_z H + D \partial_z E$ ,  $g^M = DB$ ,  $\Sigma$  – плотность потока импульса в направлении  $z$ , а в правую часть (55) входят реальные силы Лоренца с учетом коллективного влияния движения всех зарядов сплошной среды. По-видимому, соотношение (55) более приемлемо для сплошной среды, поскольку при отсутствии дисперсии, т.е. при материальных соотношениях  $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ ,  $B = \mu_0 \mu H$ , имеем  $g^M = \varepsilon \mu S / c^2$ ,  $\Sigma = u = (\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu \mu H^2) / 2$ ,  $v_i^M = c / \sqrt{\varepsilon \mu} = v_p$ , т.е. мы получили обобщение плотности импульса в форме Минковского. Трудность в нестационарном случае состоит в том, что вычисление  $g^M = DB$ , как и  $\Sigma$ , требует знания всей предыстории электромагнитного процесса, при этом  $\Sigma$  еще надо находить из решения дифференциального уравнения. В одномерном случае дифракции на пластине для этого достаточно выполнить интегрирование по  $z$ . Введение же силы Абрагама в (55) как довесок к плотности импульса по Абрагаму (чтобы факти-

чески получить импульс по Минковскому) только запутывает рассмотрение. Приведем соответствующее (51) аналогичное уравнение баланса мощности  $p = \partial_t w = \partial_t (u + q)$ :  $\partial_t w + \partial_z S = -E J_x^e - H J_y^m$ . Здесь  $q(z, t)$  – диссипированная работа источников поля (тепло), которую всегда можно вычислить. Для простейшего случая проводящей среды  $q(z, t) = \sigma \partial_t^{-1} (E^2(z, t'))$ . Отсюда следует выражение для плотности энергии поле-вещество:

$$u(z, t) = \int_0^t (E(z, t') \partial_t D(z, t') + H(z, t') \partial_t B(z, t')) dt' - q(z, t). \quad (56)$$

#### Заключение

Получены представления плотностей энергии и импульса в плоской монохроматической волне для дисперсии, определяемой только током проводимости. Показано, что в этом случае энергия переносится с фазовой скоростью, которая меньше скорости света  $c$  в вакууме, тогда как групповая скорость может превышать скорость света. Импульс при малой  $\sigma$  переносится с фазовой скоростью, а при большой – с половинной фазовой скоростью. Рассмотрено несколько форм представления плотности импульса и показано, что форма Минковского предпочтительнее, чем форма Абрагама. Результат для скорости переноса энергии получен несколькими способами, в частности использован закон дисперсии для газа осцилляторов. Выводы обобщаются и при наличии нескольких резонансных частот осцилляторов, а также и для наличия внутреннего поля. Существенным здесь является подсчет поляризуемости с использованием уравнения движения частиц, которое имеет первый порядок. В этом случае потенциальная энергия в веществе не накапливается, а его собственные колебания отсутствуют. Приведенные результаты могут быть обобщены для проводящих полярных диэлектриков, например для воды, содержащей ионы проводимости. В идеально дистиллированной воде замедление изменяется от 9 примерно до 1, а скорость энергии сов-



падает с фазовой скоростью. В содержащей ионы проводящей воде в области сверхнизких частот коэффициенты замедления и потерь стремятся к бесконечности. В морской воде ( $\sigma = 4$  С/м) на частоте около 900 МГц ток смещения равен току проводимости, а на существенно более низких частотах вода ведет себя подобно металлу. Знание скорости движения энергии и соответственно импульсов важно для передачи сообщений, например, при связи с подводными лодками, которая осуществляется на сверхнизких частотах, при этом сигнал передается со скоростью, примерно равной фазовой, а групповая скорость в два раза больше. Например, импульс с несущей частотой 1 кГц и длительностью 2 мс (два периода) достигает подводной лодки на глубине 100 м от поверхности за 2 мс и детектируется по максимуму огибающей (без учета времени срабатывания детектора), тогда как сильно размытый фронт уширенного в несколько раз импульса приходит через 1 мс и не может быть протектирован [38].

Вопрос о форме ТЭИ в электродинамике сплошных сред и о соответствующих плотностях, известный как Абрагама–Минковского контroversия, до сих пор остается дискуссионным (см. дополнительно [48–53]). В различных модельных примерах как за определенную форму ТЭИ, так и против неё, часто содержатся неточности, разбирать которые в данной работе нет возможности (см. [12]). В подавляющем большинстве известных автору рассуждениях данного вопроса используются статические материальные уравнения  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ . Основное возражение против ТЭИ Минковского состоит в том, что он несимметричен и для него не выполняется закон сохранения импульса [4]. В обеих формах ТЭИ компонента  $T_{44}$  определена как в статике, т.е. в виде  $T_{44} = u = (\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2 + \mu_0 \mu \vec{H}^2) / 2$ , тогда как в динамике имеется взаимодействие поля с веществом и наоборот, т.е. следует использовать выражения типа (56) [15, 16]. Не понятно, почему плотность энергии в среде должна зависеть от параметров среды, а

плотность импульса  $\vec{g}^A$  – нет, и быть такой же, как в вакууме. Ясно, что взаимодействие между полем и веществом может приводить к асимметрии ТЭИ поля и вещества [13]. Выше было показано, что плотность импульса зависит от временного процесса и определяется его предысторией. О конкретной форме ТЭИ поля в виде алгебраических соотношений, по-видимому, можно говорить только для гармонических процессов в средах с определенными законами дисперсии, когда эти гармонические процессы получены как предельный переход от соответствующих квазимонохроматических процессов создания поля, при котором усредненные за период компоненты  $\hat{T}$  выходят на стационарный уровень. Полный ТЭИ системы поле–вещество при произвольной дисперсии (временной и пространственной) пока не построен, и вопрос о требовании для него симметричности открыт. Если же тензоры поля и вещества симметричны по отдельности, это означает отсутствие взаимодействия между веществом и полем в смысле обмена энергией и импульсом.

В качестве примера покажем выполнение закона сохранения импульса для формы Минковского. Пусть плоский длинный с длиной  $l$  квазистационарный (квазимонохроматический) цуг или волновой пакет с прямоугольной огибающей и несущей частотой  $\omega$  (импульс в смысле нестационарной волны) в момент  $t_0 = 0$  подошел к границе слоя толщины  $d$  с постоянными проницаемостями  $\epsilon$ ,  $\mu$ . Квазистационарность означает, что  $l \gg \lambda_0 = 2\pi / k_0 = 2\pi c / \omega$ . Она нужна, чтобы можно было использовать квазимонохроматические значения величин. Длина волны в слое  $\lambda = \lambda_0 / n$ ,  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Пусть для простоты толщина  $d$  подобрана так, что на момент  $t_1$  весь цуг вошел в слой и полностью его заполнил. Поскольку скорость движения есть  $v_p = c/n$ , для этого времени получаем  $t_1 = d/v_p = nd/c$ . Для того чтобы это имело место, должно выполняться  $l = nd$ . Большую длину  $l$  для про-



стоты подберем так, чтобы на ней укладывалось целое  $M$  число длин волн:  $l = M\lambda_0$ ,  $M \gg 1$ , при этом  $d/\lambda = M$ . Имеется и отраженный импульс. На момент  $t_1$  он расположен в области  $-l \leq z \leq 0$  так же, как падающий импульс в момент  $t_0$ . Коэффициент отражения по электрическому полю нормально падающей плоской монохроматической волны от границы раздела есть  $R = (\rho_0 - 1)/(\rho_0 + 1)$ , где  $\rho_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – нормированный к  $Z_0$  импеданс, а для коэффициента прохождения внутрь пластины имеем  $T = 2\rho_0/(\rho_0 + 1)$ . Падающая волна имеет вид (41) при  $\alpha = 0$ ,  $\varphi = 0$ . Далее будем рассматривать баланс для единичной площадки и средних значений плотностей импульсов. На момент  $t_0$  поле имело импульс  $G_0^M = g^M l = \langle S_0 \rangle l / c^2$  в направлении оси  $z$ , а импульс пластины был нулевым. Рассмотрим сначала идеальный случай согласованной пластины (stealth)  $\varepsilon = \mu$ . В этом случае отражения нет, и импульс пластине не передается. При интегрировании плотности импульса по  $z$  или после усреднения за период возникает множитель  $1/2$  у амплитудных значений. Соответственно  $g^M = Z_0 n^2 E_0^2 / (2c^2) = \langle u \rangle n / c$ , где  $\langle u \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 / 2$ . В момент полного заполнения пластины  $t_1 = l/c$  импульс поля  $G_1^M = g^M d = dn^2 \langle S_1 \rangle / c^2 = dn \langle u_1 \rangle / c = nG_0^M$ . После того как цуг полностью вышел из пластины, т.е. в момент  $t_2 = 2t_1$  и после, вновь имеем  $G_1^M = G_0^M$ . Импульс Минковского как бы не сохраняется, поскольку пластина неподвижна. Такое «несохранение импульса в форме Минковского» выдвигается в [4] как основной аргумент против него и в пользу импульса Абрагама. Посмотрим, что будет с импульсом Абрагама. При  $t_0$  имеем:  $G_0^A = G_0^M = \langle S_0 \rangle l / c^2 = \langle u_0 \rangle l / c$ , а при  $t_1$  соответственно  $G_1^A = \langle S_1 \rangle d / c^2 = \langle u_0 \rangle d / c = G_1^M / n^2$ . Получили парадокс: ни импульс

Минковского, ни импульс Абрагама не сохраняются, при этом для первого сначала возникает, а затем исчезает дополнительный импульс, а для второго сначала часть импульса пропадает, а затем появляется вновь!!! В чем же дело? Для разрешения парадокса необходимо найти, где произошла подмена понятий или неправомерное их использование. В [4] аналогичные рассуждения приведены для цуга и пластины с  $\mu = 1$ ,  $n = \sqrt{\varepsilon}$ , причем предполагается, что пластина идеально согласованная с помощью просветляющего слоя. Идеально согласовать пластину нельзя, но для монохроматического процесса получить достаточно малый коэффициент отражения путем создания многослойного или неоднородного просветляющего слоя можно. Естественно, этот слой надо учитывать. Но у нас цуг с прямоугольными фронтами, имеющий все частоты, а процесс нестационарный!!! Конечно, основная спектральная интенсивность сосредоточена вблизи несущей частоты, но, тем не менее, пластина получит некоторый малый импульс. В случае  $\varepsilon = \mu$  отражения нет, но это условие может быть выполнено для дисперсивных искусственных сред в достаточно узкой полосе, при этом спектральные проницаемости всегда комплексные. Это означает, что реальная пластина из stealth материала также получит некий импульс. Далее мы от этого абстрагируемся. Заметим, что формула (1.13) из [4], якобы показывающая сохранение импульса Абрагама, на самом деле показывает его нарушение:  $G = e / nc$ . В ней  $e$  – полная энергия цуга. Она одина при любом его положении. В вакууме  $e = \langle u_0 \rangle l$ . В среде  $e = \langle u \rangle d$ , при этом, поскольку цуг сжимается в  $n$  раз,  $\langle u \rangle = n \langle u_0 \rangle$ , что непосредственно видно из (41). При этом полный импульс в обоих случаях есть  $G = e / c$ .

Так как же разрешить парадокс? Ясно, что для нашего случая в отсутствие силы Лоренца локальное уравнение баланса имеет вид

$$\partial u / \partial z = -\partial g^M / \partial t, \quad (57)$$

что следует из (41). Если выполняется локальный баланс, выполняется и глобальный (интегральный) баланс и его просто надо честно вычислить. Для этого заметим, что  $u(z, t)$  имеет скачки  $u_0(0, t)(n-1)$  при  $0 \leq t \leq t_1$  и  $u_0(d, t)(1-n)$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Соответственно в (57) появляются в указанные промежутки члены с дельта-функциями  $u_0(0, t)(n-1)\delta(z)$  и  $U_0(d, t)(1-n)\delta(z-d)$ .

Импульс в момент  $t_1$  следует вычислять так:

$$G_1^M = - \int_0^{t_1} \left[ \int_0^d u(z, t) dz + u_0(0, t)(n-1) \right] dt = \\ = nG_0^M - (n-1)G_0^M = G_0^M.$$

Указанный вывод о несохранении  $G^M$  в [4] основан на постоянстве скорости центра масс системы неподвижная пластина – движущийся электромагнитный цуг (фотон). Первая не обладает скоростью, а движущийся в одном направлении цуг (фотон) не обладает массой [40, 41]! Между тем вводится «масса фотона» из соотношения  $m = e/c^2$  и его импульс в виде  $G = mv_p = e/(cn)$ ! Говоря о цуге или фотоне в среде, следует иметь в виду, что плотность энергии возрастает в  $n$  раз, следовательно, возрастает и число фотонов, а скорость переноса энергии падает. Это значит, что в пластине имеются фотоны обоих направлений, движущиеся со скоростью  $c$  между актами элементарных взаимодействий с частицами вещества, а фотон с импульсом  $n\hbar\omega/c$  есть, по сути, квазичастица [3]. Полный интерференционный результат для макроскопической волны с большой энергией, в которой содержится много фотонов, есть следствие теоремы погашения, согласно которой волна в среде идет в прямом направлении с фазовой скоростью. В общем случае отражения от непоглощающей пластины при  $t > t_2$  имеем баланс энергии:  $1 = |R|^2 + |T|^2$ . Здесь введены полный коэффициент отражения  $R = (\rho_0^2 - 1) \tan(\theta) / ((\rho_0^2 + 1) \tan(\theta) - 2j\rho_0)$  и коэффициент прохождения  $T = (\cos(\theta) + j \sin(\theta)(Z^2 + 1) / (2Z))^{-1}$ ,

$\theta = \gamma l = 2\pi l / \lambda_0$ , поэтому отраженный импульс есть  $G_r^M = e|R|^2/c$ , а прошедший – соответственно  $G_t^M = e|T|^2/c$ , т.е. пластине передается импульс  $e(1 + |R|^2 - |T|^2)/c$ . Если  $R = 0$ , то  $T = 1$ , и пластина неподвижна. Если же  $\sigma \neq 0$ , то величина  $\gamma$  комплексная, баланс энергии такой:  $|R|^2 + |T|^2 < 1$ , и часть импульса внутри слоя передается ему. При очень малом  $|R|$  и большой толщине весь проходящий импульс передается пластине. При  $\sigma \rightarrow \infty$  имеем  $R \rightarrow -1$ ,  $T \rightarrow 0$ , и пластина получает удвоенный импульс. Здесь мы опять применили стационарные формулы к квазистационарным процессам вместо решения более сложной нестационарной задачи, что оправдано для длинного цуга. В стационарном же случае имеет смысл говорить лишь о давлении  $\langle u \rangle (1 + |R|^2 - |T|^2) / c$  или о переданном в секунду импульсе, при этом формулы уже точные. Что касается импульса  $G^A$ , то в рассмотренном случае он сохраняется, только если к нему прибавлен импульс, обусловленный силой Абрагама. Указанная сила для недиспергирующей среды возникает только при входе и выходе цуга из пластины [5]. Именно необходимость дополнения  $G^A$  неким импульсом для выполнения закона сохранения является основным аргументом против него. Другой аргумент против импульса Абрагама в среде состоит в том, что сила Абрагама точно не равна силам Лоренца, действующим на токи поляризации вещества.

Рассмотрим в качестве примера два атома с массами  $m_1$  и  $m_2$ , неподвижных в лабораторной системе при  $t < 0$ . Энергия системы имеет вид  $e = e_1 + e_2$ ,  $e_1 = m_1 c^2$ ,  $e_2 = m_2 c^2$ . Первый атом находится в возбужденном состоянии с энергией возбуждения  $\hbar\omega$  и расположен в начале координат, а второй – в точке  $(0, 0, z)$ ,  $z > 0$ . Возбужденный атом неподвижен (как квантовая частица) в



том смысле, что его волновая функция не зависит от времени (точнее, имеет множитель  $\exp(-ie_1 t / \hbar)$ ,  $i = -j$ ). При этом вероятность обнаружения атома в начале координат максимальна и выполняется соотношение неопределенности  $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$ . Это же относится и ко второму атому в точке  $z$ . Поскольку взаимодействия нет, полная волновая функция есть произведение волновых функций атомов и не зависит от времени до момента  $t_0 = 0$ . В момент  $t_0 = 0$  первый атом испускает фотон с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\vec{p} = \vec{z}_0 p = \vec{z}_0 \hbar\omega / c$ . Атом получает импульс  $-\vec{p}$  и движется влево, что означает появление зависимости его волновой функции от времени. Указанная волновая функция приобретает вид волнового пакета в виде собственной функции оператора импульса. Этот волновой пакет смещается влево со скоростью, удовлетворяющей соотношению  $(v_1/c) / \sqrt{1 - (v_1/c)^2} = p / (m'_1 c)$ , при этом  $m'_1 = \sqrt{(e_1 - \hbar\omega)^2 / c^4 - \vec{p}^2 / c^2} = m_1 \sqrt{1 - 2p / (m_1 c)}$  есть изменение массы в результате взаимодействия. Величина энергии возбуждения атома  $\hbar\omega$  играет роль внутренней неэлектромагнитной энергии, создающей поле. Пусть в момент  $t_1$  фотон в точке  $z = ct_1$  поглощается другим атомом. Указанный атом получает импульс  $\vec{p}$ , переходит в возбужденное состояние с энергией  $e_2 + \hbar\omega = m'_2 c^2 / \sqrt{1 - (v_2/c)^2}$ , при этом изменяется его масса:  $m'_2 = m_2 \sqrt{1 + 2p / (m_2 c)}$ . Скорость атома также определяется из соотношения  $(v_2/c) / \sqrt{1 - (v_2/c)^2} = p / (m'_2 c)$ . До момента  $t_0$  система двух невзаимодействующих атомов имела нулевой импульс, массу  $m_1 + m_2$  и энергию  $(m_1 + m_2)c^2$ . В промежутке  $t_0 < t < t_1$  масса атомов равна  $m'_1 + m_2$  и меньше их исходной массы, масса фотона равна нулю, но масса всей системы поле-вещество не

изменилась и равна  $m + m_0$ , поскольку её полный импульс есть нуль. При этом энергия и импульс сохраняются, а положение фотона не определено. Фотон локализуется (а поле исчезает) в момент поглощения (взаимодействия) в точке  $z$ . Масса всей системы опять равна  $m_1 + m_2$  и далее сохраняется, полный импульс также сохраняется и равен нулю. Сохраняется также и полная энергия  $e = m'_1 c^2 / \sqrt{1 - (v_1/c)^2} + m'_2 c^2 / \sqrt{1 - (v_2/c)^2}$ , при этом суммарная масса атомов равна  $m'_1 + m'_2 < m_1 + m_2$ . Образуется дефект массы, связанный с тем, что после взаимодействия атомы приобрели противоположные импульсы. Полные же величины энергии, массы и импульса всей замкнутой системы поле-вещество остались неизменными. Если  $2p / (m_i c) \ll 1$ ,  $i = 1, 2$ , то можно воспользоваться разложениями по малому параметру. Как видно, в первом порядке дефекта массы нет. Данный качественный пример, основанный на представлении нестационарного взаимодействия стационарными процессами с двумя точечными взаимодействиями, приведен для того, чтобы показать необходимость учета в балансе сторонних источников поля, в том числе и если оно имеет момент импульса. Он также полезен в связи с вышеприведенным примером из [4]. В сплошной среде распространение волны на микроскопическом уровне основано на подобных многочисленных актах взаимодействия, при этом скорость распространения зависит от времен жизни атомов в возбужденных состояниях, т.е. от характера рассеяния: упруго оно или нет, и насколько. В такой волне всегда есть преимущественный поток фотонов в направлении движения энергии, но возможны и обратные фотоны. На макроскопическом уровне волна создает токи поляризации, которые ее и поддерживают. Абсолютно упругое рассеяние фотонов на плазме свободных носителей происходит в пределе бесконечной проводимости, т.е. при  $\omega_p^2 / \omega_c \rightarrow \infty$ , или при  $\omega \rightarrow 0$ , что соответ-



ствуует отражению от идеальной электрической стенки. Из изложенного следует, что процессы обмена фотонами всегда, по крайней мере, квазистационарные. Поэтому монохроматическая волна есть в некотором роде удобная абстракция, которая принципиально в эксперименте получена быть не может.

В заключение заметим, что реальные законы дисперсии конкретных веществ весьма сложны. Необходимо рассматривать внутреннюю молекулярную или кристаллическую структуру, внутреннее поле, несколько (или несколько десятков) собственных резонансных частот, имеющуюся пространственную дисперсию, а также применять нестационарный подход. Это означает, что в ТЭИ системе поля и вещества не определяется только значениями полей в данный момент, т.е. должна быть учтена предыстория создания поля источниками и соответственно предыстория воздействия на вещество сил источников и поля. Если источников в рассматриваемом объеме нет, такая предыстория должна быть учтена с момента вхождения созданного внешними источниками поля в указанный объем. Поэтому следует брать плотность импульса в виде  $\vec{g}^M = \vec{D} \times \vec{B}$  с учетом вычислений (1), а для плотности энергии вычислять соотношения типа (56) [15, 16]. При этом полный ТЭИ системы поле–вещество несимметричен. В случае отсутствия дисперсии он переходит в ТЭИ Минковского. Для плоской волны величина  $\hat{\partial}_z u$ , определяемая соотношением (56), не дает плотность потока импульса. В общем случае использование только материальных уравнений позволяет разделить импульс поля и вещества и соответствующие им потоки. Для плотности потока энергии такое разделение без решения уравнений движения вещества, по видимому, не имеет места. Это связано с тем, что плотность мощности токов поляризации в правой части (9), содержащая производные по времени, скорее, относится к полной плотности мощности, нежели является дивергенцией некоего вектора. К тому же указанный вектор определяется неоднозначно. Кроме этого энергию взаимодействующей системы поле–вещество в общем случае не-

возможно разделить на энергию поля и вещества без учета энергии взаимодействия. Основное возражение против ТЭИ Минковского состоит в том, что он несимметричен. Требование симметричности возникает из требования однозначности определения ТЭИ и условия, что тензор момента следует определять через ТЭИ по стандартным формулам, при этом используется связь компонент импульса с компонентами ТЭИ такая, как для поля в вакууме ([52], с.107). Очевидно, такой ТЭИ есть тензор поля в вакууме, совпадающий с тензором Абрагама. В нашем случае нестационарного возбуждения в среде ТЭИ определяется однозначно, и дополнительного условия не требуется. Тензор же момента импульса системы поле–вещество следует определять отдельно. При этом необходимо учитывать, обладало или нет вещество моментом импульса до создания поля, а также момент, передаваемый сторонним источникам при генерации поля.

Приведенные выражения для ТЭИ зависят от формы материальных уравнений. Если материальные соотношения взять в другой форме, получим другие соотношения. В последнее время встает вопрос о ТЭИ и о соответствующих плотностях (и скоростях) в искусственных средах с пространственной дисперсией, включая и бианизотропные левые среды (см., например, подобную неудачную попытку в [53]), модели которых весьма сложны. Однако в ряде случаев законы дисперсии в определенных частотных областях можно описать более простыми соотношениями (моделями), что и использовано в данной работе.

#### Список литературы

1. *Minkowski H.* Die Grungleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1908. P.111.
2. *Abraham M.* Zur Electrodynamik bewegter Körper // Rendiconti Circolo Matematico di Palermo. 1909. Vol.28. P.1–28.
3. *Гинзбург В.Л.* О законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде и о тензоре энергии-импульса в макроскопической электродинамике // УФН. 1973. Т.110, вып.2. С.309–319.
4. *Скобельцын Д.В.* О тензоре импульс-энергии электромагнитного поля // УФН. 1973. Т.110, вып.2. С.253–292.
5. *Гинзбург В.Л., Угаров В.А.* Несколько замечаний о силах и тензоре энергии-импульса в макроскопической электродинамике // УФН. 1976. Т.118, вып.1. С.175–188.





6. *Brevik I.* Electromagnetic energy-momentum tensor within material media. II. Discussion on various tensor forms // *Mat. Phys. Med. Dan. Vid. Selsc.* 1970. Vol.37, №13. P.1–79.
7. *Groot S. de, Suttorp L.* The relativistic energy-momentum tensor in polarized media: IV. The macroscopic material energy-momentum tensor // *Physica.* 1968. Vol.38. P.84.
8. *Groot C.P. de, Samton L.G.* Электродинамика. М.: Наука, 1982. 530 с.
9. *Скобельцын Д.В.* Парадоксы квантовой теории эффектов Вавилова–Черенкова и Доплера // *УФН.* 1977. Т.122. С.295.
10. *Гинзбург В.Л.* Замечания к статье Д.В. Скобельцына «Парадоксы квантовой теории эффектов Вавилова–Черенкова и Доплера» // *УФН.* 1977. Т.122. С.325.
11. *Leonhardt U.* Momentum in an uncertain light // *Nature.* 2006. Vol.444. P.823–824.
12. *Pfeifer R.N., Nieminen T.A., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H.* // *Rev. Mod. Phys.* 2007. Vol.79. P.197.
13. *Obukhov Yu.N.* Electromagnetic energy and momentum in moving media // *Annalen der Physik.* 2008. №8. P.1–22.
14. *Давидович М.В.* О парадоксе Хартмана, туннелировании электромагнитных волн и сверхсветовых скоростях // *УФН.* 2009. Т.179, №4. С.443–446.
15. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985. 504 с.
16. *Давидович М.В.* О плотности электромагнитной энергии и ее скорости в среде с аномальной положительной дисперсией // *Письма в ЖТФ.* 2006. Т.32, вып.22. С.53–63.
17. *Виноградов А.П.* К вопросу о материальных уравнений в электродинамике // *УФН.* 2002. Т.172, №3. С.363–370.
18. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624.
19. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. М.: Мир, 1966. Т.6. 260 с.
20. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. М.: Иностран. лит., 1956. 492 с.
21. *Умов Н.А.* Теория простых сред и её приложение к вопросу основных законов электростатических и электродинамических взаимодействий. Одесса, 1873.
22. *Окунь Л.Б.* Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // *УФН.* 1989. Т.158, вып.3. С.511–530.
23. *Окунь Л.Б.* О письме Р.И. Храпко «Что есть масса?» // *УФН.* 2000. Т.170, №12. С.1366–1371.
24. *Котельников И.А.* О затухании в волноводе // *ЖТФ.* 2004. Т.74, вып.9. С.91–96.
25. *Ordal M.A., Long L.L., Bell R.J. et al.* Optical properties of the metals Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, and W in the infrared and far infrared // *Appl. Opt.* 1983. Vol.22, №7. P.1099–1120.
26. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
27. *Зильбергейт А.С., Копилевич Ю.И.* О скорости переноса энергии волнами // *ЖТФ.* 1980. Т.50, №2. С.241–251.
28. *Зильбергейт А.С., Копилевич Ю.И.* О скорости переноса энергии волнами // *ЖТФ.* 1980. Т.50, №3. С.449–460.
29. *Гуреев А.В.* О скорости переноса энергии электромагнитными волнами в регулярном экранированном волноводе // *ЖТФ.* 1990. Т.61, №1. С.23–28.
30. *Силин Р.А.* Периодические волноводы. М.: Фазис, 2002. 438 с.
31. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 438 с.
32. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных средах. М.: Мир, 1983. 136 с.
33. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматлит, 1960. 550 с.
34. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
35. *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971. 654 с.
36. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
37. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов // *УФН.* 1976. Т.118, вып.2. С.339–367.
38. *Вайнштейн Л.А., Вацман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
39. *Stratton J.A.* Electromagnetic theory. N.Y.; L.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1941.
40. *Schulz-DuBois E.O.* Energy Transport Velocity of Electromagnetic Propagation in Dispersive Media // *Proc. of the IEEE.* 1969. Vol.57, №10. P.1748–1757.
41. *Островский Л.А., Потанов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
42. *Полевой В.Г., Рытов С.М.* О четырехмерной групповой скорости // *УФН.* 1978. Т.125, вып.3. С.540–565.
43. *Рытов С.М.* Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн // *ЖЭТФ.* 1947. Т.17(10). С.930.
44. *Lighthill M.J.* Group Velocity // *J. Inst. Math. and its Appl.* 1965. Vol.1. P.1–28.
45. *Biot V.A.* General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport // *Phys. Rev.* 1957. Vol.105. P.1129–1137.
46. *Ольвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1973. 376 с.
47. *Mayergoyz I.D.* Some remarks concerning electromagnetic potentials // *IEEE Trans.* 1993. Vol.Magn.-29, №2. P.1301–1305.
48. *Hinds E.A., Barnett S.M.* Momentum exchange between light and single atom: Abraham or Minkowski? // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol.102(5). P.050403.
49. *Marklund M.* Radiation transport in diffractive media // *J. Phys. A, Math. Gen.* 2005. Vol.38, №19. P.4265–4273.
50. *Garrison J.C., Chiao R.Y.* Canonical and kinetic forms of the electromagnetic momentum in ad hoc quantization scheme for a dispersive dielectric // *Phys. Rev. A.* 2004. Vol.70, №5. P.053826.
51. *Leonhardt U.* Energy-momentum balance in quantum dielectrics // *Phys. Rev. A.* 2006. Vol.73. P.032108.
52. *Brevik I.* Electromagnetic energy-momentum tensor within material media. I. Minkowski tensor // *Mat. Phys. Medd. Dan. Vid. Selsc.* 1970. Vol.37, №11. P.1–52.
53. *Brevik I.* Electromagnetic energy-momentum tensor within material media // *Mat. Phys. Medd. Dan. Vid. Selsc.* 1970. Vol.37, №13. P.1–52.
54. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
55. *Веселаго В.Г.* Перенос энергии, импульса и массы при распространении электромагнитной волны в среде с отрицательным преломлением // *УФН.* 2009. Т.179, №6. С.689–694.