



## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 537.86:530.182

### Пространственно-временные структуры в ансамбле нелокально связанных отображений Некоркина

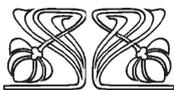
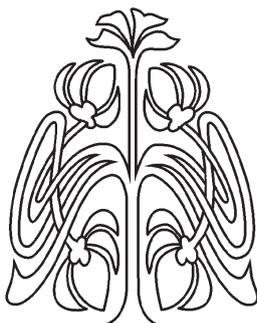
С. А. Богомолов, Е. В. Рыбалова, Г. И. Стрелкова, В. С. Анищенко

Богомолов Сергей Алексеевич, магистрант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, bogomolov22@gmail.com

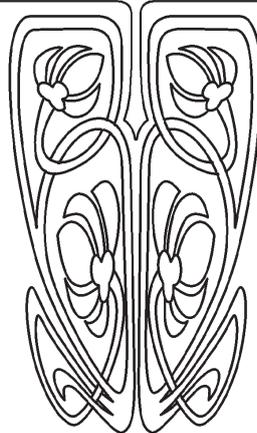
Рыбалова Елена Владиславовна, магистрант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, rybalovaev@gmail.com

Стрелкова Галина Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, strelkovagi@info.sgu.ru

Анищенко Вадим Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, wadim@info.sgu.ru



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



В настоящей работе методами численного моделирования решается задача анализа механизма реализации пространственно-временных структур, содержащих так называемые «уединенные состояния». В зарубежной литературе указанный режим назван «solitary state» или «solitary state chimera» (SSC). Режим SSC исследуется в работе на примере динамики одномерного кольца нелокально связанных индивидуальных отображений Некоркина, моделирующих нейронную активность. Режим колебаний индивидуальных отображений выбирался отвечающим спайковым колебаниям, близким к периодическим. Задача решалась при условии задания периодических граничных условий. Начальные условия для индивидуальных элементов задавались распределенными случайным образом в пространстве элементов ансамбля. При определенном выборе значений параметров исследуемой системы были найдены пространственно-временные структуры, включающие режимы SSC. Численный анализ показал, что причиной реализации режимов SSC является режим бистабильности, возникающий в индивидуальных осцилляторах ансамбля. Бистабильный характер динамики подтвержден расчетом бассейнов притяжения аттракторов, рождающихся в указанном режиме. В силу случайного характера начальных условий часть осцилляторов попадает в бассейн притяжения одного аттрактора, а часть – в бассейн притяжения другого. Этот факт и приводит к рождению режимов SSC. Приводятся результаты расчетов, подтверждающие режим устойчивости исследуемых структур при вариации управляющих параметров в уравнениях ансамбля. В результате показано, что описанный в настоящей работе механизм реализации режимов SSC полностью подтверждает результат более ранних работ авторов.

**Ключевые слова:** ансамбль связанных осцилляторов, нелокальная связь, химеры, уединенные состояния, отображение Некоркина.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-2-86-94>



## Введение

Одной из актуальных проблем в современной нелинейной динамике является анализ пространственно-временных структур в ансамблях связанных осцилляторов. Это обусловлено открытием новых структур, названных химерными состояниями [1–3]. Современные исследования направлены на выявление новых типов химерных структур, анализ их динамических и статистических характеристик и механизмов их возникновения в ансамблях из различных индивидуальных

осцилляторов [4–24]. Предметом изучения в настоящей работе будут структуры, включающие так называемые «уединенные состояния», для которых в англоязычной литературе введен термин «solitary state» [25–28] и «solitary state chimera» [29].

Для иллюстрации этого режима на рис. 1 представлены результаты расчетов динамики одномерного кольца из отображений Лози в условиях нелокальной связи, описанных в работе [30].

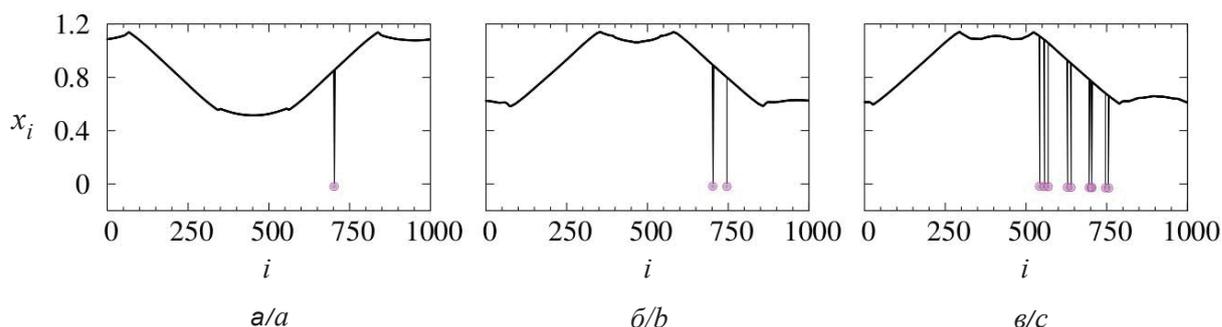


Рис. 1. Режимы уединенных состояний в кольце связанных отображений Лози при  $r = 0.2$  с уменьшением параметра связи  $\sigma$ :  $a - 0.226$ ,  $b - 0.225$ ,  $c - 0.223$ . В случае (а) появляется один выброс амплитуды, далее 2 (б) и более (в) [30]  
Fig. 1. Solitary state regimes in the ring of nonlocally coupled Lozi maps at  $r = 0.2$  with decreasing the coupling parameter  $\sigma$ : (a) 0.226, (b) 0.225, (c) 0.223. In the case of (a) there is a single amplitude spike, then 2 spikes (b), and more (c) [30]

Как видно из рис. 1, а, при некотором значении силы связи между осцилляторами ансамбля один из осцилляторов ( $i \approx 700$ ) характеризуется выбросом амплитуды. С уменьшением силы связи число таких осцилляторов возрастает (рис. 1, б, в) и реализуется структура, включающая счетное число таких осцилляторов (рис. 1, в), которая и была названа «solitary state» [25–28].

До совсем недавнего времени механизм рождения подобных структур был неизвестен. В 2018 г. в работах [30, 31] методом численного моделирования этот механизм нами был установлен и подробно описан. Как выяснилось, причиной рождения уединенных состояний является возникновение бистабильной динамики индивидуальных осцилляторов ансамбля. В работе [31] указанный механизм был показан на ряде примеров ансамблей нелокально связанных осцилляторов и высказано утверждение, что описанный механизм является достаточно общим. Учитывая, что результат работ [30, 31] не является аналитически строгим, подтверждением общности этого результата могут служить новые примеры реализации режимов

уединенных состояний в ансамблях из других индивидуальных осцилляторов.

В настоящей работе мы исследуем одномерный ансамбль нелокально связанных отображений (отображений Некоркина [32]), моделирующих нейронную активность. Исследования показали, что в исследуемом ансамбле могут возникнуть режимы уединенных состояний, а механизм их рождения полностью соответствует результату работы [31].

## Исследуемая модель

Прежде чем перейти к описанию модели ансамбля, ознакомимся с отображением Некоркина, которое будет использовано в качестве индивидуального осциллятора в ансамбле.

Динамика отображения Некоркина описывается следующей системой уравнений [32]:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= x^t + F(x^t) - y^t - \beta H(x^t - d), \\ y^{t+1} &= y^t + \varepsilon(x^t - J), \end{aligned} \quad (1)$$

где переменная  $x^t$  описывает динамику мембранного потенциала нервной клетки,  $y^t$  – кумулятивный эффект всех ионных токов через



мембрану, функции  $F(x^t)$  и  $H(x^t - d)$  задаются следующим образом:

$$F(x^t) = x^t(x^t - a)(1 - x^t), \quad 0 < a < 1; \quad (2)$$

$$H(x^t) = \begin{cases} 1, & x^t > 0, \\ 0, & x^t \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Параметр  $\varepsilon > 0$  определяет характерный временной масштаб  $y^t$ ,  $J$  контролирует уровень деполяризации мембраны ( $J < d$ ),  $\beta > 0$  и  $d > 0$  соответствуют порогу возбуждения разрывных колебаний,  $t = 1, 2, \dots$  – дискретное время. Несмотря на свою простоту, это отображение может

описать ряд основных режимов активности нейронов при изменении управляющих параметров. Эти режимы включают спайк-берстовые хаотические колебания, подпороговые колебания, а также режим генерации одиночных, периодических и хаотических спайковых генераций [32].

В наших исследованиях нас будет интересовать динамический режим отображения (1), связанный со спайковыми колебаниями. Этот режим можно наблюдать, например, для следующих значений параметров:  $a = 0.25$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $J = 0.15$ ,  $d = 0.5$  и приведен в качестве примера на рис. 2.

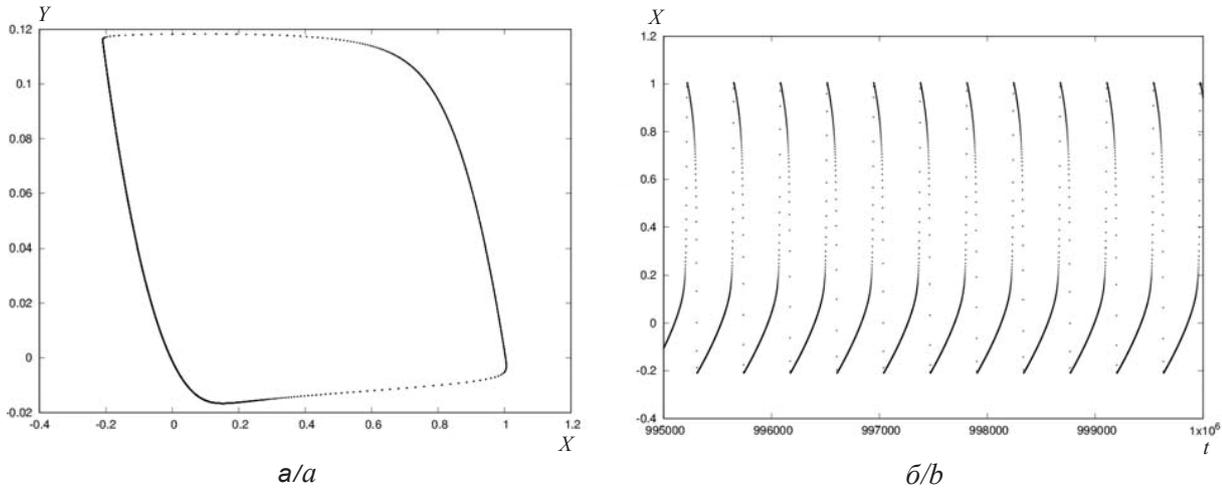


Рис. 2. Фазовый портрет (а) и временные реализации (б) для отображения (1) при  $a = 0.25$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $J = 0.15$ ,  $d = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.002$ . Ляпуновские показатели  $A_0 = 0.008746$ ,  $A_1 = -0.423270$ , число вращения  $r = 0.01395$

Fig. 2. Phase portrait (a), time series  $x^t$  (b) for the map (1) at  $a = 0.25$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $J = 0.15$ ,  $d = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.002$ . The Lyapunov exponents are  $A_0 = 0.008746$ ,  $A_1 = -0.423270$ , and the rotation number is  $r = 0.01395$

Фазовый портрет (рис. 2, а) имеет вид замкнутой инвариантной кривой. Максимальный показатель Ляпунова в этом режиме близок к 0. Таким образом, можно сделать вывод, что динамика отображения (1) является квазипериодической. Однако, как видно из рис. 2, б, временной ряд переменной  $x^t$  почти периодический. Расчет числа вращения для инвариантной кривой показывает, что это значение очень мало ( $r = 0.01395$ ). В данном случае смещение траектории на очень малый угол за каждую итерацию приводит к наблюдению почти периодических колебаний, а инвариантная кривая очень похожа на предельный цикл.

Уравнения исследуемого ансамбля запишем в виде:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= g(x_i^t, y_i^t), \end{aligned} \quad (4)$$

где функция  $f$  и  $g$  задаются в соответствии с (1) – (3):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + F(x) - y - \beta H(x - d), \\ g(x, y) &= y + \varepsilon(x - J). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $x_i$  – вещественная динамическая переменная,  $i$  – порядковый номер замкнутых в кольцо парциальных осцилляторов,  $t$  – дискретное время,  $\sigma$  – коэффициент связи,  $P$  – число соседних осцилляторов слева и справа от  $i$ -го осциллятора,  $r = P/N$  – радиус связи,  $N = 1000$  – число осцилляторов в кольце.

### Результаты вычислений

Проведем численный анализ динамики ансамбля (4), зафиксировав  $\sigma = 0.04$ ,  $r = 0.32$ ,  $a = 0.27$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $d = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.003$ ,  $J = 0.15$ . Для иллюстрации наблюдаемых режимов будем



использовать мгновенные профили амплитуд  $x_i$  и пространственно-временные диаграммы. Отметим, что расчеты проводились для периодических граничных условий, а начальные условия выбирались случайно распределенные в интервалах  $x_i^0 \in [-0.2, 0.4]$  и  $y_i^0 \in [-0.02, 0.04]$ .

На рис. 3, а и рис. 3, б представлены мгновенные профили и пространственно-временные

диаграммы системы (4) при выбранных значениях параметров. В данном случае в системе наблюдается solitary state chimera (SSC) или химера уединенных состояний, которая характеризуется наличием в системе кластера с когерентной динамикой ( $61 < i < 469$ ) и кластера, содержащего уединенные состояния ( $1 < i < 60$ ,  $470 < i < 1000$ ).

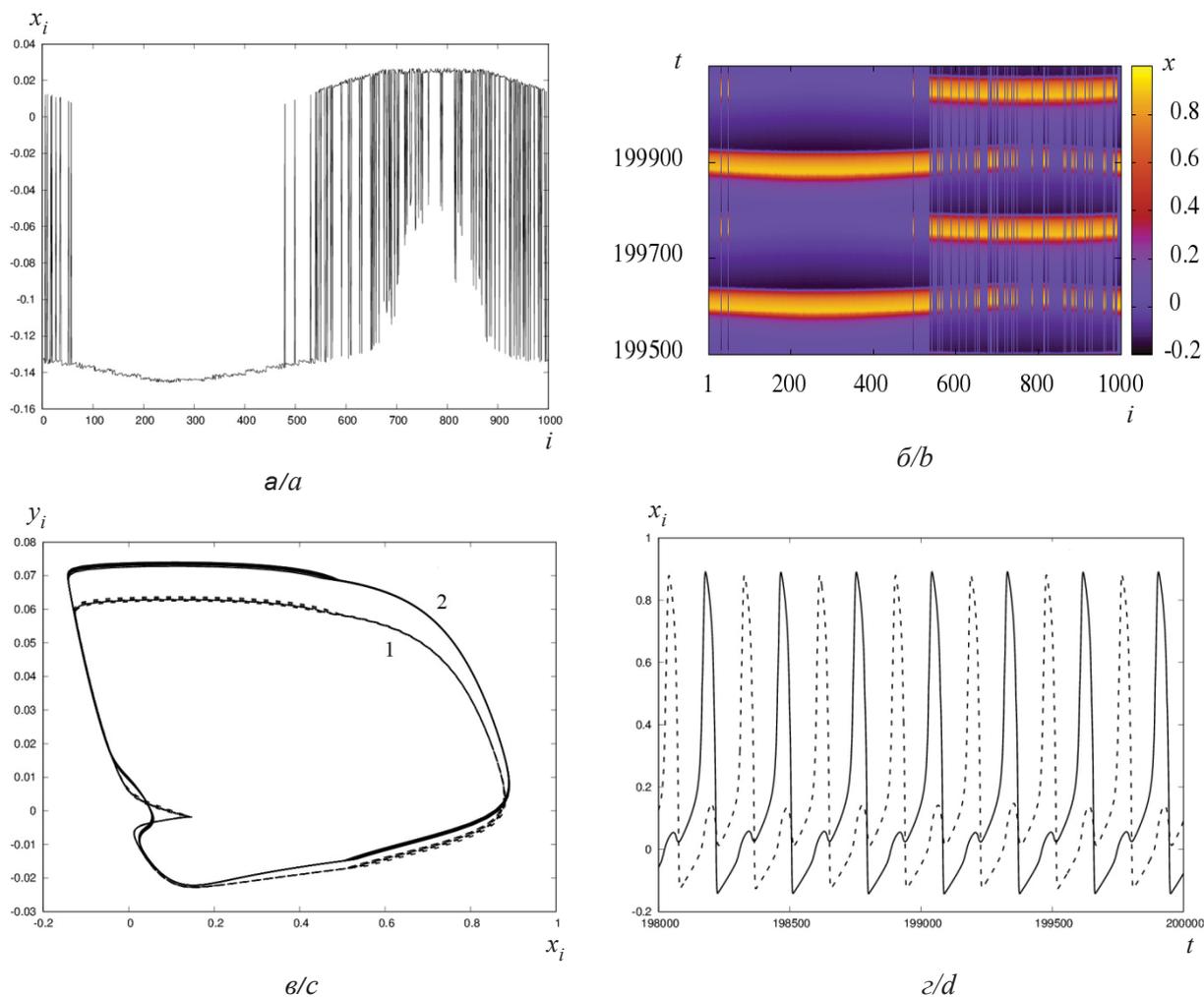


Рис. 3. Мгновенный профиль (а), пространственно-временная диаграмма (б) режима в системе (4), фазовые портреты осцилляторов из области SSC  $i = 750$  (сплошная линия) и  $i = 751$  (пунктир) (в), временные реализации осцилляторов  $i = 750$  (сплошная линия) и  $i = 751$  (пунктир) (г). Параметры:  $a = 0.27, \beta = 0.04, d = 0.5, \varepsilon = 0.003, J = 0.15, P = 320, \sigma = 0.04$   
 Fig. 3. Snapshot (a), space-time diagram (b) of the mode in the system (4), phase portraits of the oscillators from the SSC region  $i = 750$  (solid line) and  $i = 751$  (dotted line) (c), time series for the oscillators  $i = 750$  (solid line) and  $i = 751$  (dotted line) (d). Parameters:  $a = 0.27, \beta = 0.04, d = 0.5, \varepsilon = 0.003, J = 0.15, P = 320, \sigma = 0.04$

В наших работах [30, 31] было показано, что рождение SSC обусловлено появлением бистабильности в системе за счет нелокальной связи между элементами в кольце. По виду мгновенного профиля можно предположить, что и в случае (см. рис. 3, а) также реализуется бистабильный

режим. Расчеты это подтверждают. Рассмотрим два осциллятора в области SSC: осциллятор с номером  $i = 750$ , демонстрирующий выброс, и осциллятор  $i = 751$ , амплитуда которого отвечает режиму когерентности. Будем называть этот режим типичным. Наличие двух инвариантных кривых



(рис. 3, *в*) свидетельствует о существовании двух различных аттракторов, т.е. о наличии режима бистабильности. Временные реализации на этих аттракторах также отличаются (рис. 3, *г*).

Построим бассейны притяжения каждого из аттракторов, выбрав вначале осцилляторы из кластера SSC ( $i = 60$  и  $980$ , см. рис. 3, *а*). Результаты представлены на рис. 4, *а*, *б*.

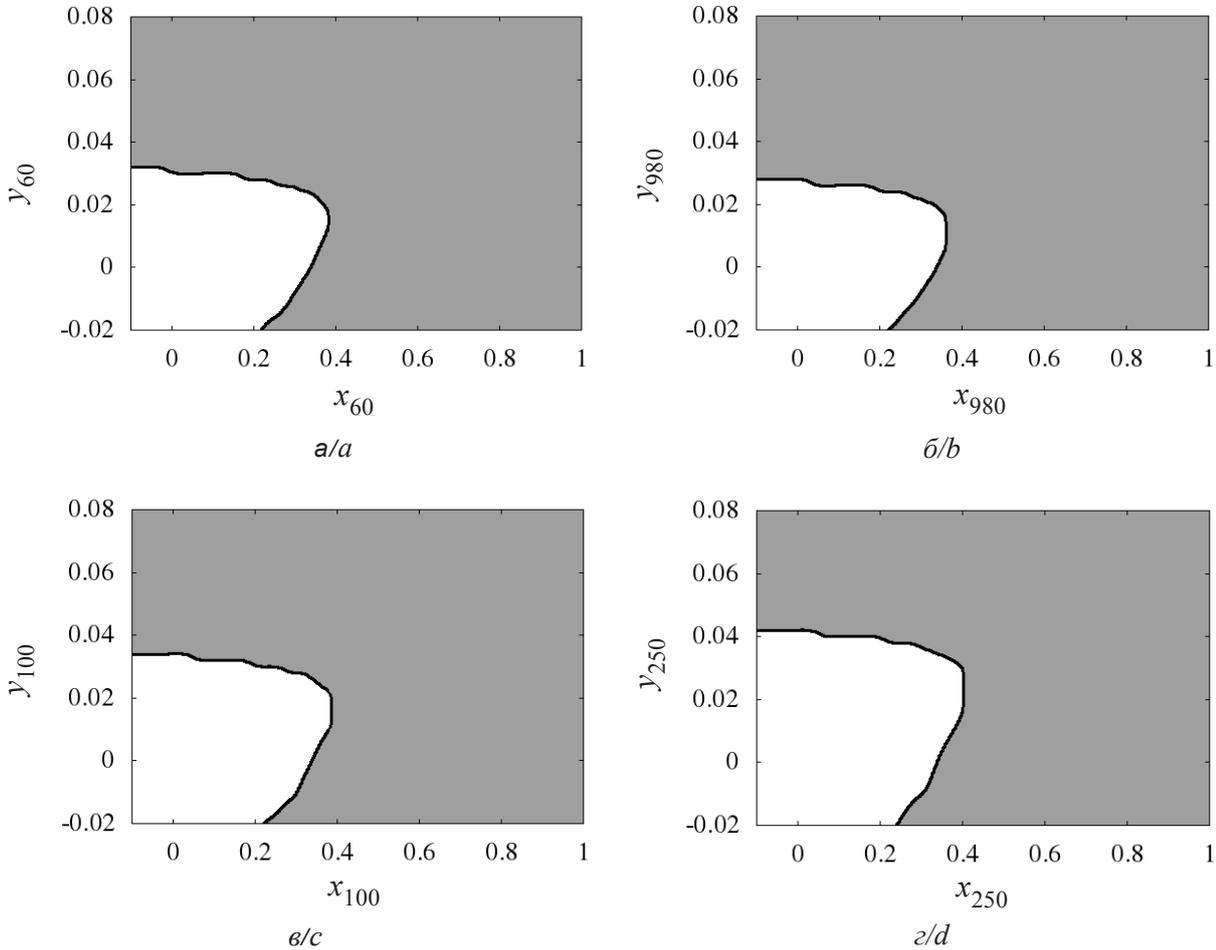


Рис. 4. Бассейны притяжения осцилляторов  $i = 60$  (*а*),  $i = 980$  (*б*), принадлежащих кластерам SSC, и осцилляторов  $i = 100$  (*в*),  $i = 250$  (*г*) из когерентного кластера SSC (см. рис. 3). Белым цветом обозначен бассейн притяжения аттрактора 1 (см. рис. 3, *в*), а серым – бассейн аттрактора 2

Fig. 4. Basins of attraction for the oscillators  $i = 60$  (*a*) and  $i = 980$  (*b*) belonging to the SSC clusters and the oscillators  $i = 100$  (*c*),  $i = 250$  (*d*) from the coherence cluster of SSC (Fig. 3). The white color indicates the basin of attraction of attractor 1 (Fig. 3, *b*), and the gray color corresponds to the basin of attractor 2

Наличие двух бассейнов притяжения (рис. 4, *а*, *б*) подтверждает наличие бистабильности. Сепаратрисой, разделяющей бассейны притяжения, является границная линия между областями белого и серого цвета.

Теперь выберем осцилляторы с номерами  $i = 100$  и  $250$ , которые находятся в когерентном кластере (см. рис. 3, *а*). Расчеты показали, что и в этом случае имеет место режим бистабильности (рис. 4, *в*, *г*). Просто все осцилляторы когерентного кластера колеблются на одном из аттракторов и не совершают переключений.

С целью выяснения степени грубости режима SSC проводились вычисления при вариации параметров  $a$  и  $\epsilon$  в уравнениях (1) и (2). Расчеты показали, что режим SSC сохраняется в конечной области изменения значений параметров  $a$  и  $\epsilon$ . С целью иллюстрации сказанного на рис. 5 приведены результаты расчетов для значений параметра  $\epsilon = 0.002$  и  $\epsilon = 0.004$ . Как следует из графиков мгновенных профилей амплитуд на рис. 5, режим SSC не исчезает, хотя вид пространственно-временной структуры несколько изменяется.

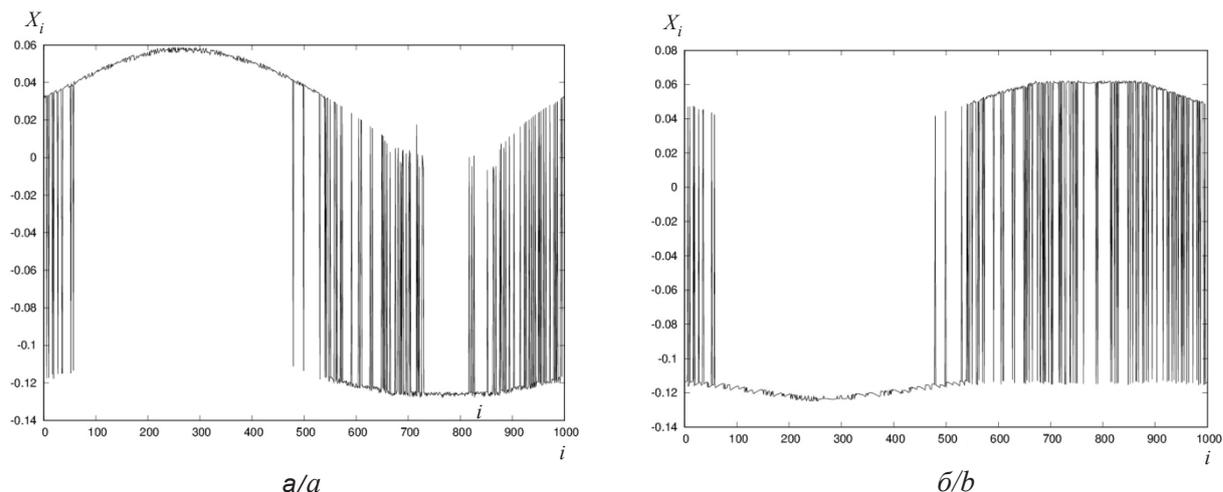


Рис. 5. Мгновенные профили амплитуд системы (4) при  $\varepsilon = 0.002$  (а),  $\varepsilon = 0.004$  (б). Другие параметры:  $a = 0.27$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $d = 0.5$ ,  $J = 0.15$ ,  $P = 320$ ,  $\sigma = 0.04$

Fig. 5. Snapshots of amplitudes of the system (4) at  $\varepsilon = 0.002$  (a),  $\varepsilon = 0.004$  (b). Other parameters:  $a = 0.27$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $d = 0.5$ ,  $J = 0.15$ ,  $P = 320$ ,  $\sigma = 0.04$

### Обсуждение результатов и выводы

Исследования динамики одномерного кольца из нелокально связанных отображений Некоркина (4) выявили следующее. В системе (4) реализуется структура SSC, которая обусловлена рождением бистабильного режима во всех индивидуальных осцилляторах ансамбля. При этом конечное число осцилляторов оказывается в режиме, отвечающем движению на одном из аттракторов, и реализуется когерентный режим колебаний. Другая (конечная) часть осцилляторов реализует режим переключений с одного аттрактора на другой в пространстве ансамбля и формирует структуру SSC. Возникает вопрос о причине, вызывающей переключения. Исследования показали, что причина кроется в случайном задании начальных условий для осцилляторов ансамбля. В зависимости от начальных условий одни осцилляторы попадают в бассейн притяжения одного аттрактора, другие – в бассейн притяжения второго аттрактора. Этот эффект и приводит к рождению режима SSC. Отметим, что приведенные в настоящей статье результаты находятся в полном соответствии с выводами работы [31], что подтверждает общность установленного в ней механизма рождения режима SSC.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого Физического Общества (проект SFB 910) и Министерства образования и науки РФ (проект № 3.8616.2017/8.9).

### Список литературы

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // *Nonlin. Phen. in Complex Syst.* 2002. Vol. 5, № 4. P. 380–385. DOI: 10.1063/1.4858996
2. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera States for Coupled Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, iss. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
3. Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states : Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity.* 2015. Vol. 28, № 3. P. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67
4. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks : spatial chaos and chimera states // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, iss. 23. P. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102
5. Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P., Maistrenko Y., Schöll E. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 85, iss. 2. P. 026212. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.026212
6. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera Death : Symmetry Breaking in Dynamical Networks // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, iss. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101
7. Dudkowski D., Maistrenko Y., Kapitaniak T. Different types of chimera states : an interplay between spatial and dynamical chaos // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90, iss. 3. P. 032920. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.032920
8. Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett.* 2015. Vol. 112, № 4. P. 40002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/40002



9. Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Schöll E., Анищенко В. С. Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, вып. 14. С. 103–110.
10. Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Bogomolov S. A., Anishchenko V. S. Correlation analysis of the coherence-incoherence transition in a ring of nonlocally coupled logistic maps // Chaos. 2016. Vol. 26, iss. 9. P. 093108. DOI: 10.1063/1.4962647
11. Kemeth F. P., Haugland S. W., Schmidt L., Kevrekidis I. G., Krischer K. A classification scheme for chimera states // Chaos. 2016. Vol. 26, iss. 9. P. 094815. DOI: 10.1063/1.4959804
12. Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities // Chaos. 2016. Vol. 26, iss. 9. P. 094825. DOI: 10.1063/1.4962913
13. Semenova N. I., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117, iss. 1. P. 01410. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
14. Schöll E. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2016. Vol. 225, iss. 6–7. P. 89–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3
15. Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C.G. Chimera-like states in modular neural networks // Scientific reports. 2016. Vol. 6. P. 19845. DOI: 10.1038/srep19845
16. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2017. Vol. 226, iss. 9. P. 1883–1892. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70036-8
17. Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И., Богомолов С. А., Анищенко В. С. Корреляционные характеристики фазовых и амплитудных химерных состояний в ансамбле нелокально связанных отображений // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, вып. 2. С. 68–75. DOI: 10.21883/PJTF.2017.02.44189.16400
18. Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2017. Vol. 226, iss. 9. P. 1857–1866. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70023-1
19. Semenova N. I., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. Temporal intermittency and the lifetime of chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators // Chaos. 2017. Vol. 27, iss. 6. P. 061102. DOI: 10.1063/1.4985143
20. Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 43. P. 25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024
21. Shepelev I. A., Bukh A. V., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S., Zakharova A. Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable elements // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2018. Vol. 54. P. 50–61. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.05.017
22. Shepelev I. A., Bukh A. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 90, iss. 4. P. 2317–2330. DOI: 10.1007/s11071-017-3805-6
23. Холуянова И. А., Богомолов С. А., Анищенко В. С. Синхронизация химерных структур в ансамблях нелокально связанных кубических отображений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 103–111. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-103-111
24. Schmidt A., Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A., Hövel P. Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 95, iss. 3. P. 032224. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.032224
25. Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, iss. 6. P. 060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901
26. Jaros P., Maistrenko Y., Kapitaniak T. Chimera states on the route from coherence to rotating waves // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91, iss. 2. P. 022907. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022907
27. Premalatha K., Chandrasekar V. K., Senthilvelan M., Lakshmanan M. Imperfectly synchronized states and chimera states in two interacting populations of nonlocally coupled Stuart-Landau oscillators // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94, iss. 1. P. 012311. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.012311
28. Jaros P., Brezetsky S., Levchenko R., Dudkowski D., Kapitaniak T., Maistrenko Y. Solitary states for coupled oscillators with inertia // Chaos. 2018. Vol. 28, iss. 1. P. 011103. DOI: 10.1063/1.5019792
29. Bukh A., Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally coupled interacting chaotic maps // Chaos. 2017. Vol. 27, iss. 11. P. 111102. DOI: 10.1063/1.5009375
30. Semenova N., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2018. Vol. 227, iss. 10–11. P. 1173–1183. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800035-y
31. Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps // Chaos, Solitons & Fractals. 2018. Vol. 115. P. 300–305. DOI: 10.1016/j.chaos.2018.09.003
32. Некоркин В. И., Вдовин Л. В. Дискретная модель нейронной активности // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 5. С. 36–60. DOI: 10.18500/0869-6632-2007-15-5-36-60

**Образец для цитирования:**

Богомолов С. А., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И., Анищенко В. С. Пространственно-временные структуры в ансамбле нелокально связанных отображений Некоркина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 86–94. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-2-86-94>

**Spatiotemporal Structures in an Ensemble of Nonlocally Coupled Nekorkin Maps**

S. A. Bogomolov, E. V. Rybalova,  
G. I. Strelkova, V. S. Anishchenko

Sergey A. Bogomolov, <http://orcid.org/0000-0001-8084-3232>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, bogomolov22@gmail.com

Elena V. Rybalova, <http://orcid.org/0000-0003-3008-1078>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, rybalovaev@gmail.com

Galina I. Strelkova, <http://orcid.org/0000-0002-8667-2742>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, strelkovagi@info.sgu.ru

Vadim S. Anishchenko, <http://orcid.org/0000-0003-2255-1498>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, wadim@info.sgu.ru

**Background and Objectives:** Studying chimera states is a subject of special attention among specialists in nonlinear dynamics, and the issue on the mechanisms for implementing chimeras is today one of the topic directions. In the paper we consider the mechanism for realizing a chimera state regime which is based on the so-called “solitary states” (SSC) and is actively discussed by experts. The problem is solved by analyzing the dynamics of a one-dimensional ring of nonlocally coupled discrete-time systems. The individual element of the ring is given by the discrete model describing neuronal activity. **Materials and Methods:** Numerical simulation of large and multicomponent ensembles (networks) is the basic method of our research. Software systems specially developed by the authors are used that allow to carry out numerical experiments under variations in the system parameters, initial conditions and provide a graphic illustration of the obtained results. **Results:** We have established that the ensemble of nonlocally coupled Nekorkin maps can exhibit the SSC regime which is resulted from the appearance of bistability in the individual elements of the ensemble. This fact has been corroborated by the numerical results for the phase portraits of the coexisting attractors and their basins of attraction. It has been shown that randomly distributed initial conditions lead to the situation when one part of the ensemble oscillators fall into one attractor, while the other one belongs to the second attracting set. This mechanism was presented by the authors in the previously published papers for ensembles of different discrete-time systems. The results of this work confirm the commonality of the mechanism for implementing the SSC mode established earlier by the authors. **Conclusion:** The results of this article make a significant contribution to the understanding of the peculiarities in the formation of complex spatiotemporal structures of the SSC type.

**Keywords:** ensemble of coupled oscillators, nonlocal coupling, chimeras, solitary states, Nekorkin map.

**Acknowledgements:** This work was supported by the DFG (project SFB 910) and the Russian Ministry of Education and Science (project No. 3.8616.2017/8.9).

**References**

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *Nonlin. Phen. in Complex Syst.*, 2002, vol. 5, no. 4, pp. 380–385. DOI: 10.1063/1.4858996
2. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera States for Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, iss. 17, pp. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
3. Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 2015, vol. 28, no. 3, pp. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67
4. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, iss. 23, pp. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102
5. Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P., Maistrenko Y., Schöll E. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E.*, 2012, vol. 85, iss. 2, pp. 026212. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.026212
6. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera Death: Symmetry Breaking in Dynamical Networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, iss. 15, pp. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101
7. Dudkowski D., Maistrenko Y., Kapitaniak T. Different types of chimera states: an interplay between spatial and dynamical chaos. *Phys. Rev. E.*, 2014, vol. 90, iss. 3, pp. 032920. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.032920
8. Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, 2015, vol. 112, no. 4, pp. 40002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/40002
9. Bogomolov S. A., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators. *Technical Physics Letters*, 2016, vol. 42, iss. 7, pp. 765–768. DOI: 10.1134/S1063785016070191
10. Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Bogomolov S. A., Anishchenko V. S. Correlation analysis of the coherence-incoherence transition in a ring of nonlocally coupled logistic maps. *Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 9, pp. 093108. DOI: 10.1063/1.4962647
11. Kemeth F. P., Haugland S. W., Schmidt L., Kevrekidis I. G., Krischer K. A classification scheme for chimera states. *Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 9, pp. 094815. DOI: 10.1063/1.4959804



12. Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities. *Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 9, pp. 094825. DOI: 10.1063/1.4962913
13. Semenova N. I., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 117, iss. 1, pp. 01410. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
14. Schöll E. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2016, vol. 225, iss. 6–7, pp. 89–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3
15. Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C. G. Chimera-like states in modular neural networks. *Scientific reports*, 2016, vol. 6, pp. 19845. DOI: 10.1038/srep19845
16. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2017, vol. 226, iss. 9, pp. 1883–1892. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70036-8
17. Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Bogomolov S. A., Anisichenko V. S. Correlation characteristics of phase and amplitude chimeras in an ensemble of nonlocally coupled maps. *Technical Physics Letters*, 2017, vol. 43, iss. 1, pp. 118–121. DOI: 10.1134/S1063785017010278
18. Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anisichenko V. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2017, vol. 226, iss. 9, pp. 1857–1866. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70023-1
19. Semenova N. I., Strelkova G. I., Anisichenko V. S., Zakharova A. Temporal intermittency and the lifetime of chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators. *Chaos*, 2017, vol. 27, iss. 6, pp. 061102. DOI: 10.1063/1.4985143
20. Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, vol. 43, pp. 25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024
21. Shepelev I. A., Bukh A. V., Vadivasova T. E., Anisichenko V. S., Zakharova A. Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable elements. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2018, vol. 54, pp. 50–61. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.05.017
22. Shepelev I. A., Bukh A. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anisichenko V. S. Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 90, iss. 4, pp. 2317–2330. DOI: 10.1007/s11071-017-3805-6
23. Kholuianova I. A., Bogomolov S. A., Anishchenko V. S. Synchronization of Chimera States in Ensembles of Nonlocally Coupled Cubic Maps. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 103–111 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-103-111
24. Schmidt A., Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A., Hövel P. Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 95, iss. 3, pp. 032224. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.032224
25. Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 89, iss. 6, pp. 060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901
26. Jaros P., Maistrenko Y., Kapitaniak T. Chimera states on the route from coherence to rotating waves. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, iss. 2, pp. 022907. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022907
27. Premalatha K., Chandrasekar V. K., Senthilvelan M., Lakshmanan M. Imperfectly synchronized states and chimera states in two interacting populations of nonlocally coupled Stuart-Landau oscillators. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, iss. 1, pp. 012311. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.012311
28. Jaros P., Brezetsky S., Levchenko R., Dudkowski D., Kapitaniak T., Maistrenko Y. Solitary states for coupled oscillators with inertia. *Chaos*, 2018, vol. 28, iss. 1, pp. 011103. DOI: 10.1063/1.5019792
29. Bukh A., Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anisichenko V. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally coupled interacting chaotic maps. *Chaos*, 2017, vol. 27, iss. 11, pp. 111102. DOI: 10.1063/1.5009375
30. Semenova N., Vadivasova T. E., Anisichenko V. S. Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2018, vol. 227, iss. 10–11, pp. 1173–1183. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800035-y
31. Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anisichenko V. S. Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, vol. 115, pp. 300–305. DOI: 10.1016/j.chaos.2018.09.003
32. Nekorkin V. I., Vdovin L. V. Map-based model of the neural activity. *Izvestiya VUZ, Applied nonlinear dynamics*, 2007, vol. 15, no. 5, pp. 36–60 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2007-15-5-36-60

**Cite this article as:**

Bogomolov S. A., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anisichenko V. S. Spatiotemporal Structures in an Ensemble of Nonlocally Coupled Nekorkin Maps. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 86–94 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-2-86-94>