



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий выпуск журнала посвящен Всероссийскому семинару «Теоретическая и математическая физика (ТМФ 2009)», приуроченному к 100-летию Саратовского государственного университета (СГУ) и 50-летию сотрудничества Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) и СГУ. Семинар проходил на кафедре теоретической и математической физики физического факультета СГУ в период с 30 ноября по 2 декабря 2009 г.

Сотрудничество физического факультета Саратовского университета с Объединенным институтом ядерных исследований в Дубне зародилось в конце 50-х гг. прошлого века благодаря инициативе профессора Ш.Ш. Шехтера, который был учеником выдающихся физиков-теоретиков И.Е. Тамма и Д.И. Блохинцева. Первый директор ОИЯИ (1956–1965 гг.) член-корреспондент АН СССР Д.И. Блохинцев преподавал в СГУ в конце 1930-х гг. и непосредственно способствовал формированию на физическом факультете направления теоретической, математической и ядерной физики. За полвека многостороннего сотрудничества десятки выпускников СГУ прошли школу ОИЯИ и успешно работают в ведущих физических центрах. В последние годы растет интерес студентов СГУ к участию в различных школах и семинарах, проводимых в ОИЯИ, многие выпускники уезжают в Дубну для выполнения дипломных работ.

Совместные совещания и семинары давно являются традиционной формой контактов между физиками ОИЯИ и СГУ, последним в этом ряду стал семинар ТМФ-2009, на котором были представлены доклады как по теоретической, так и по математической физике. Материалы семинара отображают основные научные направления исследований по теоретической физике, проводимых на кафедрах физического факультета Саратовского университета. В данном выпуске журнала представлена часть материалов семинара, остальные статьи будут опубликованы в следующем выпуске.

Активное участие в работе семинара помимо сотрудников СГУ приняли также гости: Д. Блашке, С. Виницкий, А. Гусев, Е. Иванов, В. Первушин, Н. Фадеев, О. Чулуунбаатар, И. Юдин (ОИЯИ, г. Дубна); Б. Левченко (Московский государственный университет); М. Бониц (Кильский университет, Германия); А. Барсов, А. Горохов, В. Семин (Самарский государственный университет); А. Саркисян и Э. Казарян (Российско-Армянский университет, г. Ереван).

Председатель Оргкомитета семинара  
профессор *А.Г. Лазерсон*

E-mail: lazerson@inbox.ru

Заместитель председателя  
профессор *С.А. Смолянский*

E-mail: smol@sgu.ru

## ФИЗИКА

УДК 530.145

### О РЕШЕНИИ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА – ПРИВЕДЕНИЕ К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В.Л. Дербов, В.В. Серов, С.И. Виноцкий\*, А.А. Гусев\*,  
О. Чулуунбаатар\*\*\*, Э.М. Казарян\*\*\*, А.А. Саркисян\*\*\*

Саратовский государственный университет

\* Объединённый институт ядерных исследований, Дубна

\*\* Международный университет природы общества и человека «Дубна», Дубна

\*\*\* Российско-Армянский (Славянский) университет, Ереван, Армения

E-mail: derbovvl@gmail.com



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ

Представлена вычислительная схема решения эллиптических задач методом Канторовича для примесных состояний в моделях квантовых точек, квантовых проволок и ям в приближении эффективной массы с ограничивающими потенциалами гармонического осциллятора и бесконечно высокой стенки. Скорость сходимости метода и эффективность предлагаемого комплекса программ, реализующих метод конечных элементов, демонстрируется примерами вычисления спектральных характеристик моделей, а также новых эффектов резонансного прохождения и полного отражения для кулоновского рассеяния, индуцированных аксиальным однородным магнитным полем, кристаллической решеткой или квантовой проволокой.

**Ключевые слова:** эллиптические краевые задачи, метод Канторовича, примесные состояния, квантовые наноструктуры.

**On Solving the Low-Dimensional Boundary Value Problems of Quantum Mechanics by Kantorovich Method – Reduction to Ordinary Differential Equations**

V.L. Derbov, V.V. Serov, S.I. Vinitsky, A.A. Gusev,  
O. Chuluunbaatar, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan

The calculation scheme for solving the elliptic boundary problem by Kantorovich method for impurity states in models of quantum dots, wires and wells in the effective mass approximation with parabolic confinement potential of harmonic oscillator and infinitely-high walls is presented. The rate of convergence of the method and the efficiency of the proposed program complex, realized by the finite element method, is demonstrated on examples of calculation of spectral characteristics of the models and new effects of resonance transmission and total reflection for the Coulomb scattering, induced by axial homogeneous magnetic field, crystal lattice, or quantum wire.

**Key words:** elliptic boundary problem, Kantorovich method, impurity states, quantum nanostructures.

#### Введение

Начиная с работ Борна и Оппенгеймера адиабатический метод применяется для решения различных задач физики. Используется идея приближенного разделения «быстрых»  $\vec{x}_f$  и «медленных»  $\vec{x}_s$  переменных в гамильтониане  $H \equiv H(\vec{x}_f, \vec{x}_s)$  исходной системы, представимом в виде суммы  $H(\vec{x}_f, \vec{x}_s) = H_f(\vec{x}_f; \vec{x}_s) + H_s(\vec{x}_s)$  гамильтонианов быстрой и медленной подсистем с характеристическими собственными энергиями, подчинёнными условию  $|\varepsilon_f^{(min)}| = \hbar\omega_f > |\varepsilon_s^{(min)}| = \hbar\omega_s$  [1]. В общем случае волновая функция ищется в виде адиабатического разложения



$$\langle \bar{x}_f, \bar{x}_s | n_k \rangle = \sum_{n_{k+1}} \langle \bar{x}_f | n_{k+1}, \bar{x}_s \rangle \langle \bar{x}_s, n_{k+1} | n_k \rangle,$$

по параметрическим базисным функциям  $\langle \bar{x}_f | n_{k+1}, \bar{x}_s \rangle$  быстрой подсистемы с неизвестными вектор-функциями  $\langle \bar{x}_s, n_{k+1} | n_k \rangle$  медленной подсистемы. Усреднение исходного уравнения системы с гамильтонианом  $H = H(\bar{x}_f, \bar{x}_s)$  по базисным функциям приводит к системе уравнений по переменным  $x_s$  относительно неизвестных вектор-функций  $\langle \bar{x}_s, n_{k+1} | n_k \rangle$  медленной подсистемы. В математике сходный метод – приведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям для решения двумерных эллиптических краевых задач, который занимает промежуточное положение между точным решением задачи и методом Релея – был предложен в 1935 г. Л.В. Канторовичем [2]. Построение подходящих базисных функций, зависящих от второй переменной как от параметра, а также решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в этом методе предполагает, прежде всего, их подчинение краевым условиям исходной задачи, что и обеспечивает корректное строение приближенного решения. Вычислительная схема и применение метода для решения задачи с краевыми условиями третьего рода даны в [3].

Многошаговое обобщение адиабатического метода, или метода Канторовича, сформулировано в работе [4]. Все независимые переменные  $\bar{x} \in \mathbf{X}$  подобласти координатного пространства  $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^N$  трактуются как некоторый набор динамически упорядоченных от быстрых к медленным переменных  $\bar{x} \mapsto \{\bar{x}_f, \bar{x}_s\}^T = \{x_N, x_{N-1}, \dots, x_1\}^T$  в соответствии с набором параметрических гамильтонианов подсистем  $H_i = H_i(x_i, x_{i-1}, \dots, x_1)$ , составляющих исходный гамильтониан  $H = \sum_{i=1}^N H_{N+1-i}$  – дифференциальный оператор эллиптического типа. Применение метода пошагового усреднения исходного га-

мильтониана  $H$  позволяет исключать независимые более быстрые переменные  $(x_N, \dots, x_2)$  последовательно, что соответствует многошаговому обобщению адиабатического метода, или метода Канторовича:

$$\begin{aligned} \psi_{n_1}(\bar{x}) &= \psi_{n_1}^{(1)}(x_N, \dots, x_1) = \\ &= \sum_{n_2} \psi_{n_2}^{(2)}(x_N, \dots, x_2; x_1) \chi_{n_2, n_1}^{(1)}(x_1) = \\ &= \sum_{n_2 \dots n_N} \psi_{n_N}^{(N)}(x_N; x_{N-1}, \dots, x_1) \dots \chi_{n_k, n_k}^{(k)} \times \\ &\times (x_k; x_{k-1}, \dots, x_1) \dots \chi_{n_2, n_2}^{(2)}(x_2; x_1) \chi_{n_2, n_1}^{(1)}(x_1). \end{aligned}$$

Оптимизация скорости сходимости метода возможна при подходящем выборе упорядоченного набора гамильтонианов подсистем, характеристические собственные значения которых подчиняются условиям  $|\varepsilon_N^{(\min)}| > |\varepsilon_{N-1}^{(\min)}| > \dots > |\varepsilon_1^{(\min)}|$ .

В качестве первого шага в реализации метода ниже представлена вычислительная схема решения двумерных эллиптических задач для примесных состояний в квантоворазмерных моделях квантовых точек, квантовых проволок (КПр) и квантовых ям (КЯ) с ограничивающими потенциалами гармонического осциллятора и бесконечно высокой стенки [5, 6]. Скорость сходимости метода и эффективность предлагаемого пользователям комплекса программ ODPEVP [7] и KANTBP [8], реализующих метод конечных элементов [9], демонстрируется примерами вычисления спектральных характеристик рассмотренных моделей и сравнением приближенных решений в зависимости от выбора систем координат, гамильтонианов подсистем, быстрых и медленных переменных, базисных функций и краевых условий. Схематическое представление полупроводниковых наноструктур: объемный образец, квантовые ямы, проволоки и точки и соответствующие им зависимости плотности состояний (ПС) от энергии  $E$  даны на рис. 1.

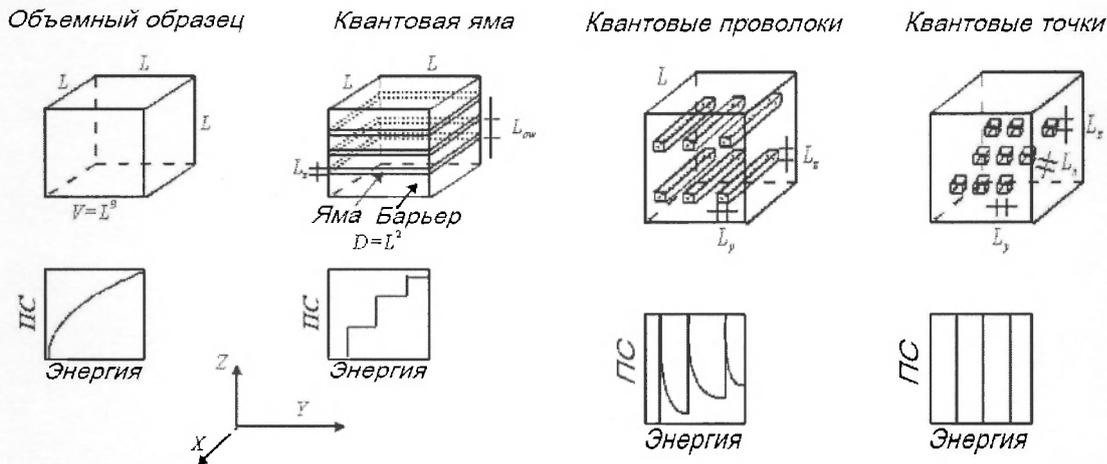


Рис. 1. Схематическое представление полупроводниковых наноструктур: объемный образец, квантовые ямы, проволоки и точки и соответствующие им зависимости плотности состояний от энергии  $E$

**Вычислительная схема решения двумерных краевых задач**

В приближении эффективной массы<sup>1</sup> уравнение Шредингера для примесного электрона, находящегося под действием магнитного поля, квантовой точки, квантовой проволоки [10] и квантовой ямы [11, 12], имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{2\mu} \left( \hat{p} - \frac{q_1}{c} \vec{A} \right)^2 + U(\vec{r}) - \frac{q}{\kappa |\vec{r}_c|} \right\} \Psi = E \Psi, \quad (1)$$

где  $E$  – энергия системы,  $|\vec{r}_c| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_c)^2}$ ,  $q_1$  – кулоновский заряд электрона  $q_1 = -e$  (позитрона  $q_1 = +e$ ),  $q_2e$  – кулоновский заряд примесного центра,  $z_c \in [-z_0/2, z_0/2]$  – сдвиг заряда  $q_2e$  по оси  $z$  для КЯ ( $z_c = 0$  для КТ и КПр),  $q = -q_1 q_2 e^2$ ,  $\kappa$  – диэлектрическая проницаемость (для GaAs  $q = 1$ ,  $\kappa = 13.18$ ),  $\mu = \beta m_e$  – эффективная масса электрона (для GaAs  $\beta = 0.067$ ),  $U(\vec{r})$  – параболический потенциал с частотой  $\omega = \gamma_{r_0} \frac{\hbar}{\mu r_0^2}$ ,  $\gamma_{r_0} \sim \pi^2/3$  – подгоночный параметр (модель А):

$$U(\vec{r}) \equiv U^A(\vec{r}) = \mu \omega^2 (\zeta_1(x^2 + y^2) + \zeta_3 z^2) / 2,$$

<sup>1</sup> Сравнение теории с экспериментом показывает, что если толщина образца в направлении квантования содержит более 10-ти кристаллических слоев, т.е. начиная от 30-ти, 40-ка ангстрем и выше, то можно использовать приближение эффективной массы [5].

$r_0 = \sqrt{\zeta_1(x_0^2 + y_0^2) + \zeta_3 z_0^2}$  – радиус КТ ( $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta_3 = 1$ ), КПр ( $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta_3 = 0$ ) и КЯ ( $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_3 = 1$ ). Для сравнения используем модели КТ, КПр и КЯ ( $\zeta_3 = 1/2$ ) с потенциалом  $U(\vec{r})$  (модель Б):

$$U(\vec{r}) = U^B(\vec{r}) = \{0, 0 \leq |\vec{r}| < r_0; +\infty, |\vec{r}| \geq r_0\},$$

$$U(z) \equiv U^B(z) = \{0, |z| < z_0/2; +\infty, |z| \geq z_0/2\}.$$

Направление оси  $z$  выберем вдоль магнитного поля  $\vec{H}$  с вектор-потенциалом  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r}$ , используем приведенные атомные единицы ( $a_B^* = 102 \text{ \AA}$ ,  $E_R^* = Ry^* = 5.2 \text{ мэВ}$ ) и безразмерный параметр  $\gamma^* = H/H_0^*$ , где  $H_0^* = 6 \text{ Тл}$  [6]. Уравнение (1) при фиксированных значениях магнитного квантового числа  $m = 0, \pm 1, \dots$  имеет вид

$$\left( \frac{1}{g_{3s}(x_s)} \hat{H}_2(x_f; x_s) + \hat{H}_1(x_s) - 2E \right) \Psi(x_f, x_s) = 0, \quad (2)$$

$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{g_{1f}(x_f)} \frac{\partial}{\partial x_f} g_{2f}(x_f) \frac{\partial}{\partial x_f} + \hat{V}_f(x_f) + \hat{V}_B(x_f, x_s),$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{g_{1s}(x_s)} \frac{\partial}{\partial x_s} g_{2s}(x_s) \frac{\partial}{\partial x_s} + \hat{V}_s(x_s),$$

где  $2E = p_f^2 + p_s^2$ ,  $p_f^2$  и  $p_s^2$  – асимптотические значения квадратов импульсов гамильтонианов быстрой  $\hat{H}_2 \equiv \hat{H}_2(x_f; x_s) = g_{3s}(x_s) H_2(x_f; x_s)$



и медленной  $\hat{H}_1 \equiv \hat{H}_1(x_s) = H_1(x_s)$  подсистем,  $\hat{V}_{fs}(x_f, x_s) = g_{3s}(x_s)V_{fs}(x_f, x_s)$  – кулоновский потенциал в цилиндрических (ЦК) или сферических (СК) координатах:

$$V_{fs}(x_f, x_s) = -\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_c)^2}} - \frac{q}{r_c}$$

Для КТ движение ограничено по поперечным и продольной переменным, а в КПр – только по поперечным, поэтому в качестве быстрых и медленных переменных в ЦК выбраны соответственно:  $x_f = \rho$  и  $x_s = z$ , а в СК –  $x_f = \eta$  и  $x_s = r$ . Для КЯ движение ограничено только по продольной переменной, поэтому быстрые и медленные переменные в ЦК меняются местами, т.е.  $x_f = z$  и  $x_s = \rho$ , а в СК остаются теми же,  $x_f = \eta$  и  $x_s = r$  (рис.2).

При  $z_c = 0$  гамильтониан коммутирует с оператором  $z$ -чётности ( $z \rightarrow -z$  или  $\eta \rightarrow -\eta$ ), решения разделяются на чётные ( $\sigma = +1$ ) и нечётные ( $\sigma = -1$ ), а при  $z_c \neq 0$  не имеют определённой чётности ( $\sigma = 0$ ). В таблице при-

ведены параметры коэффициентов и потенциалов, входящих в уравнение (2), и краевые условия задач (4), (5) для КТ, КПр и КЯ в ЦК и СК. В таблице использованы следующие обозначения:  $V_* = \frac{m^2}{\rho^2} - \text{sign}(q_1)\gamma m + \frac{1}{4}\gamma^2\rho^2$ , где  $\text{sign}(q_1) = -1$  для электрона и  $\text{sign}(q_1) = +1$  для позитрона (дырки),

$$V_{**} = \frac{m^2}{1-\eta_c^2} - 2\text{sign}(q_1)p\gamma m + (\omega^2 + p^2)(1-\eta_c^2)$$

$$\text{при } p = \gamma r_c^2/2, V_{***} = \frac{m^2}{1-\eta_c^2} - c^2(1-\eta_c^2) - b\eta_c + f$$

$$\text{при } c = \omega r_c^2, b = -2\omega z_c r_c^3, f = (\omega z_c r_c^2); \text{ Д –}$$

граничное условие Дирихле ( $\Phi(x_f^{\text{min}}, x_s) = 0$ ,

$$\Phi(x_f^{\text{max}}, x_s) = 0, \chi^{(i)}(x_s^{\text{min}}) = 0 \text{ или } \chi^{(i)}(x_s^{\text{max}}) = 0),$$

Н – граничное условие типа Неймана

$$\left( \lim_{x_f \rightarrow x_f^{\text{min}}} g_{2f}(x_f) \frac{d\Phi(x_f, x_s)}{dx_f} = 0, \right.$$

$$\left. \lim_{x_f \rightarrow x_f^{\text{max}}} g_{2f}(x_f) \frac{d\Phi(x_f, x_s)}{dx_f} = 0 \right.$$

или

$$\lim_{x_s \rightarrow x_s^{\text{min}}} g_{2s}(x_s) \frac{d\chi^{(i)}(x_s)}{dx_s} = 0.$$

Параметры коэффициентов и потенциалов, входящих в (2) и краевые условия задач (4), (5) для КТ, КПр и КЯ, в ЦК и СК (в приведённых единицах)

Параметр	ЦК			СК		
	КТ	КПр	КЯ	КТ	КПр	КЯ ( $\gamma = 0$ )
$x_f$	$\rho$	$\rho$	$z$	$\eta_c$	$\eta_c$	$\eta_c$
$x_s$	$Z$	$z$	$\rho$	$r_c$	$r_c$	$r_c$
$g_{1f}$	$\rho$	$\rho$	1	1	1	1
$g_{2f}$	$\rho$	$\rho$	1	$1-\eta_c^2$	$1-\eta_c^2$	$1-\eta_c^2$
$g_{1s}$	1	1	$\rho$	$r_c^2$	$r_c^2$	$r_c^2$
$g_{2s}$	1	1	$\rho$	$r_c^2$	$r_c^2$	$r_c^2$
$g_{3s}$	1	1	1	$r_c^2$	$r_c^2$	$r_c^2$
<b>Модель А</b>						
$V_f(x_f)$	$V_* + \omega^2\rho^2$	$V_* + \omega^2\rho^2$	$\omega^2 z^2$	$V_{**}$	$V_{**}$	$V_{***}$
$x_f \rightarrow x_f^{\text{min}}$	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Д	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )
$x_f \rightarrow x_f^{\text{max}}$	Д	Д	Д	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )
$V_s(x_s)$	$\omega^2 z^2$	0	$V_*$	$\omega^2 r_c^4$	0	0
$x_s \rightarrow x_s^{\text{min}}$	Д	Д	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н	Н	Н
$x_s \rightarrow x_s^{\text{max}}$	Д	Д	Д	Д	Д	Д



Окончание таблицы

Параметр	ЦК			СК		
	КТ	КПр	КЯ	КТ	КПр	КЯ ( $\gamma = 0$ )
<b>Модель Б</b>						
$V_f(x_f)$	$V_*$	$V_*$	0	$V_{**}$	$V_{**}$	
$x_f \rightarrow x_f^{\min}$	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Д	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	
$x_f \rightarrow x_f^{\max}$	Д	Д	Д	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	
$V_s(x_s)$	0	0	$V_*$	0	0	
$x_s \rightarrow x_s^{\min}$	Д	Д	Н ( $m = 0$ ) Д ( $m \neq 0$ )	Н	Н	
$x_s \rightarrow x_s^{\max}$	Д	Д	Д	Д	Д	

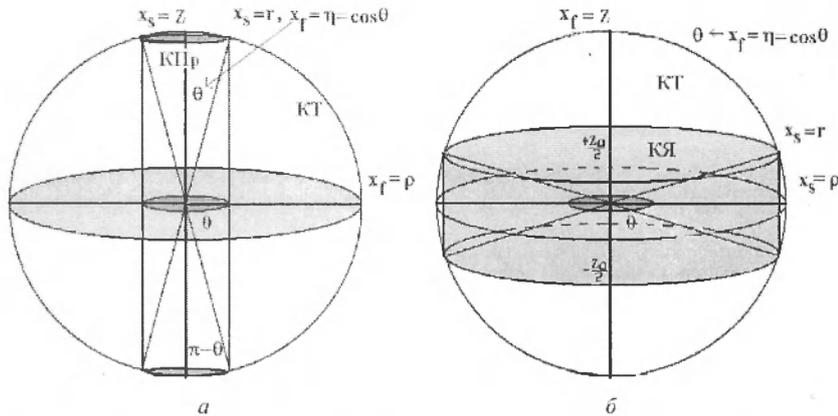


Рис. 2. Системы цилиндрических  $(z, \rho, \varphi)$  и сферических  $(r, \eta = \cos \theta, \varphi)$  координат (при  $z_c = 0$ ) для КТ, КПр (отличается поворотом вокруг оси  $y$  на  $\pi/2$  от рис.1) и КЯ и их соответствие быстрым  $x_f$  и медленным  $x_s$  переменным: а -  $x_f = \rho, \varphi$ ;  $x_s = z$  для КПр,  $x_f = \eta, \varphi$ ;  $x_s = r$  для КПр, КТ; б -  $x_f = z, \varphi$ ;  $x_s = \rho$  для КЯ и  $x_f = \eta, \varphi$ ;  $x_s = r$  для КЯ, КТ

Решение задачи (2) ищем в виде разложения

$$\Psi(x_f, x_s) = \sum_{i=1}^{N_m} \Psi_i^{Em}(x_f, x_s) \bar{\Phi}_i^m(p_f),$$

$$\Psi_i^{Em}(x_f, x_s) = \sum_{j=1}^{J_{\max}} \Phi_j^m(x_f, x_s) \chi_j^{(mi)}(x_s, E). \quad (3)$$

по собственным функциям параметрической задачи для быстрой подсистемы

$$\{\hat{H}_2(x_f; x_s) - \hat{E}(x_s)\} \hat{\Phi}_i(x_f; x_s) = 0, \quad (4)$$

которые подчиняются краевым условиям в граничных точках интервала

$$\lim_{x_f \rightarrow x_f'} \left( N_f^{(m)} g_{2f}(x_f) \frac{d\Phi_f^m(x_f; x_s)}{dx_f} + D_f^{(m)} \Phi_f^m(x_f; x_s) \right) = 0,$$

$$x_f' = x_f^{\min}, x_f^{\max}$$

где  $N_f^{(m)} = 1, D_f^{(m)} = 0$  при  $m = 0, \sigma = +1$  или  $\sigma = 0, N_f^{(m)} = 0, D_f^{(m)} = 1$  при  $m = 0, \sigma = -1$  или  $m \neq 0$  (см. таблицу), и удовлетворяют условию ортонормировки

$$\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \int_{x_f^{\min}}^{x_f^{\max}} \Phi_i(x_f; x_s) \Phi_j(x_f; x_s) g_{1f}(x_f) dx_f = \delta_{ij}. \quad (5)$$

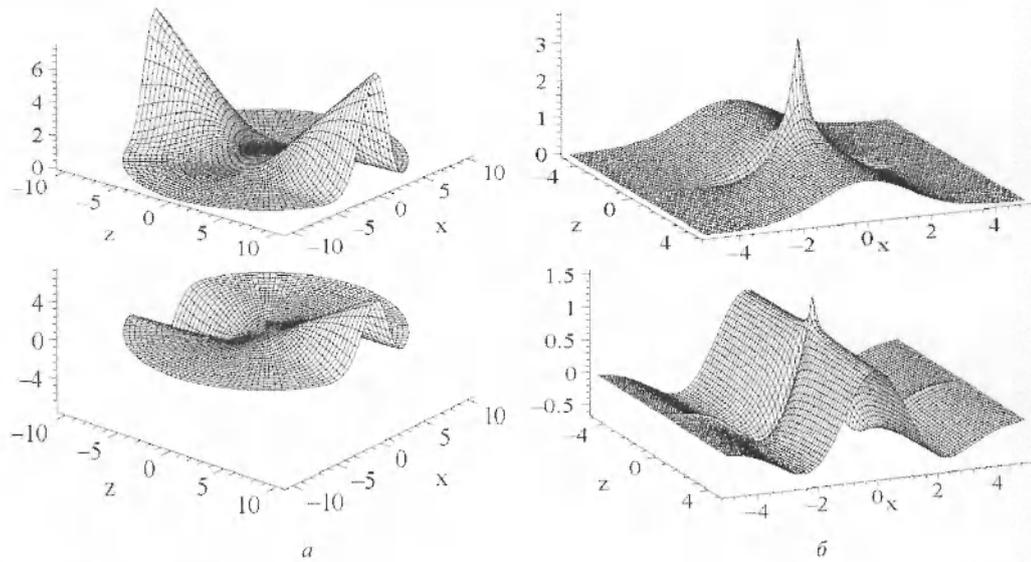


Рис. 3. Модели А КПр и КТ при  $\omega = 0$ ,  $\gamma = 1$  и  $m = 0$ . Профили в плоскости  $xz$  базисных функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ : а – угловые сплюснутые сфероидальные функции в СК, б – базисные функции в ЦК

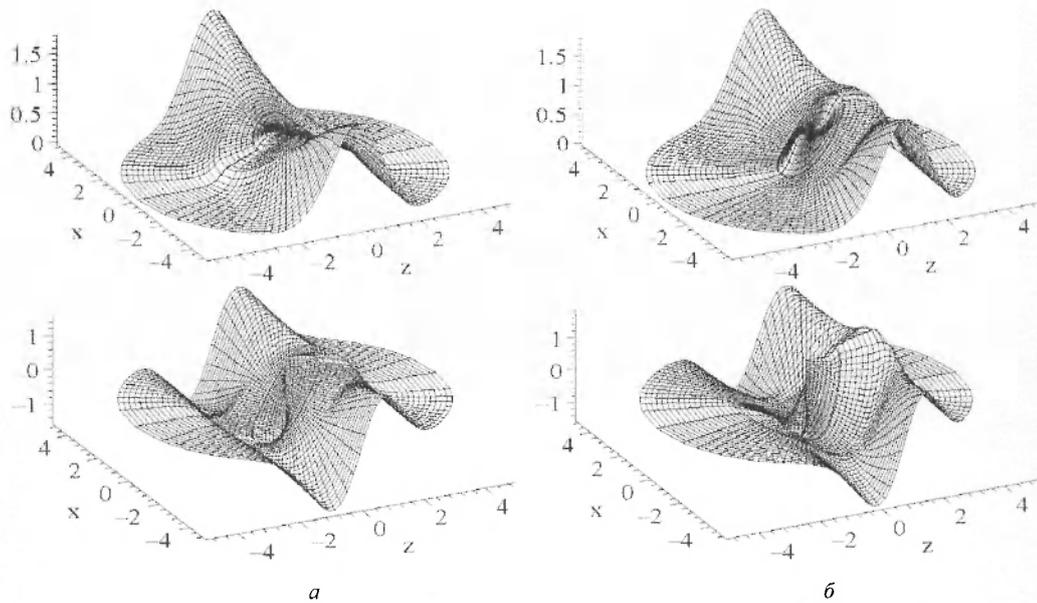


Рис. 4. Модель А КЯ при  $\gamma^* = 0$ ,  $\omega = 3$  и  $m = 0$ . Профили в плоскости  $xz$  базисных функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ : а – угловые вытянутые сфероидальные функции при  $z_c = 0$ ; б – модифицированные угловые вытянутые сфероидальные функции при  $z_c = 0.5$

Здесь  $\hat{E}_1(x_s) < \dots < \hat{E}_{j_{max}}(x_s) < \dots$  – искомый набор вещественных собственных значений (термов),  $\bar{\Phi}_j^m(p_f) = FT(\Phi(x_f; x_s \rightarrow \infty))$ , где  $FT$  – преобразование Фурье. Решения задачи (4), (5) вычисляются с использованием программы ODPEVP [7].

На рис. 3–6 показаны базисные функции КТ, КПр и КЯ для моделей А и Б в СК и ЦК.

Виден сдвиг максимума  $z_{max} = 0.4$  базисных функций, соответствующий сдвигу кулоновского центра  $z_c = 0.4$  для модели А – КЯ с параболическим ограничивающим потенциалом, и разделение базисных функций по четности при  $z_c = 0$  как для КЯ, так и для КТ и КПр.

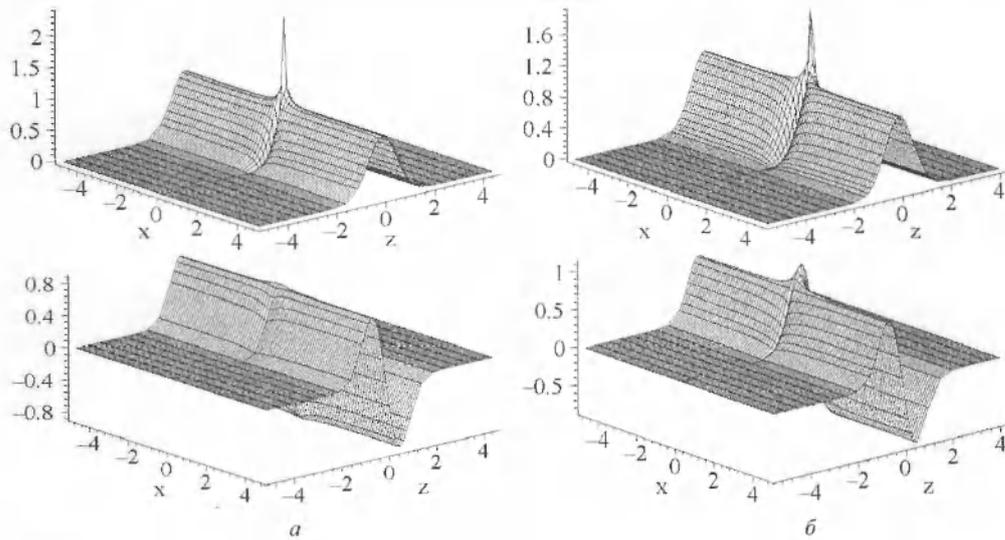


Рис. 5. Модель А КЯ при  $\gamma = 0$ ,  $\omega = 3$  и  $m = 0$ . Профили в плоскости  $xz$  базисных функций  $\Phi_1, \Phi_2$ , являющиеся решениями параметрической задачи (4) в цилиндрических координатах: *a* – четные и нечетные решения,  $z_c = 0$ ; *б* – решения, не имеющие определенной чётности,  $z_c = 0.4$

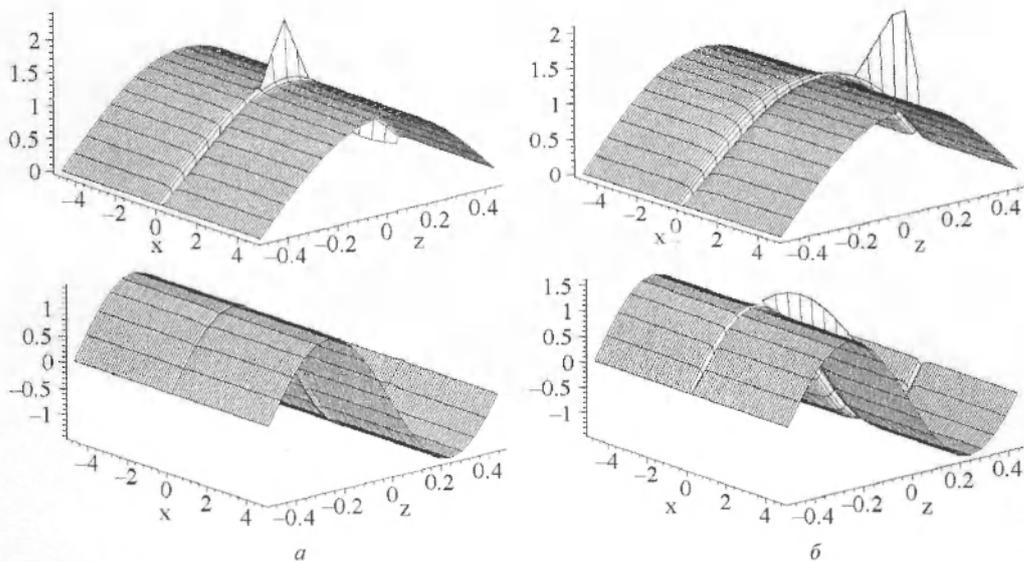


Рис. 6. Модель Б КЯ при  $\gamma = 0$ ,  $L = 1$  и  $m = 0$ . Профили в плоскости  $xz$  базисных функций  $\Phi_1, \Phi_2$  – решений, являющихся решениями параметрической задачи (4) в цилиндрических координатах: *a* – четные и нечетные решения,  $z_c = 0$ , *б* – решения, не имеющие определенной чётности  $z_c = 0.4$

Подставляя разложение (3) в уравнение (2) с учетом (4) и (5), получаем систему ОДУ для медленной подсистемы относительно неизвестных вектор-функций

$$\chi^{(i)}(x_s, E) \equiv \chi^{(i)}(x_s) = (\chi_1^{(i)}(x_s), \dots, \chi_{j_{\max}}^{(i)}(x_s))^T : \\ \mathbf{H} \chi^{(i)}(x_s) = 2E \mathbf{I} \chi^{(i)}(x_s), \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{g_{1s}(x_s)} \mathbf{I} \frac{d}{dx_s} g_{2s}(x_s) \frac{d}{dx_s} + \hat{V}_s(x_s) \mathbf{I} + \mathbf{U}(x_s) +$$

$$+ \frac{g_{2s}(x_s)}{g_{1s}(x_s)} \mathbf{Q}(x_s) \frac{d}{dx_s} + \frac{1}{g_{1s}(x_s)} \frac{dg_{2s}(x_s)}{dx_s} \mathbf{Q}(z)$$

Здесь  $\mathbf{U}(x_s) = \mathbf{U}^T(x_s)$  и  $\mathbf{Q}(x_s) = -\mathbf{Q}^T(x_s)$  – матрицы размерности  $j_{\max} \times j_{\max}$ :

$$U_{ii}(x_s) = \frac{1}{g_{3s}(x_s)} \hat{E}_s(x_s) \delta_{ii} + \frac{g_{2s}(x_s)}{g_{1s}(x_s)} W_{ii}(x_s),$$

$$W_{ij}(x_s) = \int_{x_s^{\min}}^{x_s^{\max}} \frac{\partial \Phi_i(x_f; x_s)}{\partial x_f} \frac{\partial \Phi_j(x_f; x_s)}{\partial x_f} g_{1s}(x_s) dx_s,$$



$$Q_{ij}(x_s) = - \int_{x_s^{\min}}^{x_s^{\max}} \Phi_i(x_f; x_s) \frac{\partial \Phi_j(x_s; x_f)}{\partial x_f} g_{js}(x_s) dx_s,$$

вычисляются при помощи программы ODPEVP [7]. Решения  $\chi^{(v)}(x_s)$  дискретного спектра:  $2E_1 < 2E_2 < \dots < 2E_v < \dots < 2U_{11}(x_s^{\max})$ , подчиняющиеся краевым условиям (см. таблицу) и условиям ортонормировки

$$\int_{x_s^{\min}}^{x_s^{\max}} (\chi^{(v)}(x_s))^T \chi^{(v)}(x_s) g_{1s}(x_s) dx_s = \delta_{v,v'}, \quad (7)$$

вычисляются при помощи программы KANTBP [8]. Для многоканальной задачи рассеяния число открытых каналов  $N_o = \max j \leq j_{\max}$  в (3) определяется условием для непрерывного спектра значений

$$2E > \lim_{x_s^{\max} \rightarrow \infty} U_{jj}(x_s^{\max}),$$

если  $\lim_{x_s^{\max} \rightarrow \infty} g_{2s}(x_s^{\max})/g_{1s}(x_s^{\max}) = \text{const}$ , а нормировка решения  $\mathbf{F}(x_s) = \{\chi_{i_c}(x_s)\}_{i_c=1}^{N_o}$ :

$$\mathbf{F}(x_s^{\max}) = \mathbf{F}_{reg}^{as}(x_s^{\max}) + \mathbf{F}_{irr}^{as}(x_s^{\max})\mathbf{K}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{K}$  – искомая матрица реакции размерностью  $N_o \times N_o$ , а  $\mathbf{F}_{reg}^{as}(x_s)$  и  $\mathbf{F}_{irr}^{as}(x_s^{\max})$  – матрицы размерностью  $j_{\max} \times N_o$  асимптотик регулярных и нерегулярных решений уравнения (6) на интервале  $(x_s^{\max}, +\infty)$ , построенные с учетом диагональной матрицы кулоновских фазовых сдвигов  $\delta^c = \{\delta_{i_c}^c\}_{i_c=1}^{N_o}$ , в [11, 12]. Решения непрерывного спектра подчиняются краевым условиям для КЯ в ЦК,  $x_s = \rho$ , или СК [11],  $x_s = r$ , и для КПр в ЦК,  $x_s = z$ , или СК [12],  $x_s = r$ :

$$\lim_{x_s \rightarrow x_s^{\max} = 0} g_{2s}(x_s) \frac{d\mathbf{F}(x_s)}{dx_s} = 0, \\ \frac{d\mathbf{F}(x_s^{\max})}{dx_s} = \mathbf{R}(x_s^{\max})\mathbf{F}(x_s^{\max}), \quad (9)$$

где  $\mathbf{R}(x_s^{\max})$  – неизвестная несимметричная матрица реакции размерностью  $j_{\max} \times j_{\max}$ , через которую выражается искомая короткодействующая симметричная  $\mathbf{K}$ -матрица, вычисляемые при помощи программы KANTBP [8]. Решения задачи (6), (9), дополненные асимптотиками (8), удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^{+\infty} (\chi^{(i)}(x_s, E))^T \chi^{(i)}(x_s, E) g_{1s}(x_s) dx_s = \delta(E - E') \delta_{i,i'},$$

$$i', i = 1, \dots, N_o.$$

Короткодействующая матрица рассеяния  $\mathbf{S}$  определяется через  $\mathbf{K}$ -матрицу:

$$\mathbf{S}^+ \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^+ = \mathbf{I}_{oo}, \quad \mathbf{K} = i(\mathbf{I}_{oo} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{I}_{oo} - \mathbf{S}), \\ \mathbf{S} = (\mathbf{I}_{oo} + i\mathbf{K})(\mathbf{I}_{oo} - i\mathbf{K})^{-1}. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{S} = (\mathbf{I}_{oo} + i\mathbf{K})(\mathbf{I}_{oo} - i\mathbf{K})^{-1}$  – симметричная унитарная короткодействующая матрица рассеяния  $\mathbf{S}^+ \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^+ = \mathbf{I}_{oo}$  определяет искомую  $\check{\mathbf{S}} = \exp(i\delta^c) \mathbf{S} \exp(i\delta^c)$ . Для аксиально симметричной КПр, матрицы амплитуд прохождения  $\hat{\mathbf{T}}$  и отражения  $\hat{\mathbf{R}}$ , блоки полной матрицы рассеяния [12]

$$\hat{\mathbf{S}}^+ \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{S}}^+ = \mathbf{I}_{oo}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}} & \hat{\mathbf{R}} \\ \hat{\mathbf{R}} & \hat{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

определяются соотношениями

$$\hat{\mathbf{T}}^+ \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{R}}^+ \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_{oo}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}(-\check{\mathbf{S}}_{+1} + \check{\mathbf{S}}_{-1}), \\ \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}(-\check{\mathbf{S}}_{+1} - \check{\mathbf{S}}_{-1}), \quad (12)$$

где дальнедействующая  $\check{\mathbf{S}}_{\sigma}$ -матрица связана через  $\delta^c$  – кулоновский фазовый сдвиг [13] с короткодействующей  $\mathbf{S}$ -матрицей из (10) соотношениями  $\check{\mathbf{S}}_{\sigma} = \exp(i\delta^c) \mathbf{S}_{\sigma} \exp(i\delta^c)$ ,  $\sigma = \pm 1$  – z-чётность.

#### Обсуждение и анализ результатов

Представленные ниже результаты решения краевых задач для уравнений (4) и (6) моделей А и Б (КЯ, КПр и КТ) в сферических и цилиндрических координатах получены с помощью программ ODPEVP [7] и KANTBP [8]. Для вычисления с заданной точностью энергии (основного состояния) с восемью значащими цифрами использовался набор  $j_{\max} = 10$  базисных функций в (3) и дискретизация искомого решения методом конечных элементов четвёртого порядка точности по шагу сеток на интервалах  $[x_f^{\min}, x_f^{\max}]$  и  $[x_s^{\min}, x_s^{\max}]$ .



На рис. 7 показаны зависимости энергии связи электрона от радиуса КТ для моделей А и Б. С уменьшением  $r_0$  энергия связи  $E_B/E_R^*$  увеличивается, так как уменьшается область локализации электрона вокруг примесного центра.

Из сравнения кривых 1, 2 и 3 видно, что оценка подгоночного параметра  $\gamma_{r_0} = \pi^2/3$  обеспечивает качественное согласование моделей А и Б.

На рис. 8 показаны зависимости энергии связи электрона от магнитной длины  $a_H^*/a_B^* = 1/\sqrt{\gamma}$  для моделей А и Б. Из сравнения кривых 1, 4 и 3 видно, что оценка подгоночного параметра  $\gamma_{r_0} = \pi^2/3$  обеспечивает качественное согласование моделей А и Б. При увеличении  $H$  (уменьшении  $a_H$ ) энергия связи растёт. Это связано с тем, что при больших  $H$  задача всё более приближается к одномерной как для КТ, так и для КПр (рис. 9, 10).

На рис. 11 показаны зависимости энергии связи электрона от величины магнитного поля  $\gamma^* = H/H_0, H_0 = 6$  Тл для модели А при  $\omega = 0$ , вычисленные в различных приближениях. В соответствии с изменяющейся симметрией задачи верхние (кривые 2 и 4) и

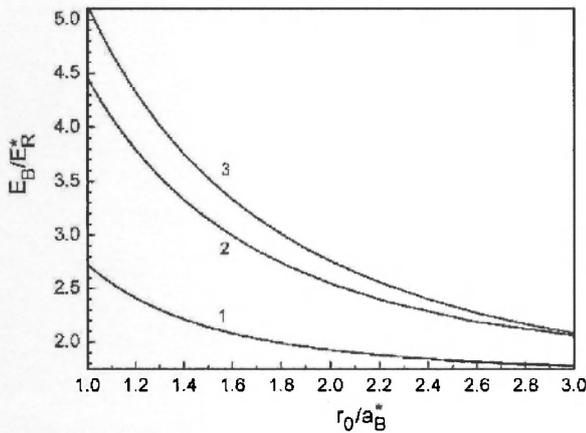


Рис. 7. Зависимости энергии связи электрона  $E_B/E_R^* = -(E(q=1) - E_0(q=0))/E_R^*$  – разности между энергиями электрона в КТ без примеси  $E_0(q=0)$  и с примесью  $E_1(q=1)$ , от радиуса КТ ( $1 < r_0 < 3$ ): 1 и 2 – с параболическим потенциалом  $\omega = 1/r_0^2$  и  $\omega = \pi^2/(3r_0^2)$ ; 3 – с потенциалом бесконечно высокой стенки, при фиксированном магнитном поле  $\gamma = 1$  ( $H_0^* = 6$  Тл)

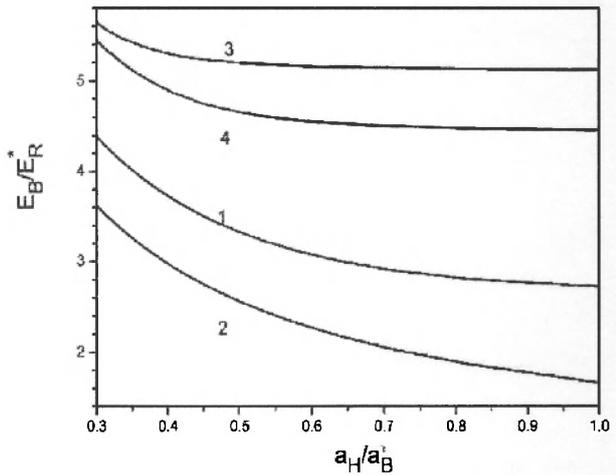


Рис. 8. Зависимости энергии связи электрона  $E_B/E_R^*$  от напряженности магнитного поля  $a_H^*/a_B^* = 1/\sqrt{\gamma}$ ,  $1 < \gamma < 11$ , при фиксированном  $r_0 = a_B^*$  радиусе КТ: 1 и 4 – примесный электрон в параболической КТ при наличии ограничивающего потенциала с частотой  $\omega = 1/r_0^2$  и  $\omega = \pi^2/(3r_0^2)$ ; 2 – примесный электрон без ограничивающего потенциала ( $\omega = 0$ ); 3 – примесный электрон в КТ с потенциалом бесконечно высокой стенки

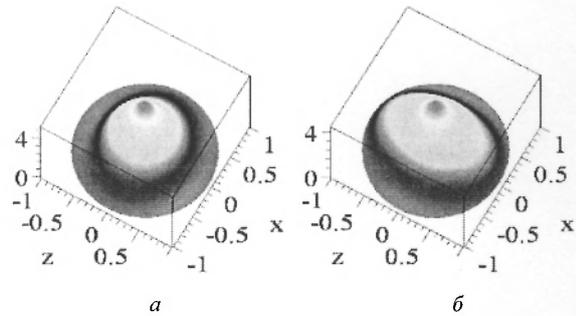


Рис. 9. Модель БКТ при  $r_0 = 1$ . Профили в плоскости  $xz$  волновых функций  $\Psi$  основного примесного состояния при значении магнитного поля: а –  $\gamma^* = 1$ , б –  $\gamma^* = 10$

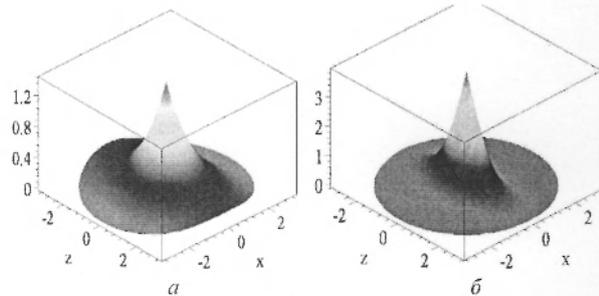


Рис. 10. Модель А КТ (КПр) при  $\omega = 0$ . Профили в плоскости  $xz$  волновых функций  $\Psi$  основного примесного состояния при значении магнитного поля: а –  $\gamma^* = 1$ , б –  $\gamma^* = 10$

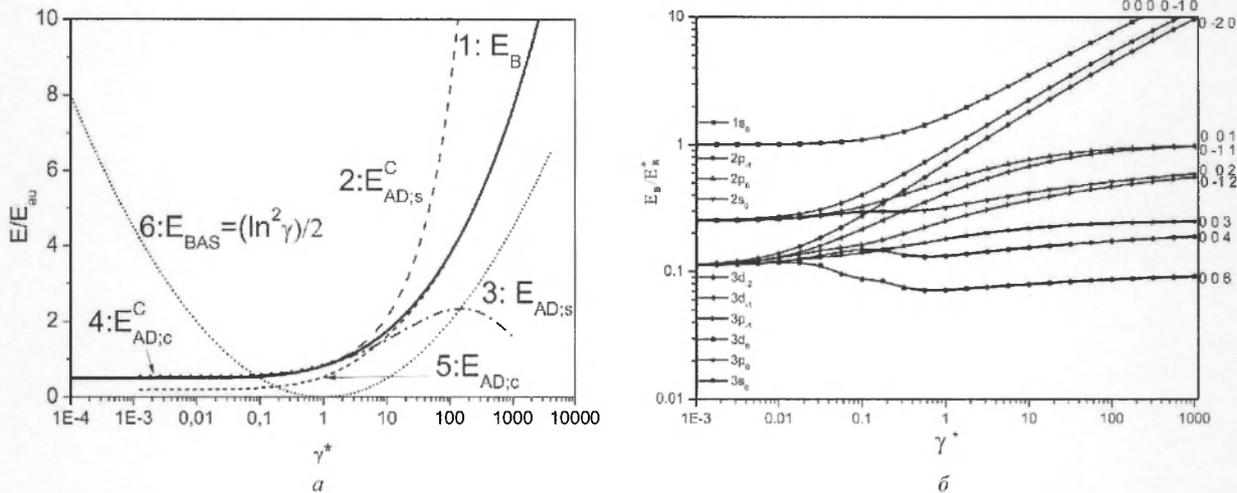


Рис. 11. Зависимости энергий связи электрона в КПр (модель А при  $\omega = 0$ ) от величины магнитного поля  $\gamma = H/H_0, H_0^* = 6$  Тл: а – энергия связи основного состояния ( $v = 1$ )  $E / E_{BAS} = E_B / (2E_R^*)$ , вычисленная в различных приближениях: кривая 1 – с заданной точностью, кривые 2 и 4 – грубое адиабатическое приближение ( $j_{max} = 1, W_{11} = 0$ ) в СК и ЦК, кривые 3 и 5 – адиабатическое приближение ( $j_{max} = 1$ ) в СК и ЦК, б – оценка  $E_{BAS} = (\ln^2 \gamma) / 2$  с логарифмической точностью; б – первые десять уровней удвоенной энергии связи  $E_B / E_R^* = \gamma^* - 2E_v, v = 1, \dots, 10$

нижние (кривые 3 и 5) оценки приближаются к значению, вычисленному с заданной точностью (кривая 1), при  $\gamma < 1$  для разложения (3) по базисным функциям в СК и при  $\gamma^* > 50$  – в ЦК. Заметим, что стандартная оценка (кривая б) с логарифмической точностью [13] примерно в три раза отличается от точной (кривая 1) и требует соответствующего уточнения [15].

На рис. 12 показаны зависимости энергии связи электрона от положения кулоновского сдвига  $z_c$  в КЯ для моделей А и Б, вычисленные в различных приближениях с использованием базисных функций в СК и ЦК. Разложение (3) в ЦК имеет низкую скорость сходимости, что связано с его нефакторизуемостью по  $z, \rho$  и невыполнением краевых условий типа Като в окрестности точки  $z = z_c$ , как и в окрестности точки  $z = 0$  для КТ и КПр [16].

На рис. 13, 14 показаны профили волновых функций основного примесного состояния без сдвига и со сдвигом кулоновского центра в КЯ для моделей А и Б. В соответствии с поведением базисных функций (см. рис. 5) на рис. 13 виден сдвиг максимума  $z_{max} = 0.4$  волновой функции, соответствующий сдвигу кулоновского центра  $z_c = 0.4$  для

модели А КЯ с параболическим ограничивающим потенциалом.

С другой стороны, в соответствии с поведением базисных функций (см. рис. 6) на рис. 14 виден незначительный сдвиг максимума  $z_{max} = 0.04$  волновой функции, соответствующий сдвигу кулоновского центра  $z_c = 0.4$  для модели Б КЯ с потенциальной ямой с бесконечно высокими стенками, в отличие от более реалистических моделей со стенками конечной высоты или модели А с параболическим ограничивающим потенциалом. Различие в поведении функций можно использовать для верификации моделей А и Б и др.

Коэффициент примесного поглощения  $K(\omega_{ph})$  в параболической квантовой яме из GaAs вычислялся с помощью вариационных функций [14]:

$$K(\omega_{ph}) = \frac{4\pi^2 e^2}{km_e^2 c \omega_{ph} V} \sum_{i,f} |\vec{e} \vec{M}_{if}|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega_{ph}), \quad (13)$$

где  $V$  – объем образца,  $\vec{e}$  – вектор поляризации и  $\omega_{ph}$  – частота падающей электромагнитной волны,  $\vec{M}_{if}$  – матричный элемент перехода из начального состояния  $i$  в конечное состояние  $f$ ,  $E_i$  – энергия начального состояния,  $E_f$  – энергия конечного состояния,

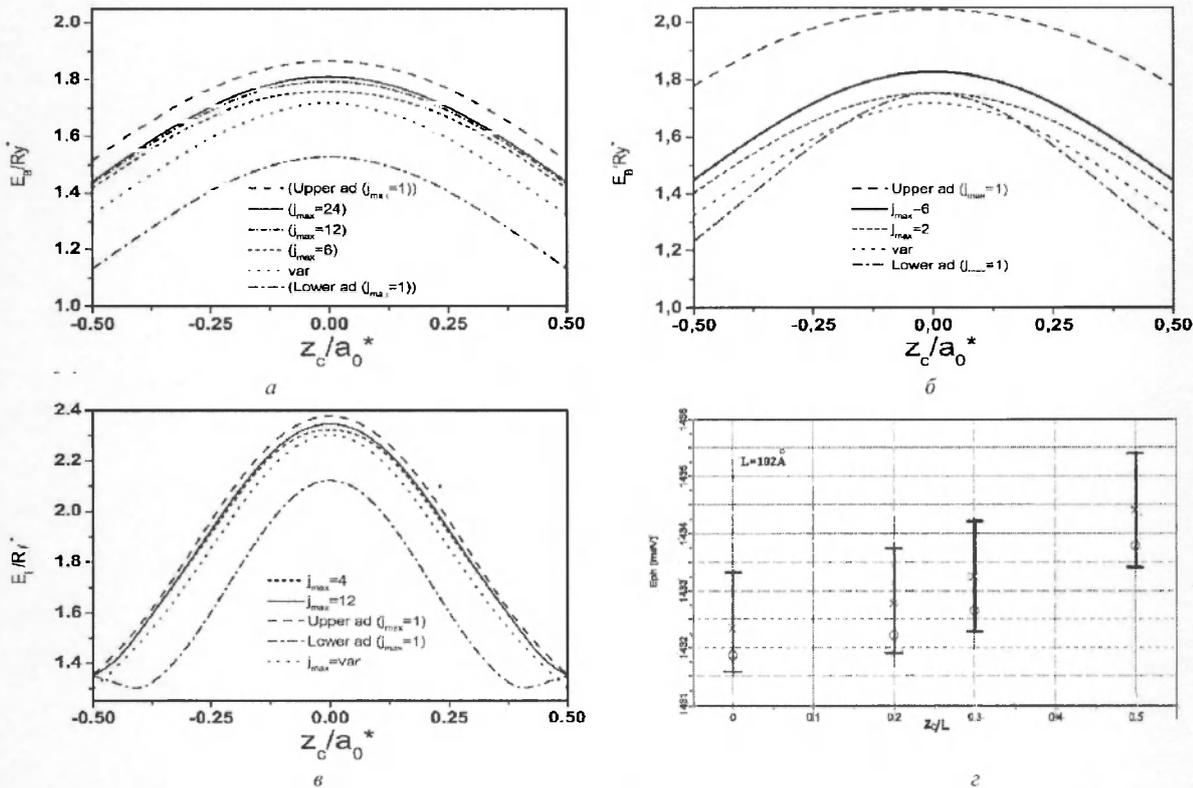


Рис. 12. Зависимость вычисленной энергии связи модели А параболической КЯ от положения кулоновской примеси  $z_c$  при  $q = 1, m = 0, \omega = 3$  в ЦК и СК: а, б, в – модели Б КЯ с бесконечно высокими стенками при  $L = 1$  в ЦК в различных приближениях: (upper ad) ( $j_{max} = 1$ ) – грубое адиабатическое приближение  $W_{11} = 0$ ; (lower ad) ( $j_{max} = 1$ ) – адиабатическое приближение; ( $j_{max} = 2, 4, 6, 12, 24$ ) – в зависимости от числа базисных функций  $j_{max}$ ; (var) – вариационный расчет [14]; г – интервалы резонансных энергий фотона  $E_{ph} = \omega_{ph}\hbar = E_f - E_i$ , определяющие максимальные значения коэффициента поглощения,  $K(\omega_{ph})$ , в зависимости от положения примеси  $z_c/L$ : отрезки – верхние и нижние адиабатические оценки, крестики – вариационный расчет [14], кружки – адиабатический расчет

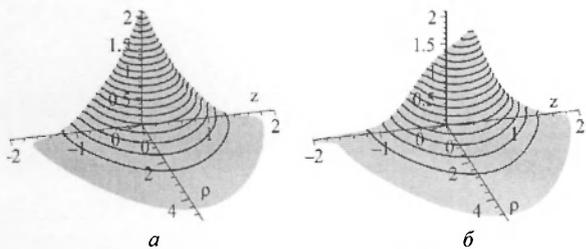


Рис. 13. Модель А при  $q = 1, m = 0, \omega = 3$ . Профили в плоскости  $\rho z$  волновых функций  $\Psi$  основного примесного состояния модели КЯ в зависимости от значения сдвига кулоновского центра: а –  $z_c = 0$ , б –  $z_c = 0.4$

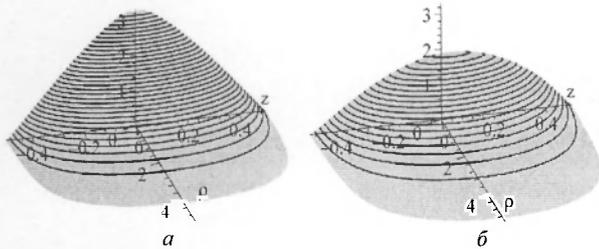


Рис. 14. Модель Б при  $q = 1, m = 0, L_0 = 1$ . Профили в плоскости  $\rho z$  волновых функций  $\Psi$  основного примесного состояния модели КЯ в зависимости от значения сдвига кулоновского центра: а –  $z_c = 0$ , б –  $z_c = 0.4$

а наличие  $\delta$ -функции в (13) обеспечивает закон сохранения энергии при переходах. Полученные верхние и нижние оценки и значения с заданной точностью энергии  $E_i = E_0 - E_B$  примеси позволяют уточнить границы интервалов значений резонансной энергии фотона  $E_{ph} = \hbar\omega_{ph} = E_f - E_i$  (см. рис. 12, г), в которых будут находиться «пиковые» (максимальные) значения коэффициента поглощения  $K(\omega_{ph})$  в зависимости от положения примеси (рис. 15, 16).

Эффективность разработанных методов, алгоритмов и созданных комплексов программ ODPEVP [7] и KANTBP [8] подтверждена результатами численного анализа полученных теоретических оценок погрешности решений краевых задач и результатами анализа моделей типа А КПр для следующих физических процессов:

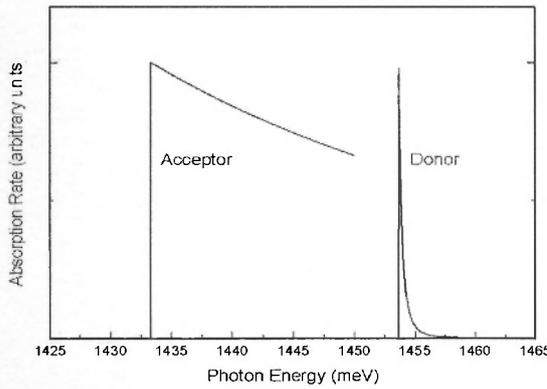


Рис. 15. Различие кривых поглощения при переходах акцептор  $\rightarrow$  зона проводимости (Acceptor) и валентная зона  $\rightarrow$  донор (Donor) при  $L = 100 \text{ \AA}$ ,  $m_v/m_c = 9.2$

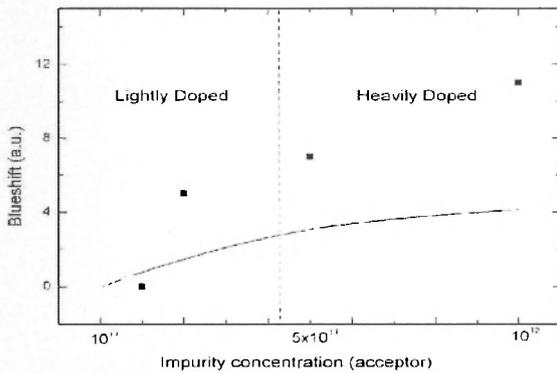


Рис. 16. Зависимость синего смещения для переходов донор-акцептор от концентрации доминирующей (акцептор) примеси: квадраты – результаты эксперимента [17], сплошная линия – результаты расчетов [18], слева – область низких концентраций, справа – область высоких концентраций

а) проведено численное исследование модели резонансного механизма фотоионизации и лазерно-стимулированной рекомбинации атома антиводорода в однородном магнитном поле  $\gamma = H/H_0$ ,  $H_0 = 2.35 \cdot 10^5 \text{ Т}$  (рис. 17). Впервые предсказаны (рис. 18, а) эффекты резонансного прохождения и полного отражения разноименно заряженных частиц в однородном магнитном поле [19];

б) выполнено численное исследование модели осевого каналирования одноименно заряженных частиц в эффективном параболическом потенциале с частотой  $\omega = 1/2$ . Выявлен немонотонный характер зависимости от энергии  $E$  столкновения коэффициента усиления  $K(E)$ , обусловленный впервые предсказанными резонансными эффектами отражения, и прохождения каналированных ионов [19, 20] (рис. 18, 19).

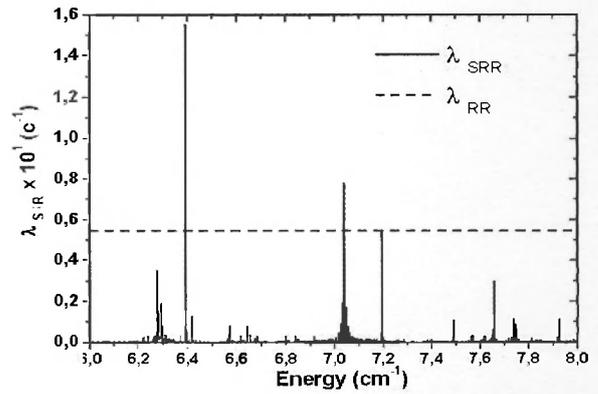
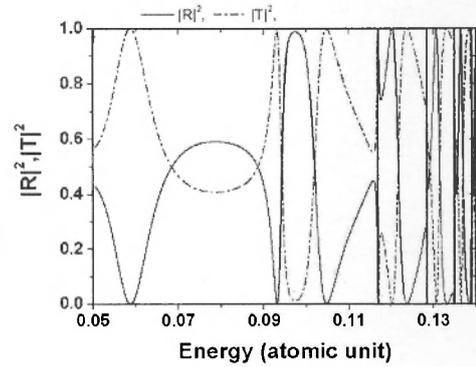
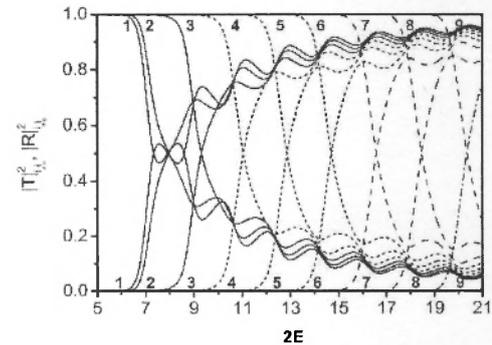


Рис. 17. Зависимость скорости лазерно-стимулированной рекомбинации в состоянии  $3s_0$  на один антипротон по отношению к начальной энергии позитрона  $E$  (при  $q = 1$ ,  $m = 0$ ):  $\lambda_{SRR}$  при  $\gamma = 2.595 \cdot 10^{-5}$  ( $H \sim 6 \text{ Тл}$ ) (сплошная линия),  $\lambda_{RR}$  при  $\gamma = 0$  во все состояния с  $N = 3$  (пунктирная линия [21])



а



б

Рис. 18. Зависимость от энергии: а – коэффициентов прохождения  $|T|^2$  и отражения  $|R|^2$  при  $q = 1$ ,  $m = 0$ ,  $\gamma = 1 \cdot 10^{-1}$ ; б – диагональных элементов амплитуд прохождения  $|T|_{i_0}^2$  и отражения  $|R|_{i_0}^2$ , соответствующим первым девяти открытым каналам ( $i_0 = 1 \div 9$ ), в зависимости от энергии ( $2E$ ) для эффективного заряда  $q = -6$  и  $\omega = 1/2$  (в масштабированных единицах [20])

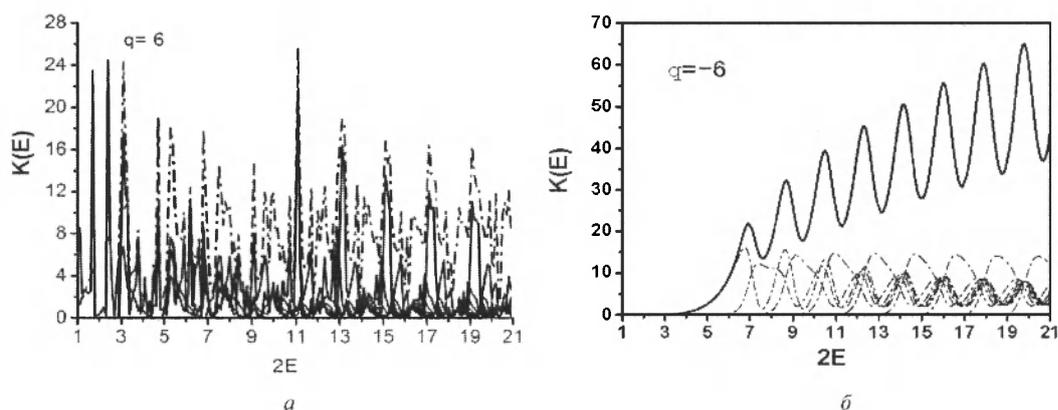


Рис. 19. Суммарный коэффициент усиления  $K(E) = |\Psi(r=0, E, \gamma)|^2 / |\Psi(r=0, E, \gamma=0)|^2$  (сплошная линия) и парциальные вклады (пунктирные линии) открытых каналов  $i_0 = 1-10$  в зависимости от  $E$  для эффективного заряда  $q = 6$  (а) и  $q = -6$  (б),  $\omega = 1/2$  (в масштабированных единицах [20])

### Заключение

Перспективы дальнейшего развития и применения метода Канторовича [22], алгоритмов и комплекса программ [23] при решении краевых задач для уравнения эллиптического типа с использованием подходящих параметрических базисных функций связаны с изучением новых механизмов формирования примесных и экситонных состояний моделей квантовых полупроводниковых наноструктур и спектральных, кинетических, транспортных и оптических характеристик: квантовых ям, квантовых проволок, квантовых точек, в зависимости от их строения и внешних полей, а также моделей процессов ионизации и рекомбинации водородоподобных атомов в магнитном поле или процессов каналирования ионов в кристалле и квантовой проволоке.

Примечательно, что для задачи непрерывного спектра в моделях КПр имеют место эффекты резонансного прохождения и полного отражения как разноименно, так и одноименно заряженных частиц (см. рис. 17), поскольку ограничение по поперечной переменной соответствует наложению однородного магнитного поля по продольной переменной [24] или ограничивающего осцилляторного потенциала канала кристалла [19, 20] по поперечной переменной.

При кулоновском рассеянии в магнитном поле отношение квадрата модуля волновой функции в нуле к квадрату модуля куло-

новской функции, так называемый коэффициент усиления, имеет немонотонное поведение в зависимости от энергии столкновения (см. рис. 19) при различных значениях магнитного поля или ограничивающего осцилляторного потенциала канала кристалла [19, 20], что может приводить при резонансных энергиях к дополнительному увеличению скорости образования экситона в результате поглощения электроном в валентной зоне фотона по сравнению со скоростью образования экситона в отсутствие магнитного поля [25, 26]. Возможно, что указанные резонансные квантовые эффекты найдут применение при описании транспорта квантового тока в полупроводниковых наноструктурах [6, 27, 28, 29].

*Работа выполнена в рамках протокола 3967-3-6-09/11 о сотрудничестве ОИЯИ с РАН [29] в области динамики конечномерных квантовых моделей и наноструктур во внешних полях и поддержана грантом РФФИ 08-01-00604а и грантом Президента РФ МК-2344.2010.2.*

### Список литературы

1. Born M., Oppenheimer R. Zur Quantentheorie der Molekeln // Annalen der Physik. 1927. Bd.84. P.457-484; Born M. Die Verbindung der elektronischen und nuklearen Bewegungen in den Molekulan und den Kristallen // Festschrift Goett. Nach. Math. Phys. 1951. K1. P.1-6.
2. Канторович Л.В., Крылов В.М. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Гостехиздат. 1952.



3. Власова З.А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Работы по приближенному анализу: Тр. МИАН СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. Т.53. С.16–36.
4. Gusev A.A., Chuluunbaatar O., Gerdt V.P., Markovski B.L., Serov V.V., Vinitsky S.I. Algorithm for reduction of boundary-value problems in multistep adiabatic approximation // Proc. of Intern. Conf. on Computer Algebra and Differential Equations (CADE 2009). Pamplona, Spain, 2009; <http://arxiv.org/abs/1005.2089>
5. Bimberg D., Grundmann M., Ledentsov N.N. Quantum Dot Heterostructures. N.Y.: John Wiley and Sons, 1999; Saleh B.E.A., Teich M.C. Fundamentals of photonics, 2nd ed. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
6. Miura N. Physics of Semiconductors in High Magnetic Fields. N.Y.: Oxford University Press Inc., 2008.
7. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Vinitsky S.I., Abrashkevich A.G. ODPEVP: A program for computing eigenvalues and eigenfunctions and their first derivatives with respect to the parameter of the parametric self-adjointed Sturm-Liouville problem // Comput. Phys. Commun. 2009. Vol.180. P.1358–1375.
8. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Vinitsky S.I., Abrashkevich A.G. KANTBP 2.0: New version of a program for computing energy levels, reaction matrix and radial wave functions in the coupled-channel hyperspherical adiabatic approach // Comput. Phys. Commun. 2008. Vol.179. P.685–693.
9. Ramdas Ram-Mohan L. Finite Element and Boundary Element Application in Quantum Mechanics. N.Y.: Oxford University press, 2002.
10. Виноцкий С.И., Гусев А.А., Чулуунбаатар О., Дербов В.Л., Казарян Э.М., Саркисян А.А. Адиабатическое описание примесных состояний квантовой точки в сильном магнитном поле // Материалы 13-й Междунар. школы для студентов и молодых ученых по оптике, лазерной физике и биофизике Saratov Fall Meeting, SFM'09. Саратов, 2009.
11. Vinitsky S.I. Chuluunbaatar O., Gerdt V.P., Gusev A.A., Rostovtsev V.A. Symbolic-Numerical Algorithms for Solving Parabolic Quantum Well Problem with Hydrogen-Like Impurity // LNCS. 2009. Vol.5743. P.334–349.
12. Gusev A.A., Chuluunbaatar O., Vinitsky S.I., Derbov V.L., Kazaryan E.M., Kostanyan A.A., Sarkisyan H.A. Adiabatic approach to the problem of a quantum well with a hydrogen-like impurity // ЯФ. 2010. Т.73, №2. С.352–359.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
14. Карнаков Б.М., Попов В.С. Атом водорода в сверхсильном магнитном поле и эффект Зельдовича // ЖЭТФ. 2003. Т.124. С.996–1022.
15. Kazaryan E.M., Kostanyan A.A., Sarkisyan H.A. Impurity optical absorption in parabolic quantum well // Physica E. 2005. Vol.28. P.423–430.
16. Guzman A., Sanchez-Rojas J.L., Tijero J.M.G., Sanchez J.J., Hernando J., Calleja E., Mufioz E., Vergara G., Montojo M.T., Gornez L.J., Rodriiguez P., Alrnazan R., Verdu M. Optical characterisation of quantum well infra-red detector structures // IEE Proceedings Optoelectronics. 1999. Vol.146. P.89–92.
17. Kazaryan E.M., Kostanyan A.A., Sarkisyan H.A. Optical absorption in GaAs quantum wells caused by donor acceptor pair transitions // J. Phys. Cond. Mat. 2007. Vol.19. P.046212.
18. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Vinitsky S.I., Derbov V.L., Melnikov L.A., Serov V.V. Photoionization and recombination of a hydrogen atom in a magnetic field // Phys. Rev. A. 2008. Vol.77. P.034702–1–4.
19. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Derbov V.L., Krassovitskiy P.M., Vinitsky S.I. Channeling Problem for Charged Particles Produced by Confining Environment // ЯФ. 2009. Т.72. С.768–778.
20. Виноцкий С.И., Гусев А.А., Чулуунбаатар О., Дербов В.Л., Серов В.В., Красовицкий П.М. Эффекты резонансного прохождения и отражения каналированных ионов при наличии поперечного осцилляторного потенциала // Моделирование нелинейных процессов и систем: Материалы Междунар. науч. конф. / ГОУ ВПО МГТУ «Станкин 2009»; под ред. Л.А. Уваровой. М.: Янус-К, 2009. С.402–422.
21. Ryabinina M.V., Melnikov L.A. Laser-induced antiproton-positron recombination in traps // Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. B. 2004. Vol.214. P.35–39.
22. Общероссийский математический портал // URL: <http://www.mathnet.ru> (дата обращения: 02.06.2010).
23. О. Chuluunbaatar's home page // URL: <http://www.info.jinr.ru/chuka/>; Group of Algebraic and Quantum Computations, Alexander Gusev // <http://compalg.jinr.ru/CAGroup/Gusev/> (дата обращения: 02.06.2010).
24. Chuluunbaatar O., Gusev A.A., Derbov V.L., Kaschiev M.S., Mardoyan L.G., Serov V.V., Tupikova T.V., Vinitsky S.I. Adiabatic representation for a hydrogen atom photoionization in an uniform magnetic field // ЯФ. 2008. Т.71, №5. P.871–878.
25. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978.
26. Усанов Д.А., Сучков С.Г. Многочастичные квантовые эффекты в физике твёрдого тела. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007.
27. Fu Y., Willander M. Physical Models of Semiconductor Quantum Devices. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
28. Sundqvist P.A., Zhao Q.X., Willander M. Boundary conditions for electron tunneling in complex two- and three-dimensional structures // Phys. Rev. B. 2005. Vol.72. P.165103–1–14.
29. Российско-Армянский (Славянский) университет, физико-технический факультет // URL: [http://www.rau.am/faculties.php?l=1&add\\_page=1&f\\_id=6&l1=36&l2=37](http://www.rau.am/faculties.php?l=1&add_page=1&f_id=6&l1=36&l2=37) (дата обращения: 02.06.2010).

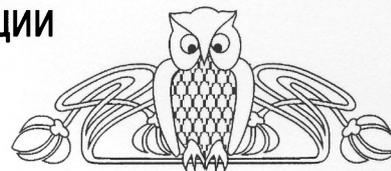


УДК 530.12

## ДАННЫЕ ПО СВЕРХНОВЫМ И РЕЛИКТОВОМУ ИЗЛУЧЕНИЮ И МАССА ЧАСТИЦЫ ХИГГСА В МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В.Н. Первушин

Объединенный институт ядерных исследований,  
лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Дубна  
E-mail: pervush@theor.jinr.ru



В масштабно-инвариантной единой теории гравитации и электрослабых взаимодействий показано, что наблюдательные данные по Сверхновым и реликтовому излучению свидетельствуют о первичном космологическом квантовом рождении из вакуума электрослабых бозонов, включая частицы Хиггса с массой в районе 118 ГэВ.

**Ключевые слова:** масштабная симметрия, частица Хиггса, возникновение масс, нарушение симметрии начальными данными.

**SN and CMB Data and Higgs Particle Mass in a Scale-Invariant Gravitation Theory**

V.N. Pervushin

In a Scale-Invariant Gravitation Theory, it was shown that both CMB data and SN ones testify to an ordinary cosmological quantum vacuum creation of the Universe together with the  $W$ -,  $Z$ -vector bosons and the Higgs particles. The initial momentum of the evolution, given by the kinetic energy of an additional scalar field, the Standard Model mass spectrum determine the CMB temperature and its fluctuation spectrum, if the Higgs particle mass is in the region of about 118 GeV.

**Key words:** scale symmetry, Higgs particle, mass origin, symmetry breaking by the initial data.

### Введение

В настоящее время принято считать, что современная Стандартная Модель (СМ) физики элементарных частиц способна вычислить и описать амплитуды всех процессов, измеряемых на современных ускорителях, в том числе и Адронном Коллайдере, который находится сейчас в стадии запуска. Но эти вычисления СМ содержат массу загадочной частицы Хиггса, названной по имени теоретика, который ввел эту скалярную частицу в физику элементарных частиц [1, 2].

Одной из центральных задач исследований на Адронном Коллайдере является прямое обнаружение частицы Хиггса, определение ее массы и сравнение этой массы с теми предсказаниями СМ, которые допускают ошибки измерений и теоретические ограничения.

В настоящей статье автор хотел бы рассказать о статусе скалярного поля Хиггса в ОТО и, в частности, о его участии в эволюции Вселенной.

Центральным пунктом статьи является принцип масштабной симметрии законов природы. Масштабная симметрия рассматривалась основателями современной физики и до сих пор рассматривается как принцип объединения гравитационных и электрослабых взаимодействий [3–7].

Спонтанное возникновение масс частиц в Стандартной Модели электрослабого взаимодействия связывают с нарушением масштабной симметрии. Существует два источника нарушения симметрии. Первый, который предложил Хиггс [1, 2], состоит во включении в уравнения СМ единственного *фундаментального* размерного параметра – массы тахиона. Напомним, что параметры уравнений называют *фундаментальными*, чтобы отличать их от *свободных начальных данных*, от которых уравнения движения не зависят. С этой точки зрения источником нарушения масштабной симметрии в теории поля могут быть не только фундаментальные параметры уравнений движения, а также свободные начальные данные. От начальных данных зависят не уравнения, а решения этих уравнений в конкретной системе отсчета. Начальные данные могут также нарушать масштабную инвариантность решений уравнений движения и формировать массы элементарных частиц в секторе сильных и электрослабых взаимодействий Стандартной Модели.

В этой связи следует отметить, что механизм Хиггса хорошо работает не только в физике частиц, но и в физике твердого тела.



В моделях твердого тела источником нарушения масштабной симметрии считаются не *фундаментальные* параметры уравнений движения, а свойства внешней среды, которые позволяют учитывать крупномасштабную эволюцию этих свойств и определять пределы применимости теории при описании больших температур и плотностей.

В этой работе мы собираемся менять не сам механизм Хиггса, а лишь его интерпретацию, заменяя фундаментальные параметры уравнений на начальные данные.

Настоящая работа посвящена возникновению масс частиц благодаря нарушению масштабной симметрии в Стандартной Модели электрослабого взаимодействия свободными начальными данными уравнений движения [8, 9].

#### 1. Нарушение масштабной симметрии начальными данными

В Стандартной Модели ответственным за возникновение масс элементарных частиц принято считать потенциальное уравнение Хиггса [1] в классе постоянных полей. Это уравнение выглядит как равная нулю производная от потенциала, которая в механике Ньютона называется «силой», т.е. уравнение есть сила, равная нулю ( $C = 0$ ). Вообще говоря, такого уравнения нет в стандартной классической механике, где существует три типа уравнений: Ускорение = 0, Ускорение = Силе, сумма Сил = 0. Действительно, декларация СМ о классическом потенциальном уравнении Хиггса заменяется в реальной квантовой теории возмущений вычислением эффективного потенциала Коулмена–Вайнберга посредством амплитуды перехода вакуум–вакуум. В этом вычислении уравнение Хиггса ( $C = 0$ ) трактуется как условие стабильности вакуума в квантовой теории.

Одной из первых работ, посвященных космологическому обобщению эффекта Хиггса на классическом уровне, была работа Киржница [8]. Он первый, по-видимому, заметил, что если константные поля заменить нулевой гармоникой поля Хиггса, то потенциальное уравнение для нулевой гармоники поля Хиггса заменится полным динамическим уравнением: «ускорение равно силе»

( $U = C$ ), типа второго закона Ньютона. Динамический эффект Хиггса–Киржница, в отличие от статического эффекта Хиггса, требует задать начальные данные уравнений, от которых сами уравнения не зависят, как было отмечено выше. Т.е. в теории возникают дополнительные параметры, нарушающие симметрию уравнений движения, подобно тому, как начальные данные в частных решениях уравнений Ньютона нарушают инвариантность этих решений относительно преобразований группы Галилея.

Обобщение стандартного эффекта Хиггса с помощью фундаментальных параметров на космологию ведет к ряду проблем, которые пытаются решить огромной первичной инфляцией [10]. Однако до сих пор никто не может построить самосогласованную динамическую модель, где огромная первичная инфляция сменяется медленной инфляцией, в  $10^{57}$  раз меньше первичной, которая находится в согласии с наблюдательными данными по Сверхновым [11–13].

В недавней работе [9] было предложено трактовать уравнение стандартного механизма Хиггса не как фундаментальный закон природы, а как дополнительное условие стабильности вакуума в соответствии с реальным смыслом механизма Хиггса в квантовой теории возмущения, о котором говорилось выше. В результате получаем уравнение для нулевой гармоники поля Хиггса: «ускорение равно нулю» ( $U = 0$ ). Это уравнение дополняется *начальными данными*. Такая квантовая интерпретация позволяет заменить потенциалы начальными данными и ведет к масштабной инвариантной симметрии законов природы.

Масштабная симметрия законов природы, как было указано выше, рассматривалась основателями современной физики и до сих пор рассматривается как принцип объединения гравитационных и электрослабых взаимодействий [3–7]. Масштабная симметрия уравнений космологической эволюции Вселенной может означать, что результат решения уравнений зависит от начальных данных и, следовательно, от эталонов измерения этих начальных данных.



## 2. Зависимость начальных данных от эталонов измерения

По поводу зависимости физических величин от эталонов измерения Максвелл писал во введении к «Трактату об электричестве и магнетизме»: «С математической точки зрения наиболее важным понятием при рассмотрении любого явления является понятие измеряемой величины. Поэтому я буду подходить к электрическим явлениям главным образом с точки зрения их измеримости, описывая методы измерения и определяя эталоны, от которых они зависят» [14, с.10].

В случае космологии есть всего две возможности такого выбора единиц измерения свободных начальных данных. Это абсолютные единицы, когда длины интервалов  $dl^2 = g_{ij}^{(3)} dx^i dx^j$  измеряются энергетической шкалой, и относительные единицы, когда подобное измеряется подобным, т.е. интервалы  $\tilde{dl}^2 = \tilde{g}_{ij}^{(3)} dx^i dx^j$  – интервалами, а энергии – энергиями. Обе эти возможности обсуждаются в книге А.А. Фридмана [4], посвященной космологии Вселенной, который связывает вторую возможность с принципом масштабной инвариантности законов природы<sup>1</sup>.

Масштабно-инвариантная теория гравитации, сохраняющая все достижения теории Эйнштейна в области небесной механики, была окончательно сформулирована Дираком в работе [5, с.403]: «...сформулирован новый принцип действия, который существ-

<sup>1</sup> А.А. Фридман в своей книге находит следующие замечательные слова о принципе масштабной инвариантности: «...переезжая из страны в страну, нам приходится изменять масштаб, т.е. мерить в России – аршинами, в Германии – метрами, в Англии – футами. Вообразим, что подобную перемену масштаба нам пришлось бы делать от точки к точке, тогда и получаем описанную выше операцию изменения масштаба. [Изменения масштаба в мире геометрическом будут, в физическом мире, отвечать различным способам измерения длины.] ... свойства мира делятся на два класса: одни не зависят от упомянутого изменения масштаба, лучше сказать не меняют свою форму ни при каких изменениях масштаба; другие будут при изменении масштаба менять свою форму. Условимся собственные свойства мира, принадлежащие к первому классу, называть масштабно-инвариантными. Вейль расширяет постулат инвариантности, добавляя к нему требования, чтобы все физические законы были масштабнo-инвариантными свойствами физического мира [3]. Сообразно такому расширению постулата инвариантности, приходится потребовать, чтобы и мировые уравнения выражались бы в форме, удовлетворяющей требованию не только координатной, но и масштабной инвариантности» [4, с.94].

венно *проце* принципа Вейля. Однако он *требуе*т в дополнении к метрике введения скалярной полевой функции для описания гравитационного поля». Введенное Дираком скалярное поле получило название дилатона [6, 7], что означает *расширение*, поскольку дилатон  $D$  выполняет роль логарифма космологического масштабного фактора. Разница со стандартной ОТО состоит в том, что дилатон в теории Дирака описывает *эволюцию масс частиц материи*, а не пространственных интервалов длин, как в стандартной космологии.

В теории гравитации Дирака физически *реальным* становится координатное расстояние до объекта  $\tilde{dl}^2 = \tilde{g}_{ij}^{(3)} dx^i dx^j$ , которое отличается от фридмановского на космологический масштабный фактор. В такой реальности в силу масштабной симметрии уравнений движения, как было отмечено выше, вместо космической эволюции длин имеем космическую эволюцию масс материи, которые эту масштабную симметрию нарушают. Другими словами, все длины и объем трехмерного пространства постоянны, а все массы, энергии и температуры умножаются на масштабный фактор. Соответствующая космологическая модель получила название *конформной космологии* [9, 15–19]. В этой космологии отсутствует космологическая сингулярность интервала.

Еще одним аргументом в пользу относительного эталона является резкое упрощение сценария эволюции Вселенной. Все астрофизические данные, включая последние данные по зависимости красного смещения спектра фотонов Сверхновых от их расстояния до Земли [11–13], в относительном эталоне могут быть описаны одним режимом инерциального движения Вселенной [15, 16]  $(1+z)^{-2} = 1 + 2H_0(\eta - \eta_0)$ , где  $\eta$  есть собственное (конформное) время фотона во Вселенной во фридмановском приближении однородного пространства  $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \approx (1+z)^{-2} \times [(d\eta)^2 - (dx^i)^2]$ , в то время как для описания тех же данных в абсолютном эталоне требуется сценарий с тремя режимами эволюции (быстрая инфляция, радиация и медленная инфляция) [10].



### 3. Квантовое рождение материи во Вселенной

В работах [9, 15–19] были даны теоретические и наблюдательные аргументы в пользу того, что число рожденных из вакуума первичных частиц достаточно для объяснения наблюдаемой материи во Вселенной, включая реликтовое излучение и барионную материю. Температура возникает и вычисляется из сечения столкновений и длины пробега первичных частиц [20–22]. Затем происходит распад этих частиц на фотоны реликтового излучения, которое наследует их температуру. Флуктуация температуры реликтового излучения отражает информацию о параметрах прямых взаимодействий первичных частиц и их массах. Эти массы совпадают с массами векторных  $W$ -,  $Z$ -бозонов и частиц Хиггса, что позволяет определить массу частиц Хиггса из наблюдательных данных по спектру флуктуаций температуры реликтового излучения [23] и в согласии с экспериментальными данными и теми ограничениями на эту массу, которые получены на земных ускорителях [9].

### 4. Ранняя Вселенная как фабрика частиц Хиггса

Наблюдательные данные по красному смещению  $1+z$  спектра атомов на Сверхновых в зависимости от их расстояния до Земли [11, 12] позволяют определить и зависимость размера видимой части Вселенной,  $r(z) = (1+z)^{-2} H_0^{-1} \approx (1+z)^{-2} \cdot 10^{29}$  мм, называемого горизонтом, от этого красного смещения  $1+z$ . Как было сказано выше, в конформной модели [15, 16] с относительным эталоном длины зависимость универсальна для всех эпох. Естественно предположить, что этот закон эволюции имел место и во время рождения первичных частиц и во время возникновения температуры реликтового излучения.

В тот момент, когда красное смещение равно  $1+z_i \approx 3 \cdot 10^{14}$  и средняя длина волны реликтового фотона, равная 1 мм, совпадает с размером Вселенной,  $r(z_i) \approx (1+z_i)^{-2} \cdot 10^{29}$  мм = 1 мм, исчезает само понятие температуры фотона.

Умножая среднюю энергию фотонов реликтового излучения  $T_0 = 2.35 \cdot 10^{-13}$  ГэВ на это критическое значение красного смеще-

ния,  $1+z_i \approx 3 \cdot 10^{14}$ , можно определить современные значения масс частиц,  $M = (T_0^3 / H_0)^{1/2} \sim 90$  ГэВ, распады которых дают энергию реликтовых фотонов в начале Вселенной. Эти массы по порядку величины находятся в области значений масс электрослабых бозонов:  $W$ -,  $Z$ -бозонов и частицы Хиггса.

Третий наблюдательный факт состоит в том, что момент возникновения реликтового излучения совпадает по порядку величины с моментом, когда комптоновский размер бозонов и частиц Хиггса становится порядка видимого размера Вселенной. Именно в этот момент, согласно принципу неопределенности, можно ввести понятия этих частиц, и в этот момент они рождаются из вакуума [9, 18]. Это совпадение момента возникновения температуры реликтового излучения с моментом рождения первичных частиц свидетельствует о том, что реликтовое излучение есть продукт распада электрослабых бозонов.

Температура реликтового излучения наследует температуру бозонов и дает информацию об их спектре. Наблюдатели [23–25] видят три пика в анизотропии температуры реликтового излучения с мультипольными моментами 220, 546 и 800. Относительная величина этих пиков (одна сотысячная) соответствует двухфотонным процессам распадов частиц Хиггса и столкновений  $W$ -,  $Z$ -бозонов, где излучаются фотоны, спектр которых запоминает информацию об электрослабых бозонах. Мультипольные моменты по их смыслу равны числу этих излучателей на линии видимого горизонта [9], длина которого определяется интервалом, пробегаемым фотоном с момента возникновения Вселенной,

Число излучателей равно отношению длины горизонта к размеру излучателя. Согласно данным по Сверхновым [11–13] длина горизонта пропорциональна в Конформной Космологии [15] квадрату массы, поэтому отношение длины горизонта к размеру излучателя (определяемого комптоновской длиной волны частицы-излучателя) пропорционально массе в кубе. Следовательно, кубические корни из мультипольных моментов 220, 546 и 800 отражают спектр масс тех частиц, которые участвуют в двухфотонных



процессах, формирующих указанные выше три пика в анизотропии температуры реликтового излучения, т.е. в распадах частиц Хиггса и столкновениях  $W$ - $Z$ -бозонов.

Из последовательности значений масс частиц можно сопоставить два последних пика с  $W$ - и  $Z$ -бозонами. Корень кубический из отношения мультипольных моментов двух последних пиков  $800/546$  дает отношение масс  $W$ - и  $Z$ -бозонов (1,136), что находится в согласии с тем же отношением масс  $W$ - и  $Z$ -бозонов (1,134), полученным на земных ускорителях. Первый пик дает прямой двухфотонный распад частицы Хиггса с массой  $(220/546)^{1/3} M_w = 118$  ГэВ именно в той области, которая разрешена экспериментами на ускорителях [2]. Это значение массы частицы Хиггса не противоречит наблюдательным данным по взрывам Сверхновых и спектру температуры реликтового излучения в конформной космологической модели с постулатом вакуума, который запрещает акустические возбуждения метрики с отрицательной энергией [17, 26, 27], используемые в стандартной космологической модели [10] для описания того же спектра температуры реликтового излучения.

#### Заключение

На первом этапе собирания фактов теория выглядит как ряд эвристических «озарений» о возможных уравнениях, приближениях и моделях. На втором этапе, который можно назвать «классификацией» фактов, эти эвристические уравнения, модели и приближения обосновываются принципами симметрии, которые включают в себя «масштабную симметрию законов природы».

Эта симметрия была предложена еще в 1918 г. Вейлем, о ней писал Фридман [4]. Такую же масштабно-инвариантную теорию гравитации, эквивалентную ОТО при описании явлений в Солнечной системе, сформулировал Дирак в 1973 г. [5]. Новыми фактами масштабно-инвариантной теории являются отделение дилатона и его нулевой гармоники как физической переменной, ответственной за возникновение и эволюцию Вселенной, статус преобразований группы Пуанкаре и

задание начальных данных. Теория представлений групп симметрий [28] дает возможность квантовать дилатонную эволюцию, формулировать  $S$ -матрицу и вычислять матричные элементы между физическими состояниями как представлениями групп Пуанкаре. В этом случае возникает объединение СМ и ОТО на квантовом уровне с конформной космологией, где Хаббловское красное смещение объясняется эволюцией масс частиц.

Еще в 1922–1924 гг. Фридман получил обе космологии: стандартную, где с наблюдаемым интервалом отождествляется интервал ОТО, и конформную, где с наблюдаемым интервалом отождествляется масштабно-инвариантный интервал Дирака. Мы можем сравнить два сценария и выбрать простейший из них, как это сделал в свое время Коперник. Напомним, что для Коперника критерием истины была простота траекторий движения планет. А для современного исследователя – это еще и принципы симметрии, типа масштабной или конформной симметрии уравнений движения. Мы показали здесь, что оба эти критерия почти однозначно ведут к конформной космологии, которая следует из теории гравитации Дирака.

Простота конформной космологии состоит в том, что в течение всех эпох космической эволюции роль темной энергии играет инерциальная кинетическая энергия нулевых гармоник скалярных полей. Эти эпохи включают: рождение электрослабых бозонов из вакуума и их распады, возникновение реликтового излучения как продукта распада первичных бозонов, образование адронов и ядер гелия, отделение излучения от вещества, эволюцию галактик и звезд в современную эпоху. Во все эти эпохи в плотности энергии Вселенной доминируют кинетические энергии нулевых гармоник скалярных полей с начальными данными, которые определяют все массы частиц в Стандартной Модели и скорость эволюции – параметр Хаббла, характерные для нашей Вселенной. Здесь дан обзор работ, где посредством этих свободных начальных данных, определенных из современных наблюдений, описывают рождение частиц материи из вакуума и их



космическую эволюцию в согласии с данными по физике высоких энергий и поиску частицы Хиггса на земных ускорителях [9].

Автор благодарен А.Б. Арбузову, Б.М. Барбашову, А. Боровец, А.Ф. Захарову за сотрудничество, Д. Блашке, К.А. Бронникову, Д.В. Гальцову, Ю.Г. Игнатъеву и В.Б. Приезжеву – за полезные дискуссии.

#### Список литературы

1. Higgs P.W. Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields // Phys. Lett. 1964. Vol.12. P.132.
2. Gunion J.F., Dawson S., Haber H.E., Kane G. The Higgs Hunter's Guide. Cambridge, MA: Perseus Publ., 2000.
3. Weyl H. Gravitation and Electricity // Sitz. Berichte d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften, 1918. P.465.
4. Фридман А.А. Мир как пространство и время. 2-е изд. М.: Наука, 1965. 111 с.
5. Dirac P.A.M. Long Range Forces and Broken Symmetries // Proc. Roy. Soc. London. A. 1973. Vol.333. P.403–418.
6. Pawłowski M., Papoian V.V., Pervushin V.N., Smirichinski V.I. Conformal unification of general relativity and standard model // Phys. Lett. B. 1998. Vol.444. P.293–298.
7. Kallosh R., Kofman L., Linde A., Van Proeyen A. Superconformal Symmetry, Supergravity and Cosmology // Class. Quant. Grav. 2000. Vol.17. P.4269–4338.
8. Куржниц Д.А. Модель Вайнберга и «горячая» Вселенная // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т.15. С.745–748.
9. Arbuzov A.B., Barbashov B.M., Borowiec A., Pervushin V.N., Shupalov S.A., Zakharov A.F. Is It Possible to Estimate the Higgs Mass from the CMB Power Spectrum? // Physics of Atomic Nuclei. 2009. Vol.72. P.744–751.
10. Giovannini M. Theoretical tools for CMB physics // Intern. J. Mod. Phys. D. 2005. Vol.14. P.363–510.
11. Riess A.G. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // Astron. J. 1998. Vol.116. P.1009–1038.
12. Perlmutter S. et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae // Astrophys. J. 1999. Vol.517. P.565–586.
13. Riess A.G. et al. Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution // Astrophys. J. 2004. Vol.607. P.665–687.
14. Максвелл Д. К. Трактат об электричестве и магнетизме: В 2 т. М.: Наука, 1989. Т.1.

15. Behnke D., Blaschke D., Pervushin V.N., Proskurin D. Description of Supernova Data in Conformal Cosmology without Cosmological Constant // Phys. Lett. B. 2002. Vol.530. P.20–26.
16. Барбашов Б.М., Первушин В.Н., Проскурин Д.В. Экскурсы в современную космологию // ЭЧАЯ. 2003. Т.34. С.138–189.
17. Barbashov B.M., Pervushin V.N., Zakharov A.F., Zinchuk V.A. Hamiltonian Cosmological Perturbation Theory // Phys. Lett. B. 2006. Vol.633. P.458–462.
18. Blaschke D.B., Vinitzky S.I., Gusev A.A., Pervushin V.N., Proskurin D.V. Cosmological Production of Vector Bosons and Cosmic Microwave Background Radiation // ЯФ. 2004. Vol.67. P.1074–1086.
19. Захаров А.Ф., Зинчук В.А., Первушин В.Н. Тетрадный формализм и системы отсчета в общей теории относительности // ЭЧАЯ. 2006. Vol.37. P.183–244.
20. Ignatyev Yu.G. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition // Gravitation and Cosmology. 2007. Vol.13. P.31–42.
21. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Kinetics of the nonequilibrium Universe. II. Kinetics of local thermodynamic equilibrium recovery // Gravitation and Cosmology. 2007. Vol.13. P.101–113.
22. Smolyansky S.A., Reichel A.V., Vinnik D.V., Schmidt S.M. Collision integrals in the kinetic of vacuum particle creation in strong fields // Proc. of the Conf. «Progress in Nonequilibrium Green's Functions», Dresden, Germany, 19–23 Aug. 2002 / Eds. M. Bonitz, D. Semkat. Singapur: World Scientific, 2003.
23. Spergel D.N. et al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters // Astrophys. J. Suppl. 2003. Vol.148. P.175–194.
24. Dunkley J. et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results // Astrophys. J. Suppl. 2009. Vol.180. P.306–329.
25. Hinshaw G. et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results // Astrophys. J. Suppl. 2009. Vol.180. P.225–245.
26. Dirac P.A.M. Generalized Hamiltonian Dynamics // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol.246. P.326–332.
27. Dirac P.A.M. Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation // Phys. Rev. 1959. Vol.114. P.924–930.
28. Волков М.К., Первушин В.Н. Существенно нелинейная теория поля, динамические симметрии и физика мезонов / Под ред. Д.И. Блохинцева. М.: Атомиздат, 1978.

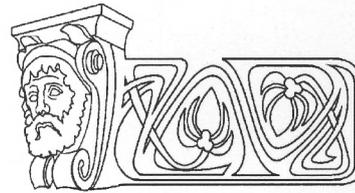


УДК 539.12.01

## СУПЕРРАСШИРЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЛАНДАУ

Е.А. Иванов

Объединенный институт ядерных исследований,  
лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Дубна  
E-mail: eivanov@theor.jinr.ru



Дан обзор недавних работ по суперрасширениям нерелятивистской квантовой заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле на плоскости  $R^2$  (модель Ландау), и частицы на сфере  $S^2: SU(2)/U(1)$  в поле монополя Дирака (модель Хэлдейна). Рассматриваются модели на суперсфере  $SU(2|1)/U(1|1)$ , суперфлаге  $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$  и их планарные пределы, исходя из геометрической интерпретации этих моделей и их бозонных прообразов как  $d=1$  аналогов нелинейных сигма моделей типа Весса–Зумино–Новикова–Виттена. При квантовании суперсимметричных моделей возникают состояния с отрицательной нормой, и для преодоления этой трудности необходимо вводить нетривиальную метрику на пространстве квантовых состояний. Характерной чертой планарных моделей является наличие у них скрытой динамической  $N=2$  суперсимметрии мировой линии.

**Ключевые слова:** суперсимметрия, нелинейная сигма модель, монополь Дирака.

### Superextensions of Landau Models

Е.А. Ivanov

The paper is a review of recent works on superextensions of the model of non-relativistic quantum charged particle moving in a homogeneous magnetic field on the plane  $R^2$  (Landau model), and a model of the particle in the field of Dirac monopole on the sphere  $S^2: SU(2)/U(1)$  (Haldane model). We consider the models on the supersphere  $SU(2|1)/U(1|1)$ , superflag  $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$  and their planar limits, based upon a geometric interpretation of these models and their bosonic prototypes as  $d=1$  analogs of nonlinear sigma models of the Wess–Zumino–Novikov–Witten type. While quantizing supersymmetric models, there arise states with the negative norms and, in order to overcome this difficulty, it proves necessary to introduce a non-trivial metrics on the Hilbert space of quantum states. A characteristic feature of the planar models is the presence of hidden dynamical  $N=2$  worldline supersymmetry.

**Key words:** supersymmetry, nonlinear sigma model, Dirac monopole.

### Введение

Модель Ландау [1] описывает заряженную частицу, движущуюся на плоскости под воздействием однородного магнитного поля, ортогонального к этой плоскости. Сферический вариант модели Ландау (модель Хэлдейна [2]) описывает заряженную частицу на сфере  $S^2: SU(2)/U(1)$  в поле монополя Дирака, помещённого в центр. Эти модели и их обобщения имеют много приложений. В частности, они составляют теоретическую основу квантового эффекта Холла [3].

Существует несколько подходов к построению суперсимметричных расширений моделей Ландау (см., например, [4]). В данном обзоре будут рассматриваться модели нерелятивистских частиц, движущихся на супермногообразиях, которые представляют собой расширение плоскости или двумерной сферы антикоммутирующими фермионными координатами. Одна из причин интереса к модели Ландау и её суперрасширениям состоит в том, что эти системы тесно связаны с некоммутативной (супер)геометрией: после квантования в них возникает взаимно-однозначное соответствие между низшими уровнями Ландау (НУЛ) и не(анти)коммутативными («fuzzy») (супер)многообразиями. Кроме того, модель Ландау и её суперрасширения можно интерпретировать как  $d=1$  аналоги двумерных сигма моделей Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ). Модели ВЗНВ имеют многочисленные приложения, в том числе и в теории струн.

Задачи Ландау на суперсфере  $SU(2|1)/U(1|1)$  размерности (2|2) и суперфлаге  $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$  размерности (2|4), т.е. минимальные суперрасширения модели Хэлдейна на  $S^2$ , были рассмотрены в работах [5–7] (см. также [7]). Также оказалось полезным изучить планарные пределы этих суперобобщений. Планарные модели могут быть получены из своих криволинейных аналогов устремлением к бесконечности радиуса сферы  $S^2$  (т.е. переходом к пределу контракции). Такие модели были построены и исследованы в [8, 9], а также в [10]. Согласно терминологии работ [8, 9], модель, возникающая как предел  $SU(2|1)/U(1|1)$ -модели, именуется моделью Ландау на суперплоскости, а модель, получаемая контракцией из  $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$ -модели, носит название модели Ландау на планарном суперфлаге.



Данная работа представляет собой обзор моделей Ландау с суперсимметрией в пространстве отображения [4–9] как простейших обобщений исходной модели Ландау. При обсуждении планарных моделей значительное внимание уделено присутствию в них скрытой  $N=2$  суперсимметрии мировой линии, что, по-видимому, является их общим свойством [9, 10]. Также обсуждается проблема состояний с отрицательной нормой [8] в квантовых суперсимметричных моделях Ландау; показано, что во всех случаях нормы можно сделать неотрицательными [9] за счёт введения нетривиальной метрики на пространстве состояний [11–14].

### 1. Модели Ландау: бозонный случай

Стандартная планарная модель Ландау описывается следующим лагранжианом:

$$L_b = |\dot{z}|^2 - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z) = |\dot{z}|^2 + (A_z \dot{z} + A_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}). \quad (1.1)$$

Здесь  $z(t), \bar{z}(t)$  – комплексные координаты 2-мерной евклидовой плоскости,  $2\kappa$  – напряжённость внешнего однородного магнитного поля,

$$\begin{aligned} A_z &= -i\kappa \bar{z}, \quad A_{\bar{z}} = i\kappa z, \\ \partial_{\bar{z}} A_z - \partial_z A_{\bar{z}} &= -2i\kappa. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Второе слагаемое в (1.1) – простейший  $d=1$  член Весса–Зумино (ВЗ).

Соответствующий канонический гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) = a^\dagger a + \kappa, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a &= i(\partial_{\bar{z}} + \kappa z), \\ a^\dagger &= i(\partial_z - \kappa \bar{z}), \\ [a, a^\dagger] &= 2\kappa. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Он коммутирует со следующими операторами:

$$\begin{aligned} P_z &= -i(\partial_z + \kappa \bar{z}), \quad P_{\bar{z}} = -i(\partial_{\bar{z}} - \kappa z), \\ [P_z, P_{\bar{z}}] &= 2\kappa, \quad F_b = z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}, \\ [H, P_z] &= [H, P_{\bar{z}}] = [H, F_b] = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, эти операторы определяют инвариантности данной теории [15]:  $P_z, P_{\bar{z}}$  и  $F_b$  генерируют соответственно «магнитные трансляции» и вращения в  $2D$ -мер-

ном «пространстве отображения». Эти генераторы – квантовые аналоги негётеровских зарядов, связанных с инвариантностью относительно трансляций,  $z' = z + a$ ,  $\bar{z}' = \bar{z} + \bar{a}$ , и  $U(1)$  вращений,  $z' = e^{i\alpha} z$ ,  $\bar{z}' = e^{-i\alpha} \bar{z}$ .

Волновая функция, соответствующая низшему уровню Ландау (НУЛ),  $H\Psi_{(0)} = \kappa\Psi_{(0)}$ , определяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned} a\Psi_{(0)}(z, \bar{z}) = 0 &\Leftrightarrow (\partial_{\bar{z}} + \kappa z)\Psi_{(0)} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \Psi_{(0)} = e^{-\kappa|z|^2} \psi_{(0)}(z), \end{aligned} \quad (1.6)$$

т.е. она сводится к голоморфной функции.

Волновая функция, отвечающая  $\ell$ -му УЛ ( $\ell = 1, 2, \dots$ ), строится следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{(\ell)}(z, \bar{z}) &= [i(\partial_z - \kappa \bar{z})]^\ell e^{-\kappa|z|^2} \psi_{(\ell)}(z), \\ H\Psi_{(\ell)} &= \kappa(2\ell + 1)\Psi_{(\ell)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

т.е. также сводится к голоморфной функции. Каждый УЛ имеет бесконечное вырождение из-за  $(P_z, P_{\bar{z}})$  инвариантности. Соответствующие волновые функции образуют бесконечномерные представления этой группы с базисом  $z^m, m > 0$  [14].

Инвариантная норма определяется как интеграл

$$\begin{aligned} \|\Psi_{(\ell)}\|^2 &= \int dz d\bar{z} \bar{\Psi}_{(\ell)}(z, \bar{z}) \Psi_{(\ell)}(z, \bar{z}) : \\ &: \int dz d\bar{z} e^{-2\kappa|z|^2} \bar{\psi}_{(\ell)}(\bar{z}) \psi_{(\ell)}(z) < \infty. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Он сходится для любого монома  $\psi_{(\ell)}(z) \sim z^m$ .

Покажем теперь, что модель Ландау можно интерпретировать как  $d=1$  аналог модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена. Будем считать  $2\kappa$  в  $[P_z, P_{\bar{z}}] = 2\kappa$  независимым генератором («центральным зарядом») и построим нелинейную реализацию этой неабелевой группы магнитных трансляций в фактор-пространстве по одномерной подгруппе, порождаемой  $2\kappa$ . Выбирая экспоненциальную параметризацию для соответствующих элементов фактор-пространства, получаем:

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= e^{i(zP_z + \bar{z}P_{\bar{z}})}, \\ g^{-1}dg &= i\omega_z P_z + i\omega_{\bar{z}} P_{\bar{z}} + i\omega_\kappa 2\kappa, \\ \omega_z &= dz, \quad \omega_{\bar{z}} = d\bar{z}, \quad \omega_\kappa = \frac{1}{2i}(z d\bar{z} - \bar{z} dz). \end{aligned} \quad (1.9)$$



Видно, что ВЗ член в  $L_b$  есть не что иное, как 1-форма Картана, связанная с генератором  $2\kappa$ . Операторы рождения и уничтожения  $a^\dagger$  и  $a$  приобретают геометрический смысл ковариантных производных

$$\nabla_z = \partial_z - \kappa \bar{z}, \quad \nabla_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} + \kappa z, \quad (1.10)$$

в то время как волновая функция, отвечающая НУЛ, задаётся ковариантным условием Коши-Римана

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{z}} \Psi_{(0)} &= 0, \\ \Psi_{(\ell)}'(z', \bar{z}') &= e^{-\kappa(az - a\bar{z})} \Psi_{(\ell)}(z, \bar{z}), \quad (1.11) \\ z' &= z + a, \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{a}. \end{aligned}$$

Всё это допускает прямое обобщение на сферу  $S^2$ . Сферический аналог планарного лагранжиана Ландау  $L_b$  (т.е. лагранжиан модели Хэлдейна) записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L}_b &= \frac{1}{(1+r^2|z|^2)^2} |\dot{z}|^2 - \\ &- is \frac{1}{1+r^2|z|^2} (\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Первое слагаемое в (1.12) –  $d=1$  проекция инвариантного интервала на  $S^2$ , второе слагаемое –  $d=1$  ВЗ член на фактор-пространстве  $S^2:SU(2)/U(1)$ ,  $r$  – «обратный» радиус  $S^2$ . Для простоты мы положим в дальнейшем  $r=1$ .

Квантовый гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}(1+|z|^2)\{\nabla_z, \nabla_{\bar{z}}\}, \quad (1.13)$$

где

$$\nabla_z = \partial_z - s \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad \nabla_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} + s \frac{z}{1+z\bar{z}}. \quad (1.14)$$

После квантования унитарные волновые функции на каждом УЛ ( $\ell=0,1,2,\dots$ ) образуют конечномерные неприводимые представления группы  $SU(2)$  со «спинами»  $s, s+1/2, s+1, \dots$ . Таким образом, каждый  $\ell$ -й УЛ имеет конечное вырождение  $(2s+1+\ell)$  (в этом состоит важное отличие от планарного случая и связано оно с тем фактом, что  $SU(2)$  является компактной группой, в то время как её контракция, группа магнитных трансляций, некомпактна). Волновая функция НУЛ определяется ковариантным условием аналитичности на  $S^2$

$$\nabla_{\bar{z}} \Psi_{(0)} = 0. \quad (1.15)$$

Можно показать, что эта волновая функция сводится к голоморфной функции от  $z$ , компоненты которой образуют неприводимый  $SU(2)$  мультиплет со спином  $s$ . Волновые функции, отвечающие высшим УЛ, строятся подобно планарному случаю и выражаются через голоморфные функции, описывающие неприводимые  $SU(2)$  мультиплеты со спинами  $s+1/2, s+1, \dots$

Как в планарном, так и в  $S^2$  случаях, разность энергий НУЛ и первого УЛ стремится к бесконечности с ростом параметров  $\kappa$  или  $s$ . В этом пределе выживает только НУЛ, который описывается ВЗ членом. Из-за того что ВЗ член имеет первый порядок по производной по времени, в теории с лагранжианом, в котором есть только ВЗ член, канонический гамильтониан равен нулю, и возникают связи второго рода. Соответствующие операторы координат, коммутирующие с гамильтониоными связями, параметризуют некоммутативные многообразия. В  $S^2$  случае возникает некоммутативная («fuzzy») версия 2-сферы [16].

Чтобы это показать, рассмотрим только ВЗ член в (1.12) (с  $r=1$ ). Гамильтонионые связи имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= p + is \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \approx 0, \\ \bar{\varphi} &= \bar{p} - is \frac{z}{1+z\bar{z}} \approx 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При квантовании по Гупта-Блейлеру (равным образом можно было бы использовать и квантование по Дираку) связи  $\bar{\varphi} \approx 0$  интерпретируются как связи первого рода и накладываются на комплексные вектора состояния

$$\hat{\bar{\varphi}} |\Psi\rangle_{phys} = 0, \quad (1.17)$$

где после квантования ( $p \rightarrow -i\partial/\partial z, \bar{p} \rightarrow -i\partial/\partial \bar{z}$ )

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= -i \left( \frac{\partial}{\partial z} - s \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right), \\ \hat{\bar{\varphi}} &= -i \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + s \frac{z}{1+z\bar{z}} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Условие (1.17) есть определение подпространства физических состояний. Решением (1.17) с учётом (1.18) является представление

$$\Psi_s(z, \bar{z}) = (1+z\bar{z})^{-s} \Phi_s(z). \quad (1.19)$$



Голоморфная волновая функция  $\Phi_s(z)$  не произвольна. Стандартное требование, что физические состояния нормализуемы, означает, что  $SU(2)$ -инвариантная норма полной волновой функции  $\Psi_s(z, \bar{z})$  должна быть конечной

$$\begin{aligned} \|\Psi_s\|^2 &= \int d\mu |\Psi_s|^2 = \\ &= \int dzd\bar{z} \frac{|\Phi_s(z)|^2}{(1+z\bar{z})^{2(1+s)}} < \infty. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Здесь

$$d\mu = \frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2}$$

– стандартная мера интегрирования на 2-сфере  $S^2:SU(2)/U(1)$  в параметризации стереографической проекции. Тогда условие (1.20) требует, чтобы функция  $\Phi_s(z)$  была полиномом степени не выше  $2s$ . Коэффициенты такого полинома для любого фиксированного  $s$  (число этих коэффициентов равно, очевидно,  $2s+1$ ) образуют неприводимый  $SU(2)$  мультиплет со спином  $s$ .

Обычные координаты на сфере, т.е.  $z, \bar{z}$ , не коммутируют с оператором  $\hat{\varphi}$ , определённым в (1.18) и выделяющим физическое подпространство в полном гильбертовом пространстве в соответствии с условием (1.17). Модифицированные операторы положения  $Z, \bar{Z}$ , сохраняющие условие (1.17) при действии на физические вектора состояния, однозначно определяются из требования коммутативности с  $\hat{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} Z &= z - \frac{1}{s} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \bar{Z} &= \bar{z} + \frac{1}{s} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

На аналитических функциях  $\Phi_s(z)$  эти операторы принимают вид

$$\begin{aligned} Z &\Rightarrow u = \frac{1}{s} z \left( 2s - z \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \bar{Z} &\Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

из которого следует, что они переводят полиномы степени  $2s$  по  $z$  в полиномы той же степени, т.е. сохраняют подпространство физи-

ческих состояний. Коммутатор модифицированных координатных операторов равен

$$\begin{aligned} [Z, \bar{Z}] &= \frac{2}{s^2} \left( z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2s \right), \\ [u, \bar{u}] &= \frac{2}{s^2} \left( z \frac{\partial}{\partial z} - 2s \right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где в правых частях стоят две эквивалентные формы генератора  $U(1)$  преобразований. Таким образом, вместе с  $U(1)$  генератором координатные операторы  $Z, \bar{Z}$  или  $u, \bar{u}$  образуют алгебру группы  $SU(2)$ , т.е. они параметризуют некоммутативное многообразие. Это многообразие есть не что иное, как «размытая» («fuzzy») сфера. На пространстве компонент волновой функции  $\Phi_s(z)$  эти координаты представляются  $(2s+1)/(2s+1)$  матрицами, пропорциональными понижающему и повышающему генераторам группы  $SU(2)$  с коэффициентом пропорциональности  $1/s$  (параметр  $2s$  называется «уровнем размытости»).

После перенормировки  $(Z, \bar{Z}) \rightarrow \sqrt{\frac{\kappa}{s}} (Z, \bar{Z})$  и перехода к «квазиклассическому» пределу  $s \rightarrow \infty$  (пределу контракции) «размытая» сфера превращается в некоммутативную плоскость.

## 2. Пример: фермионный аналог модели Ландау

Под суперсимметричными моделями Ландау понимаются квантово-механические модели заряженной частицы на однородном суперпространстве с добавленными ферми-полями, такие, что в бозонном пределе они сводятся либо к исходной модели Ландау для заряженной частицы, движущейся на плоскости в однородном магнитном поле, либо к её сферической версии. Есть две возможности суперсимметризации: (i) добавлением к бозонным координатам их нечётных партнёров по суперсимметрии на мировой линии, т.е. переходом к  $d=1$  супермультиплетам; (ii) введением суперсимметрии в пространстве отображения и трактовкой дополнительных фермионных полей как грассмановых координат, расширяющих исходное бозонное многообразие до некоторого суперпространства. Модели первого типа отвечают той или иной версии суперсимметричной квантовой



механики [17] (см., например, [18]). Мы будем рассматривать модели второго типа. В этом случае фермионные поля имеют ясный геометрический смысл: в планарных моделях это нечётные координаты, расширяющие 2-мерную плоскость до (2|2) или (2|4)-мерных суперплоскостей, а в моделях, связанных с супергруппой  $SU(2|1)$ , это координаты, дополняющие сферу  $S^2:SU(2)/U(1)$  до некоторых однородных супермногообразий полной супергруппы.

Примечательно, что две планарные суперсимметричные модели Ландау, построенные с привлечением второго подхода (см. разделы 3 и 6), вдобавок обладают ещё и скрытой  $N=2$  суперсимметрией на мировой линии.

Мы начнём с простейшего примера «фермионной модели Ландау», в которой бозонные  $2D$  координаты  $z, \bar{z}$  исходной модели Ландау заменены фермионными координатами  $\zeta, \bar{\zeta}$ .

Соответствующие лагранжиан и гамильтониан записываются в виде

$$L_f = \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}} - i\kappa(\dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta), \quad (2.1)$$

$$H_f = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha^\dagger] = -\alpha^\dagger\alpha - \kappa,$$

$$\alpha = \partial_\zeta - \kappa\bar{\zeta},$$

$$\alpha^\dagger = \partial_{\bar{\zeta}} - \kappa\zeta, \quad (2.2)$$

$$\{\alpha, \alpha^\dagger\} = -2\kappa.$$

Инвариантностям отвечают генераторы «магнитных супертрансляций»  $\Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}$  и  $U(1)$  поворотов  $F_f$ , где

$$\Pi_\zeta = \partial_\zeta + \kappa\bar{\zeta}, \quad \Pi_{\bar{\zeta}} = \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa\zeta, \quad (2.3)$$

$$F_f = \zeta\partial_\zeta - \bar{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}}, \quad \{\Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}\} = 2\kappa.$$

Нетрудно проверить, что действительно

$$[H_f, \Pi_\zeta] = [H_f, \Pi_{\bar{\zeta}}] = [H_f, F_f] = 0. \quad (2.4)$$

Супералгебра (2.3) есть простейший пример суперрасширения абелевой алгебры  $u(1)$ , супералгебра  $u(1|1)$ . Рассматривая  $2\kappa$  как независимый  $u(1)$  генератор, лагранжиан (2.1) можно интерпретировать как лагранжиан  $d=1$  сигма модели на однородном пространстве  $U(1|1)/[U(1)\times U(1)]$ , в котором  $\zeta, \bar{\zeta}$  играют роль косетных координат, связанных с фер-

мионными генераторами  $\Pi_\zeta$  и  $\Pi_{\bar{\zeta}}$ , а ВЗ-член – пулбэк 1-формы Картана при  $U(1)$  генераторе  $2\kappa$ .

Квантовое «гильбертово пространство» модели включает основное состояние и единственное возбуждённое состояние:

$$\psi^{(0)} = e^{-\kappa\zeta\bar{\zeta}} \psi_0(\zeta), \quad \psi^{(1)} = e^{\kappa\zeta\bar{\zeta}} \psi_1(\bar{\zeta}),$$

$$\alpha\psi^{(0)} = \alpha^\dagger\psi^{(1)} = 0, \quad (2.5)$$

$$\psi_0 = A_0 + \zeta B_0, \quad \psi_1 = A_1 + \bar{\zeta} B_1.$$

Пары  $(A_0, B_0), (A_1, B_1)$  образуют неприводимые мультиплеты группы магнитных супертрансляций, с энергиями  $-\kappa$  и  $\kappa$ .

Уже на этом примере обнаруживается проблема, характерная для рассматриваемого типа суперрасширений модели Ландау. Это появление «духов», т.е. состояний с отрицательной нормой.

При естественном определении внутреннего произведения,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d\zeta d\bar{\zeta} \overline{\phi(\zeta, \bar{\zeta})} \psi(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (2.6)$$

находим:

$$\langle \psi^{(0)} | \psi^{(1)} \rangle = 0,$$

$$\langle \psi^{(0)} | \psi^{(0)} \rangle = 2\kappa \bar{A}_0 A_0 + \bar{B}_0 B_0, \quad (2.7)$$

$$\langle \psi^{(1)} | \psi^{(1)} \rangle = -2\kappa \bar{A}_1 A_1 - \bar{B}_1 B_1.$$

Состояния  $A_1, B_1$  обладают отрицательной нормой, т.е. они – духи. Их присутствие может приводить к нарушению унитарности<sup>1</sup>.

В данном случае эта трудность преодолевается за счёт введения нетривиальной метрики на «гильбертовом пространстве»:

$$\langle\langle \phi | \psi \rangle\rangle = \langle G\phi | \psi \rangle,$$

$$G(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}) = \psi^{(0)} - \psi^{(1)}, \quad (2.8)$$

$$G = -\kappa^{-1} H_f.$$

При этом генераторы симметрий  $\Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}$  и  $F_f$  коммутируют с метрикой  $G$ , так что новое внутреннее произведение остаётся инвариантным. Однако свойства эрмитова сопряжения операторов, которые не коммутируют с  $G$ , изменяются, например:

<sup>1</sup> Появление духов в  $d=1$  суперсимметричных моделях с кинетическими членами второго порядка для фермионов было отмечено в [18]. Обсуждение проблемы духов в суперсимметричной квантовой механике с высшими производными содержится в работах [19, 20].



$$\alpha^\dagger = -\alpha^\dagger \Rightarrow H_f = \alpha^\dagger \alpha - \kappa, \\ \{\alpha, \alpha^\dagger\} = 2\kappa.$$

Пусть в общем случае  $O$  – оператор, такой, что  $[H, O] = 0$ . Тогда  $O^\dagger = GO^\dagger G = O^\dagger + GO_G^\dagger$ ,  $O_G = [G, O]$ , и  $[H, O_G] = 0$ . Таким образом, по генераторам, коммутирующим с гамильтонианом, но не коммутирующим с  $G$ , можно восстанавливать «скрытые» симметрии.

На этом мы закончим обсуждение упрощённой модели и перейдём к более содержательным примерам.

### 3. Модель Ландау на суперплоскости

Модель Ландау на суперплоскости описывается следующим лагранжианом:

$$L = L_f + L_b = \\ = |\dot{z}|^2 + \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}} - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z + \dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta). \quad (3.1)$$

Соответствующий квантовый гамильтониан даётся выражением

$$H = a^\dagger a - \alpha^\dagger \alpha = \partial_{\zeta} \bar{\partial}_{\bar{\zeta}} - \partial_z \bar{\partial}_{\bar{z}} + \\ + \kappa(\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \zeta\bar{\partial}_{\bar{\zeta}} - z\partial_z - \zeta\bar{\partial}_{\zeta}) + \\ + \kappa^2(\bar{z}\bar{z} + \zeta\bar{\zeta}). \quad (3.2)$$

Полный набор симметрий, помимо тех, которые порождаются генераторами  $P_z, P_{\bar{z}}$  и  $\Pi_{\zeta}, \Pi_{\bar{\zeta}}$ , включает также новые симметрии с генераторами

$$Q = z\partial_{\zeta} - \bar{\zeta}\bar{\partial}_{\bar{z}}, Q^\dagger = \bar{z}\partial_{\bar{\zeta}} + \zeta\partial_z, \\ C = F_b + F_f = z\partial_z + \zeta\bar{\partial}_{\bar{\zeta}} - \bar{z}\partial_{\bar{z}} - \bar{\zeta}\partial_{\zeta}, \quad (3.3)$$

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = [H, C] = 0. \quad (3.4)$$

Эти генераторы образуют супералгебру  $ISU(1|1)$ , которая представляет собой контр-акцию полупростой супералгебры  $SU(2|1)$ ,

$$\{Q, Q^\dagger\} = C, [C, Q] = [C, Q^\dagger] = 0, \\ [Q, P_z] = iP_{\zeta}, \{Q^\dagger, \Pi_{\bar{\zeta}}\} = iP_{\bar{z}}. \quad (3.5)$$

Как обычно, предполагается, что волновая функция НУЛ  $\psi^{(0)}$  исчезает под действием операторов уничтожения  $a$  и  $\alpha$ :

$$(\partial_z + \kappa z)\psi^{(0)} = (\partial_{\bar{\zeta}} - \kappa\bar{\zeta})\psi^{(0)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi^{(0)} = e^{-\kappa K_2} \psi_{an}^{(0)}(z, \zeta), \quad (3.6) \\ K_2 = |z|^2 + \zeta\bar{\zeta}, \quad H\psi^{(0)} = 0.$$

Таким образом, эта волновая функция обладает дополнительным двукратным вырождением,  $\psi_{an}^{(0)}(z, \zeta) = A^{(0)}(z) + \zeta B^{(0)}(z)$ .

Гильбертово пространство для  $\ell$ -го УЛ представляется волновой функцией

$$\psi^{(\ell)} : (a^\dagger)^\ell e^{-\kappa K_2} \psi_+^{(\ell)}(z, \zeta) + \\ + (a^\dagger)^{\ell-1} \alpha^\dagger e^{-\kappa K_2} \psi_-^{(\ell)}(z, \zeta), \quad (3.7) \\ H\psi^{(\ell)} = 2\kappa\ell\psi^{(\ell)},$$

где  $\psi_{\pm}^{(\ell)}(z, \zeta) = A_{\pm}^{(\ell)}(z) + \zeta B_{\pm}^{(\ell)}(z)$ . Каждый УЛ с  $\ell > 0$  четырёхкратно вырожден.

Естественное  $ISU(1|1)$ -инвариантное внутреннее произведение,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d\mu \overline{\phi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})} \psi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}), \quad (3.8) \\ d\mu = dzd\bar{z}d\zeta d\bar{\zeta},$$

приводит к отрицательным нормам для некоторых состояний, как и в фермионной модели. Однако все нормы можно сделать неотрицательными путём введения той же самой операторной метрики на гильбертовом пространстве

$$G = -\kappa^{-1}H_f = \\ = \frac{1}{\kappa} [\partial_{\zeta} \bar{\partial}_{\bar{\zeta}} + \kappa^2 \bar{\zeta}\zeta + \kappa(\zeta\partial_{\zeta} - \bar{\zeta}\bar{\partial}_{\bar{\zeta}})]. \quad (3.9)$$

Метрика  $G$  коммутирует с генераторами всех симметрий, за исключением  $Q$  и  $Q^\dagger$ . Следовательно, по отношению к новому произведению  $\langle G\phi | \psi \rangle$  оператор, сопряжённый к  $Q$ , не совпадает с  $Q^\dagger$ . Новый сопряжённый оператор  $Q^\dagger$  легко вычисляется:

$$Q^\dagger = Q^\dagger - \frac{i}{\kappa} S, \quad (3.10) \\ S = i(\partial_z \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa^2 \bar{z}\bar{\zeta} - \bar{z}\bar{z}\partial_{\bar{\zeta}} - \kappa\zeta\partial_z).$$

Поскольку  $Q$  и  $Q^\dagger$  коммутируют с полным гамильтонианом  $H$  (так как  $[H, G] = 0$ ), их разность  $S$  также коммутирует,  $[H, S] = [H, S^\dagger] = 0$ . Таким образом, операторы  $S$  и



$S^\dagger$  генерируют новую (скрытую) симметрию модели.

Эти операторы можно записать в виде

$$S = a^\dagger \alpha, \quad S^\dagger = a \alpha^\dagger. \quad (3.11)$$

Теперь легко проверить, что они удовлетворяют (анти)коммутиационным соотношениям:

$$[H, S] = [H, S^\dagger] = 0, \quad \{S, S^\dagger\} = 2\kappa H, \quad (3.12)$$

$$\{S, S\} = 0 = \{S^\dagger, S^\dagger\}.$$

Иными словами,  $(2\kappa)^{-1/2} S$ ,  $(2\kappa)^{-1/2} S^\dagger$  и  $H$  образуют  $N = 2, d = 1$  супералгебру Пуанкаре.

Генераторы  $S, S^\dagger$  аннигилируют основное состояние, соответствующее НУЛ,

$$S\psi^{(0)} = S^\dagger\psi^{(0)} = 0, \quad (3.13)$$

поэтому это состояние есть синглет  $N = 2$  суперсимметрии. Следовательно,  $N = 2$  суперсимметрия не нарушена, и волновые функции, отвечающие высшим УЛ, образуют её неприводимые мультиплеты. Каждое такое состояние состоит из двух неприводимых мультиплетов супергруппы  $ISU(1|1)$ , чем объясняется четырёхкратное вырождение УЛ с  $\ell > 0$ .

На классическом уровне скрытая суперсимметрия мировой линии реализуется следующими преобразованиями полей  $z, \zeta$  и сопряжённых к ним

$$\delta z = \varepsilon \zeta, \quad \delta \zeta = -z \bar{\varepsilon}. \quad (3.14)$$

На массовой поверхности они замыкаются на производную полей по времени с учётом уравнений движения  $\dot{z} = 2i\kappa z \dot{\zeta}$ ,  $\dot{\zeta} = 2i\kappa \dot{z}$ . Рассматриваемая  $N = 2$  суперсимметрия необычна тем, что она существует только при  $\kappa \neq 0$ , т.е. представляет собой род динамической суперсимметрии.

Как показано в [4], эту реализацию можно воспроизвести в рамках явно  $N = 2$  суперсимметричного суперполевого подхода вне массовой оболочки.

#### 4. Модель Ландау на суперфлаге

Модель Ландау на суперфлаге [6] описывает движение заряженной нерелятивистской частицы на супермногообразии  $SU(2|1)/[U(1) \times U(1)]$  («суперфлаге»). Комплексные координаты на этом многообразии можно выбрать следующим образом:

$$Z^M = z, \xi^i, \quad Z_M = \bar{z}, \bar{\xi}_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

Здесь  $z, \bar{z}$  – координаты сферы  $S^2: SU(2)/U(1)$  в параметризации стереографической проекции, т.е.  $z$  параметризуют комплексное проективное пространство  $CP^{(1)}: \{z\}$ . Спинорные координаты  $\xi^i$  достраивают это бозонное многообразие до супермногообразия  $CP^{(1|2)}: \{Z_M\}$ . Соответственно супергруппа  $SU(2)$  реализуется на таких координатах голоморфными преобразованиями

$$\delta z = a + \bar{a} z^2 - (\bar{\varepsilon}_2 + z \bar{\varepsilon}_1)(\xi^1 - z \xi^2),$$

$$\delta \xi^1 = a \xi^2 + \varepsilon^1 + (\bar{\varepsilon} \cdot \zeta) \zeta^1, \quad (4.2)$$

$$\delta \xi^2 = -\bar{a} \xi^1 + \varepsilon^2 + (\bar{\varepsilon} \cdot \xi) \xi^2.$$

Супералгебра  $su(2|1)$  содержит 4 бозонных генератора  $J_{(ik)}, F$  ( $i, k = 1, 2$ ), образующих подалгебру  $su(2) \oplus u(1)$  и  $SU(2)$  – дублет фермионных генераторов  $Q, \bar{Q}$ . Генераторы подчиняются следующим (анти)коммутиационным соотношениям:

$$\{Q_i, \bar{Q}_k\} = \varepsilon_{ik} F + J_{(ik)},$$

$$\{Q_i, Q_k\} = \{\bar{Q}_i, \bar{Q}_k\} = 0,$$

$$[J_{(ik)}, Q_l] = \frac{1}{2}(\varepsilon_{il} Q_k + \varepsilon_{kl} Q_i),$$

$$[J_{(ik)}, \bar{Q}_l] = \frac{1}{2}(\varepsilon_{il} \bar{Q}_k + \varepsilon_{kl} \bar{Q}_i), \quad (4.3)$$

$$[F, Q_i] = \frac{1}{2} Q_i, \quad [F, \bar{Q}_i] = -\frac{1}{2} \bar{Q}_i,$$

$$[J_{(ik)}, J_{(jl)}] = \varepsilon_{ij} J_{(kl)} + \varepsilon_{kl} J_{(ij)},$$

$$\bar{Q}^i = (Q_i)^\dagger.$$

Бозонные параметры  $a, \bar{a}$  в преобразованиях (4.2) связаны со взаимно-сопряжёнными генераторами  $J_{11}, J_{22}$ , принадлежащими факторпространству  $SU(2)/U(1)$ , а грассмановы параметры  $\varepsilon^i, \bar{\varepsilon}_k$  – с фермионными генераторами  $Q, \bar{Q}$ . Преобразования, соответствующие двум  $U(1)$  генераторам  $J_3: J_{(12)}$  и  $F$ , получают взаимным коммутированием преобразований (4.2). В дальнейшем вместо генератора  $F$ , коммутирующего с  $J_{(ik)}$ , часто будет использоваться специальная комбинация  $U(1)$  генераторов:

$$B = F - \frac{1}{2} J_3. \quad (4.4)$$



Динамика частицы, движущейся на супермногообразии  $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$ , с каноническими свободными членами у бозонов и фермионов (соответственно второго и первого порядков по производной по времени) описывается следующим лагранжианом:

$$L = \omega^+ \omega^- + NA + MB. \quad (4.5)$$

Здесь  $\omega^+$  и  $\omega^- = (\omega^+)^+ - d=1$ -проекции взаимосопряжённых бозонных 1-форм Картана на фактор-пространстве  $SU(2|1)/[U(1)\times U(1)]$ , два независимых ВЗ члена  $A$  и  $B$  – аналогичные проекции 1-форм связности, ассоциированных с генераторами  $J_3, B$ . Константы  $N$  и  $M$  подобны параметру  $s$  в (1.12). В бозонном пределе, когда фермионные координаты полагаются равными нулю, лагранжиан (4.5) переходит в (1.12). Явное выражение для (4.5) можно получить с помощью формул

$$\begin{aligned} \omega^+ &= z\omega + \xi^i \omega_i, \\ A &= [zA_z + \xi^i A_i] + c.c., \\ B &\equiv \xi^i B_i + c.c., \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= K_1^{-1/2} K_2^{-1}, \\ \omega_1 &= -K_1^{-3/2} K_2^{-1} (\bar{\xi}_2 + z\bar{\xi}_1), \\ \omega_2 &= K_1^{-3/2} K_2^{-1} z (\bar{\xi}_2 + z\bar{\xi}_1), \\ A_z &= -iK_2^{-1} [\bar{z} - \xi^2 (\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2)], \\ A_1 &= -iK_2^{-1} (\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2), \\ A_2 &= iK_2^{-1} z (\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2), \\ B_i &= -iK_1^{-1} \bar{\xi}_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

и

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 + \bar{\xi}_1 \xi^1 + \bar{\xi}_2 \xi^2, \\ K_2 &= 1 + \bar{z}z + (\xi^1 - z\xi^2)(\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Квантовый гамильтониан системы даёт-ся выражением

$$\hat{H} = H_N = -K_2^2 K_1 \nabla_z^{(N)} \nabla_{\bar{z}}^{(N)} + N, \quad (4.9)$$

где, как и в бозонной модели,  $2N = 2s$  – целое положительное число и

$$\nabla_z^{(N)} = \partial_z - iNA_z, \quad \nabla_{\bar{z}}^{(N)} = \partial_{\bar{z}} - iN\bar{A}_{\bar{z}}. \quad (4.10)$$

Благодаря тому, что все фермионы обладают кинетическими членами первого порядка по производной по времени, в теории возникают связи второго рода. При квантовании по Гупта–Блейлеру антиголоморфную поло-

вину этих связей следует накладывать на вектора состояния, выделяя тем самым подпространство физических волновых функций (ср. (1.17)):

$$\hat{\varphi}^i |\Psi\rangle = 0 \quad (i=1,2), \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^i &= \partial \partial \bar{\xi}_i - \omega^{-1} \bar{\omega}^i [\partial \partial \bar{z} + N \partial \ln K_2 \partial \bar{z}] + \\ &+ N \partial \ln K_2 \partial \bar{\xi}_i - M \partial \ln K_1 \partial \bar{\xi}_i. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Физические волновые суперфункции, полученные как решение уравнений (4.11), имеют вид

$$\Psi = K_1^M K_2^{-N} \Phi(z, \bar{z}_{sh}, \xi^1, \xi^2), \quad (4.13)$$

где  $\bar{z}_{sh}$  – «сдвинутая» координата:

$$\bar{z}_{sh} = z - (\xi^2 + \bar{z}\xi^1)(\bar{\xi}_1 - \bar{z}\bar{\xi}_2). \quad (4.14)$$

Гамильтониан (4.9) диагонализует-ся на следующем наборе физических собственных функций:

$$\begin{aligned} \Psi_N^{(\ell)} &= K_2^{-N} K_1^M \nabla_z^{2(N+1)} \dots \nabla_z^{2(N+\ell)} \times \\ &\times \Phi^{(N+\ell, M-\ell)}(z, \xi^i), \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\nabla_z^{2(N)} = \partial_z - 2(N)\bar{z}_{sh} 1 + z\bar{z}_{sh}. \quad (4.16)$$

Используя явный вид гамильтониана (4.9) в координатном базисе  $z, \bar{z}_{sh}$  и аналитичность редуцированной волновой функции  $\Phi^{(N+\ell, M-\ell)}(z, \xi^i)$  в (4.15), можно непосредственно проверить, что

$$\begin{aligned} \hat{H} \Psi_N^{(\ell)} &= [(2\ell + 1)N + \ell(\ell + 1)] \Psi_N^{(\ell)}, \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Соответствующее  $SU(2|1)$  инвариантное внутреннее произведение определяется как

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_N^{(\ell)} | \Psi_N^{(\ell)} \rangle = \\ &= 2\delta_{\ell, \ell'} \frac{(2N + \ell + 1)!}{(2N + 1)!} \int dz d\bar{z} (1 + z\bar{z})^{2(N+\ell+1)} \times \\ &\times \{ (M - \ell)(2M + 2N + \ell + 1) \bar{A}^1 A + \\ &+ 12 \bar{F}^1 F + (M - \ell) (\bar{\psi}^{-1} \psi_1 + \bar{\psi}^{-2} \psi_2) \} + \\ &+ \frac{N + \ell + 1}{1 + z\bar{z}} (\bar{\psi}^{-2} + \bar{z} \bar{\psi}^{-1}) \psi_2 + z \psi_1 \}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Поля  $A(z), F(z), \psi_i$  определяются  $\xi^i$ -разложением аналитического суперполя  $\Phi^{(N+\ell, M-\ell)}(z, \xi^i)$ :



$$\Phi^{(N+\ell, M-\ell 2)}(z, \xi^i) = A^{(N+\ell, M-\ell 2)} + \xi^i \Psi_i^{(N+\ell, M-\ell 2)} + \xi^1 \xi^2 F^{(N+\ell, M-\ell 2)} \quad (4.19)$$

(в (4.18) соответствующие индексы опущены).

Из этой формулы следует, что волновая функция, соответствующая  $\ell$ -му УЛ, имеет положительную норму при условии, что

$$M \geq \frac{\ell}{2}. \quad (4.20)$$

Поэтому при фиксированном  $M$  пространство физических состояний состоит из векторов, соответствующих

$$0 \leq \ell \leq 2[M], \quad (4.21)$$

где  $[M]$  означает целую часть. Иными словами, число УЛ в модели  $SU(2|1)/[U(1) \times U(1)]$ , в отличие от бозонной  $SU(2)/U(1)$  модели, конечно при естественном определении внутреннего произведения. Тем не менее, оказывается, что, как и в предыдущих случаях, можно переопределить внутреннее произведение без нарушения  $SU(2|1)$  инвариантности так, что при любом  $M$  норма волновой функции для любого УЛ будет положительной [13]. Доказательство этого утверждения является довольно сложным, поэтому приводить его здесь не будем. Продекларируем лишь результат.

Переопределим внутреннее произведение на суперфлаге следующим образом:

$$\langle\langle \Upsilon | \Psi \rangle\rangle = \langle \Upsilon | G \Psi \rangle \Rightarrow \| \Psi \|^2 = \langle \Psi | G \Psi \rangle,$$

где для  $-2N' - 1 < 2M < 0$

$$G_{an} = -1 + 2\xi \partial_\xi + \frac{2}{2N' + 2\ell + 1} \xi \partial_z \partial_\xi, \quad (4.22)$$

$$[H_{N'}, G_{an}] = 0, \quad G_{an}^2 = 1,$$

и для  $2M < -2N' - 1$

$$\tilde{G}_{an} = 1 - 8(F - 2M - N') + 8(F - 2M - N')^2.$$

Все состояния в этих интервалах обладают неотрицательной нормой по отношению к переопределённому внутреннему произведению<sup>2</sup>. Оператор  $G_{an}$  хорошо определён и при  $M = 0$ . Специфичность этой точки в пространстве параметров модели состоит в том, что в этом случае присутствуют состояния с нулевой нормой, поэтому физическое гиль-

бертово пространство следует определить как фактор по подпространству состояний с нулевыми нормами.

### 5. Модель Ландау на суперсфере

Под суперсферой  $CP^{(1|1)} \cong SU(2|1)/U(1)$  с  $U(1|1): (J_3, F, Q_2, \bar{Q}^2)$  понимается комплексное супермногообразие

$$Z^A = (Z^0, Z^1) = (z, \zeta), \\ \bar{Z}^{\bar{B}} = (\bar{Z}^0, \bar{Z}^1) = (\bar{z}, \bar{\zeta}),$$

где  $z$  – комплексная координата на  $CP^1: SU(2)/U(1)$  и  $\zeta$  – её грассманов партнёр. Супергруппа  $SU(2|1)$  реализована на этих координатах аналитическими преобразованиями

$$\delta z = i\lambda z + \varepsilon + \bar{\varepsilon} z^2 - (\bar{\varepsilon}_2 + z \bar{\varepsilon}_1) \zeta, \\ \delta \zeta = \frac{i}{2} (\lambda + \mu) \zeta + \varepsilon^1 - \varepsilon^2 z + \bar{\varepsilon} z \zeta. \quad (5.1)$$

Здесь  $\lambda, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, \mu$  – параметры инфинитезимальных  $U(2)$  преобразований и  $\varepsilon^i$  – грассмановы параметры преобразований с нечётными генераторами.

Суперсфера (СС) – естественное суперрасширение обычной 2-сферы  $S^2: SU(2)/U(1)$ . Это кэлерово супермногообразие, с кэлеровской 2-формой

$$F = 2i dZ^A \wedge d\bar{Z}^{\bar{B}} \partial_{\bar{B}} \partial_A K = dA,$$

где  $K = \log(1 + z\bar{z} + \zeta\bar{\zeta})$  – кэлеров суперпотенциал и  $A = -i(dZ^A \partial_A - d\bar{Z}^{\bar{B}} \partial_{\bar{B}})K \equiv dZ^A A_A + d\bar{Z}^{\bar{B}} A_{\bar{B}}$  – кэлерова связность.

Инвариантный лагранжиан модели Ландау на суперсфере  $CP^{(1|1)}$  является естественным обобщением лагранжиана  $S^2$  модели:

$$L = \dot{Z}^A \dot{\bar{Z}}^{\bar{B}} g_{\bar{B}A} + N(\dot{Z}^A A_A + \dot{\bar{Z}}^{\bar{B}} A_{\bar{B}}), \\ g_{z\bar{z}} = \frac{1 + \zeta\bar{\zeta}}{(1 + z\bar{z} + \zeta\bar{\zeta})^2}, \quad g_{\zeta\bar{\zeta}} = -\frac{z\bar{\zeta}}{(1 + z\bar{z})^2}, \\ g_{z\zeta} = \frac{\bar{\varepsilon}\zeta}{(1 + z\bar{z})^2}, \quad g_{\zeta\bar{z}} = \frac{1}{1 + z\bar{z}}. \quad (5.2)$$

Квантовый гамильтониан дается выражением

$$H = -(-1)^{a(a+b)} g^{A\bar{B}} \nabla_A^{(N)} \nabla_{\bar{B}}^{(N)}, \\ g^{A\bar{B}} g_{\bar{B}C} = \delta_B^A, \quad (5.3) \\ \nabla_A^{(N)} = \partial_A - N(\partial_A K), \\ \nabla_{\bar{B}}^{(N)} = \partial_{\bar{B}} + N(\partial_{\bar{B}} K).$$

<sup>2</sup> То же можно показать для  $M > 0$ .



Здесь  $a, b$  – грасмановы чётности, соответствующие индексам  $A$  и  $B$ .

Волновая функция  $\Psi_0^{(N)}(z, \bar{z})$ , отвечающая  $\ell = 0$  (т.е. НУЛ), является ковариантно-аналитической:

$$\begin{aligned} \nabla_A^{(N)} \Psi_0^{(N)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Psi_0^{(N)} &= e^{-NK} [A_0(z) + \zeta \psi_0(z)], \\ H \Psi_0^{(N)} &= 0. \end{aligned}$$

Волновые функции для  $\ell \geq 1$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_\ell^{(N)} &= \Psi_{(+)\ell}^{(N)} + \Psi_{(-)\ell}^{(N)}, \\ \Psi_{(+)\ell}^{(N)} &= \nabla_z^{(N+1)} \dots \nabla_z^{(N+2\ell-1)} \Phi_\ell^{(+)}, \\ \Psi_{(-)\ell}^{(N)} &= \\ &= \left[ \sum_{p=1}^{\ell} \nabla_z^{(N+1)} \dots \nabla_\zeta^{(N+2p-1)} \dots \nabla_z^{(N+2\ell-1)} \right] \Phi_\ell^{(-)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla_A^{(N)} \Phi_\ell^{(\pm)} &= 0 \Rightarrow \Phi_\ell^{(\pm)} = e^{-NK} \varphi_\ell^{(\pm)}(z, \zeta), \\ H \Psi_\ell^{(N)} &= \ell(\ell + 2N) \Psi_\ell^{(N)}. \end{aligned}$$

При естественном определении  $SU(2|1)$  инвариантного внутреннего произведения

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \Psi \rangle &= \int d\mu_0 e^{-K} \bar{\Omega}^* \Psi \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\Psi\|^2 &= \int d\mu_0 e^{-K} \Psi^* \Psi, \quad (5.5) \\ d\mu_0 &= dz d\bar{z} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \end{aligned}$$

волновые функции  $\Psi_\ell^{(N)}$  для разных  $\ell$  взаимно ортогональны. Норма волновой функции с фиксированным  $\ell$  выражается через поля в  $\zeta$ -разложениях

$$\varphi_\ell^{(-)} = A_\ell + \zeta \psi_\ell, \quad \varphi_\ell^{(+)} = \chi_\ell + \zeta F_\ell$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\Psi_\ell^{(N)}\|^2 &= \int \frac{dz d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^{2(N+\ell)+1}} [-\ell(2N+\ell) |A_\ell|^2 - \\ &- |-\ell \bar{\psi}_\ell \psi_\ell - \ell(\bar{\chi}_\ell + \bar{z} \bar{\psi}_\ell)(\chi_\ell + z \psi_\ell) + \\ &+ \frac{2(N+\ell)+1}{1+z\bar{z}} \bar{\chi}_\ell \chi_\ell + |F_\ell|^2]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Видно, что «естественная» норма не является положительно определённой, т.е. мы сталкиваемся с тем же явлением, что и в простейшей фермионной модели Ландау и в модели на суперфлаге. Поэтому есть опасность того, что соответствующая квантовая теория не-

унитарна. Однако, как и в предыдущих случаях, можно ввести метрический оператор на гильбертовом пространстве состояний, такой, что все нормы становятся неотрицательными по отношению к переопределённому внутреннему произведению. Этот оператор можно найти, исходя из того замечательного свойства, что квантовая модель Ландау на суперсфере при фиксированном параметре  $N$  оказывается эквивалентной квантовой модели на суперфлаге при  $M=0$  и  $N'=N-1/2$ . Доказательство дано в [14]. Эта эквивалентность видна уже из сравнения норм (4.18) и (5.6). Метрический оператор для суперсферы можно получить из (4.22), выбирая там подходящие значения параметров.

### 6. Модель планарного суперфлага

Здесь мы рассмотрим специфические черты ещё одной  $ISU(1|1)$  инвариантной модели, обобщающей модель Ландау: модели Ландау на планарном суперфлаге [8].

В планарном пределе, когда  $SU(2|1)$  переходит в  $ISU(1|1)$  и  $S^2$  – в евклидову 2-плоскость, лагранжиан (4.5) переходит в следующий лагранжиан [8]:

$$\begin{aligned} L &= (1 + \bar{\xi} \xi) |\dot{z}|^2 + (\bar{\xi} \dot{z} \dot{\zeta} - \dot{\xi} z \dot{\zeta}) + \\ &+ \bar{\xi} \xi \dot{\zeta} \dot{\bar{\zeta}} - i z (\dot{z} \dot{\bar{z}} - \dot{\bar{z}} z + \dot{\zeta} \dot{\bar{\zeta}} + \dot{\zeta} \dot{\bar{\zeta}}) + \\ &+ iM(\bar{\xi} \dot{\xi} + \xi \dot{\bar{\xi}}). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Основное отличие данной модели от модели Ландау на суперплоскости состоит в том, что в (6.1) фигурирует дополнительная фермионная переменная  $\xi(t), \bar{\xi}(t)$ . Её можно интерпретировать как поле Намбу–Голдстоуна, связанное с  $ISU(1|1)$  и генераторами  $\underline{U}, \underline{U}^\dagger$ . Благодаря этой дополнительной переменной удаётся построить второй ВЗ член и одновременно избежать появления нестандартного кинетического члена второго порядка для  $\dot{\zeta}, \dot{\bar{\zeta}}$ . Несмотря на эти привлекательные свойства, в квантовой теории при естественном выборе внутреннего произведения всё ещё присутствуют отрицательные нормы.

В теории имеются связи на фазовом пространстве (из-за фермионных членов 1-го порядка в (6.1)). Решая эти связи, можно найти общую структуру волновой функции:



$$\Psi = K_1^M e^{-\kappa K^2} \Psi_{ch}(z, \bar{z}_{sh}, \zeta, \bar{\zeta}), \quad (6.2)$$

$$K_1 = 1 + \bar{\zeta} \xi, \quad \bar{z}_{sh} = \bar{z} - \xi \bar{\zeta}.$$

Квантовый гамильтониан в применении к этим «физическим» волновым функциям записывается в виде

$$H = \hat{a}^+ \hat{a}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 2\kappa,$$

$$\hat{a} = i\sqrt{K_1} (\partial_{\bar{z}} + \kappa z_{sh} - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}), \quad (6.3)$$

$$\hat{a}^+ = i\sqrt{K_1} (\partial_z - \kappa \bar{z}_{sh} - \xi \partial_{\zeta}).$$

На  $\ell$ -м УЛ физическая киральная волновая функция имеет специальный вид: она выражается через аналитическую функцию аргументов  $(z, \bar{\zeta}, \xi)$  согласно формуле

$$\Psi_{ch}^{(\ell)} = \tilde{\nabla}_z^\ell \Psi_{an}^{(\ell)}(z, \zeta, \xi),$$

$$\tilde{\nabla}_z = \partial_z - 2\kappa \bar{z}_{sh} - \xi \partial_{\zeta}, \quad (6.4)$$

$$H \Psi_{ch}^{(\ell)} = 2\kappa \ell \Psi_{ch}^{(\ell)}.$$

$ISU(1|1)$ -инвариантное внутреннее произведение определяется как

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d\mu \int d\xi d\bar{\xi} \bar{\Phi} \Psi =$$

$$= \int d\mu e^{-2\kappa K^2} \int d\xi d\bar{\xi} K_1^{2M} \bar{\Phi}_{ch} \Psi_{ch}, \quad (6.5)$$

где  $d\mu = dz d\bar{z} d\zeta d\bar{\zeta}$  – мера интегрирования модели на суперплоскости. Разлагая волновую функцию в ряд по грассмановым переменным

$$\Psi_{an}^{(\ell)} = A^{(\ell)}(z) + \zeta B^{(\ell)}(z) +$$

$$+ \xi C^{(\ell)}(z) + \zeta \xi B^{(\ell)}(z), \quad (6.6)$$

можно показать, что

$$\|\Psi\|^2 \propto \int dz d\bar{z} e^{-2\kappa |z|^2} [(2M - \ell) \times$$

$$\times (2\kappa A^+ A + B^+ B) + 2\kappa C^+ C + D^+ D]. \quad (6.7)$$

Таким образом, при  $\ell > 2M > 0$  и  $M < 0$  возникают отрицательные нормы. При  $\ell = 2M$  есть также и нулевые нормы.

Как и в ранее рассмотренных случаях, внутреннее произведение можно переопределить посредством введения нетривиального метрического оператора на гильбертовом пространстве. На аналитических функциях этот оператор задаётся выражением

$$G_{an} = [\xi, \partial_{\xi}] = -1 + 2\xi \partial_{\xi}. \quad (6.8)$$

После такого переопределения норма (под знаком интеграла по  $z, \bar{z}$ ) принимает вид

$$\propto [(\ell - 2M)(2\kappa A^+ A + B^+ B) +$$

$$+ 2\kappa C^+ C + D^+ D]. \quad (6.9)$$

Теперь при  $M < 0$  все состояния имеют положительную норму. Это справедливо и при  $M = 0$ , за тем исключением, что половина состояний с  $\ell = 0$  имеют нулевую норму. Естественно определить (супер)пространство физических состояний как фактор по подпространству состояний с нулевыми нормами. В результате состояния с нулевыми нормами не дают вклада в физический спектр. Заключаем, что при  $M = 0$  модель на планарном суперфлаге имеет точно такой же спектр, включая вырождение, как и модель на суперплоскости. Следовательно, при  $M = 0$  обе модели эквивалентны. При  $M > 0$  остаются отрицательные нормы для значений  $\ell < 2M$ , так что в этом интервале параметров необходимо сохранить «наивное» определение нормы.

Как и в модели на суперплоскости, переход к новому определению нормы меняет правило эрмитова сопряжения  $ISU(1|1)$  суперзаряда  $Q$ , в результате чего естественным путём появляются новые сохраняющиеся суперзаряды. В применении к аналитическим волновым функциям эти суперзаряды определяются выражениями

$$S_{an} = 2i\kappa \xi (2M - N_{an}),$$

$$S_{an}^\dagger = 2i\kappa \partial_{\xi}, \quad (6.10)$$

$$\{S_{an}, S_{an}^\dagger\} = 2\kappa (H_{an} - 4\kappa M).$$

Эта квантовая суперсимметрия на мировой линии существует при  $M \leq 0$ , поскольку невозможно достичь положительной определённости антикоммутатора в (6.10) при  $M > 0$  во всей области изменения параметров и на каждом УЛ.

#### Заключение

Кратко суммируем содержание работы.

Самосогласованные суперрасширения бозонной модели Ландау можно построить [5–10], исходя из их геометрической интерпретации как одномерных сигма моделей ВЗНВ типа на градуированных расширениях



либо группы «магнитных трансляций», лежащей в основе исходной модели Ландау, либо группы  $SU(2)$ , которая является группой симметрии модели Хэлдейна.

Хотя «естественный» выбор инвариантного внутреннего произведения в рассматриваемом типе суперрасширений приводит к квантовым состояниям с отрицательной нормой, этот недостаток можно преодолеть посредством переопределения внутреннего произведения в пространстве состояний в духе работ [11, 12].

Характерной общей чертой планарных суперрасширений модели Ландау является присутствие в них скрытой динамической  $N = 2$  суперсимметрии [9, 10]. Сохраняется ли это свойство в моделях Ландау на суперсфере и суперфлаге и если нет, то что служит его аналогом? Можно ли во всех случаях воспроизвести это свойство (или его возможные обобщения), исходя из подходящего суперполевого формализма, как в модели на суперплоскости? Есть ли обобщения на высшие  $N$ ? Желательно иметь ответы на эти вопросы. На первый вопрос уже дан частичный ответ в недавней работе [14], где показано, что скрытой симметрией квантовой модели на суперфлаге при  $M \neq 0$  является супергруппа  $SU(2|2)$ .

Что же касается возможных физических применений, то хотелось бы в полной мере осознать, какие явления описываются суперсимметричными версиями квантового эффекта Холла и каков физический статус дополнительных фермионных переменных в этом контексте.

Автор благодарен организаторам семинара за предложение написать эту статью. Большинство изложенных в ней результатов получено совместно с Андреем Бейлиным, Томасом Картрайтом, Лукой Мезинческу и Полом К. Таунсендом, которым автор выражает свою искреннюю признательность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №06-02-16684, 08-02-90490) и гранта ИНТАС 05-1000008-7928.

#### Список литературы

1. Landau L. Diamagnetismus der Metalle // Z. Phys. 1930. Vol.64. P.629.
2. Haldane F.D.M. Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol.51. P.605.
3. Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics, Singapore: World Scientific, 2000.
4. Ivanov E. Supersymmetrizing Landau models // Theor. Math. Phys. 2008. Vol.154. P.349.
5. Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K. Fuzzy  $CP^{(n|m)}$  as a quantum superspace. Preprint UB-ECM-PF-03/31, Universitat de Barcelona; arxiv: hep-th/0311159.
6. Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K. A super-flag Landau model. Preprint UB-ECM-PF-04/08, Universitat de Barcelona; arxiv: hep-th/0404108.
7. Hasebe K., Kimura Y. Fuzzy supersphere and supermonopole // Nucl. Phys. B. 2005. Vol.709. P.94.
8. Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P. K. Planar super-Landau models // JHEP. 2006. Vol.0601. P.143.
9. Curtright T., Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K. Planar super-Landau models revisited // JHEP. 2007. Vol.0704. P.020.
10. Hasebe K. Quantum Hall liquid on a noncommutative superplane // Phys. Rev. D. 2005. Vol.72. P.105017.
11. Bender C. Introduction to  $PT$ -symmetric quantum symmetry // Contemp. Phys. 2005. Vol.46. P.277–292.
12. Bender C. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rept. Prog. Phys. 2007. Vol.70. P.947.
13. Curtright T., Mezincescu L. Biorthogonal quantum systems // J. Math. Phys. 2007. Vol.48. P.092106.
14. Beylin A., Curtright T., Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P.K. Unitary Spherical Super-Landau Models // JHEP. 2008. Vol.0810. P.069.
15. Elvang H., Polchinski J. The Quantum Hall Effect on  $R^4$  // Preprint NSF-ITP-02-120, University of California; arxiv: hep-th/0209104.
16. Madore J. The fuzzy sphere // Class. Quant. Grav. 1992. Vol.9. P.69.
17. Witten E. Dynamical breaking of supersymmetry // Nucl. Phys. B. 1981. Vol.188. P.513.
18. Akulov V.P., Pashnev A.I. Supersymmetric quantum mechanics and spontaneous breaking of supersymmetry at the quantum level // Theor. Math. Phys. 1985. Vol.65. P.1027.
19. Volkov D.V., Pashnev A.I. Supersymmetric Lagrangian for particles in proper time // Theor. Math. Phys. 1980. Vol.44. P.770.
20. Robert D., Smilga A.V. Supersymmetry vs ghosts // J. Math. Phys. 2008. Vol.49. P.042104.



УДК 535.14; 538.56

## КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ДИНАМИКА МОДЫ В СРЕДЕ С КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А.С. Барсов, А.В. Горохов

Самарский государственный университет  
E-mail: barsoff\_andrey\_s@mail.ru



Динамика трех фотонных мод в теории параметрического усилителя в среде с учетом керровской нелинейности может быть исследована с использованием динамической группы  $WSp(6, R)$ . Для вырожденного параметрического усилителя с классической накачкой описание сводится к динамике когерентных состояний группы  $SU(1,1)$ . Рассчитаны временные зависимости средних чисел фотонов и сжатия. Показано, что «включение» керровской нелинейности приводит к подавлению параметрического усиления.

**Ключевые слова:** когерентные состояния, эффект Керра, параметрическое усиление, сжатие.

### Coherent States and Mode Dynamics in Kerr Nonlinear Medium

A.S. Barsov, A.V. Gorokhov

Dynamics of three photonic modes in the theory of parametric amplifier in the medium, taking into account the Kerr nonlinearity, can be studied using the dynamical group  $WSp(6, R)$ . For a degenerate parametric amplification with classical pump the description is reduced to the dynamics of coherent states of  $SU(1,1)$  group. The time dependence of average numbers of photons and squeezing are calculated. It is shown that the «switching-on» of the Kerr nonlinearity leads to suppression of the parametric amplification.

**Key words:** coherent states, Kerr effect, parametric amplification, squeezing.

### Введение

Хотя квантовая оптика направлена на изучение явлений, в которых проявляются квантовые свойства света [1], использование упрощенного полуклассического подхода является достаточно популярным. Именно на основе такого подхода, сохраняющего аппарат классической физики – уравнения Максвелла, дополненные уравнениями для среднего значения поляризации среды, были изучены многочисленные нелинейные и когерентные явления в оптике [2–4].

С другой стороны, метод, основанный на использовании когерентных состояний (КС), стал сейчас одним из наиболее используемых в современной квантовой оптике [1, 2, 4]. Это объясняется тем, что этот метод является наглядным и универсальным. С его помощью находятся квазиклассические асимптотики квантовых величин, а также получаются результаты, справедливые за пределами

применимости теории возмущений. КС являются квантовыми состояниями, наиболее близкими к классическим. Движение в фазовом пространстве точки, соответствующей КС, подчиняется классическим уравнениям движения, поэтому квантовую задачу можно свести к классической задаче.

В данной работе когерентные состояния использованы для исследования квазиклассической динамики одной модели квантовой оптики – вырожденного параметрического усилителя в среде с керровской нелинейностью. Выведены уравнения движения в представлении КС, исследована их временная динамика и выполнены расчеты временных эволюций среднего числа фотонов и параметра сжатия фотонной моды в зависимости от параметров модели.

### 1. Гамильтониан эволюции моды в среде с керровской нелинейностью

Рассмотрим ячейку Керра – кристалл с коэффициентом преломления, зависящим от напряженности внешнего (переменного) электрического поля  $E$  по закону [3]:

$$n(E) = n_0 + \alpha E^2.$$

Пусть на этот кристалл падает лазерный пучок с частотой, примерно равной удвоенной частоте собственных колебаний электромагнитного поля в кристалле ( $\omega_l \approx 2\omega$ ). (рис. 1).

Будем предполагать интенсивность падающего пучка настолько большой, что его можно считать классическим. Тогда в кристалле может наблюдаться вырожденный параметрический резонанс. Наряду с параметрическим резонансом из-за предполагаемой большой интенсивности электрического поля в кристалле будет также наблюдаться эффект Керра.

Такая система может быть описана гамильтонианом [1, 2]:



$$H(t) = \hbar \omega_0 a^+ a + \hbar \Lambda \left( (a^+)^2 e^{-2i\omega t} + a^2 e^{2i\omega t} \right) + \hbar \kappa(t) (a^+ a)^2, \quad (1)$$

( $\Lambda$  – параметр, определяемый интенсивностью поля накачки и нелинейной восприимчивостью среды для процесса  $\omega_L \rightarrow \omega + \omega$ ,  $\kappa(t)$  – параметр керровской нелинейности). Первое слагаемое в гамильтониане описывает собственное свободное электромагнитное поле в ячейке Керра. Второе слагаемое отвечает за вырожденный параметрический резонанс. Третье слагаемое описывает эффект Керра – сдвиг фазы выходящих пучков в зависимости от интенсивности поля накачки.

Так как рассматривается вырожденное параметрическое усиление, то все сводится к описанию эволюции одной моды. Будем описывать ее динамику при помощи когерентных состояний группы  $SU(1,1)$ .

Такое описание возможно, поскольку гамильтониан (1) выражается через генераторы алгебры Ли группы  $SU(1,1)$ :

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_-, K_+] = 2K_0, \quad (2)$$

где

$$K_+ = \frac{1}{2} a^+ a^+, \quad K_- = \frac{1}{2} a a, \quad K_0 = \frac{1}{2} \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (3)$$

Тогда гамильтониан (1) представится в виде

$$H = 2\hbar \omega_0 K_0 - 1 + 2\hbar \Lambda \left( K_+ e^{-2i\omega t} + K_- e^{2i\omega t} \right) + 4\hbar \kappa(t) K_+ K_-. \quad (4)$$

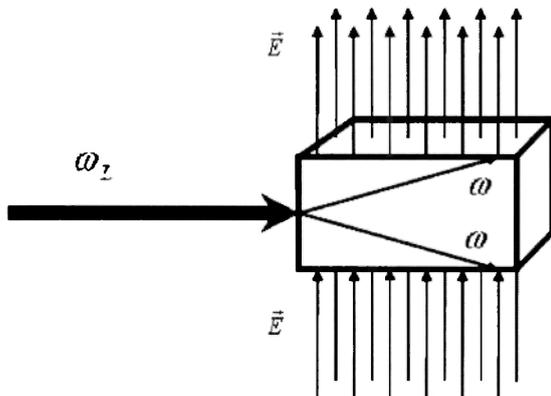


Рис. 1. Схематическое изображение рассматриваемой модели

Построим систему КС по схеме Переломова [5, 6]:

$$|z\rangle = (1 - z\bar{z})^k \exp(zK_+) |k, 0\rangle,$$

где  $k$  – квантовое число, задающее унитарное неприводимое представление группы  $SU(1,1)$ ,  $z \in |z| < 1$ , а вектор  $|k, 0\rangle$  является вакуумным для оператора  $K_-$ , и будем искать эволюцию КС по следующей схеме [6].

Найдем диагональный матричный элемент оператора Гамильтона в представлении КС:

$$H = \langle z | H(t) | z \rangle = H(z, \bar{z}; t), \quad (5)$$

где  $\bar{z}$  – обозначение для  $z$  – комплексно сопряженной переменной.

Далее будем искать решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = -\frac{i}{\hbar} \{z, H(z, \bar{z}; t)\}, \quad (6)$$

где символом  $\{z, H\}$  обозначена скобка Пуассона:

$$\{F, R\} = \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial R}{\partial z^\alpha} \right), \quad (7)$$

а величина  $g_{\alpha\beta}$  вычисляется по формуле

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \quad (8)$$

где  $K(z, \bar{w}) = \frac{\langle z | w \rangle}{\langle z | 0 \rangle \langle 0 | w \rangle}$  – воспроизводящееся

ядро, выполняющее в пространстве голоморфных функций, соответствующих векторам состояний в представлении КС, роль, аналогичную  $\delta$ -функции Дирака.

## 2. Построение эволюции системы с помощью КС группы $SU(1,1)$

Воспользуемся приведенной схемой для решения нашей задачи в представлении КС группы  $SU(1,1)$ . Найдем явный вид диагонального матричного элемента оператора Гамильтона в представлении КС группы  $SU(1,1)$ :



$$H(z, \bar{z}; t) = \langle z | H(t) | z \rangle = 2\hbar\omega_0 \langle z | K_0 | z \rangle - 1 + 2\hbar\Lambda \left( \langle z | K_+ | z \rangle e^{-2i\omega t} + \langle z | K_- | z \rangle e^{2i\omega t} \right) + 4\hbar\kappa(t) \langle z | K_+ K_- | z \rangle.$$

Используя формулы для средних значений операторов  $K_0, K_+, K_-$  [6], найдем, что:

$$H(z, \bar{z}; t) = 2\hbar\omega_0 k \frac{1+z\bar{z}}{1-z\bar{z}} + \frac{2\hbar\Lambda k}{1-z\bar{z}} \left( \bar{z} e^{-2i\omega t} + z e^{2i\omega t} \right) + \frac{8\hbar k \kappa(t) z \bar{z} (2k + z\bar{z})}{(1-z\bar{z})^2}.$$

После очевидных выкладок приходим к уравнению для когерентных состояний, определяющего эволюцию параметра  $z$ :

$$\dot{z} = -\frac{i(1-z\bar{z})^2}{2\hbar k} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = -i \left( 2\omega_0 z + \Lambda \left( e^{-2i\omega t} + z^2 e^{2i\omega t} \right) + 8\kappa(t) \left( kz + \bar{z}z^2 + \frac{2kz^2\bar{z} + z^3\bar{z}^2}{1-z\bar{z}} \right) \right).$$

Известно, что у группы SU(1,1) на состояниях одномодового осциллятора реализуется 2 унитарных неприводимых представления дискретной серии  $T_+^k$ : с  $k = 1/4, 3/4$ , которые соответствуют четным и нечетным уровням.

Важно отметить, что, в отличие от случая вырожденного параметрического усилителя (без учета эффекта Керра), траектории движения и остальные рассчитываемые величины зависят от квантового числа  $k$ .

Решение находилось численно для разных типов зависимостей параметра керровской нелинейности  $\kappa(t)$  от времени.

Здесь мы приведем результаты, выполненные для начального вакуумного состояния сигнальной моды:  $|z(0)\rangle = |0\rangle$  и только для случая керровского слагаемого, включаемого с задержкой:  $\kappa(t) = A e^{-\beta(t-t_0)^2} \cos(\Omega t)$  (рис. 2, 3).

При расчетах параметры обезразмеривались. Рассчитывались траектории КС на комплексной плоскости (в плоскости Лобачевского  $|z| < 1$ ) и временные зависимости среднего числа фотонов в моде  $\langle n \rangle$  и модуль квадратурного параметра сжатия  $\zeta$  [1].

Из рисунков видно, что включение керровского слагаемого изменяет характер зависимостей как среднего числа фотонов, так и сжатия, что может быть использовано в целях управления.

После выключения керровского слагаемого возобновляется параметрическая генерация.

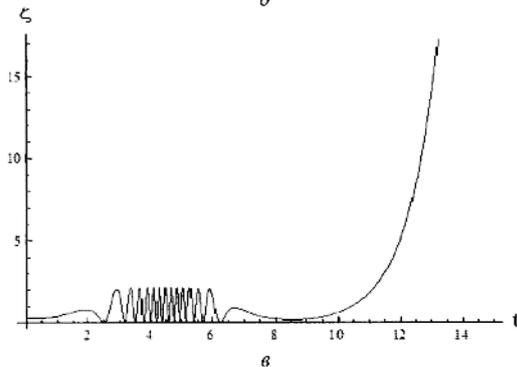
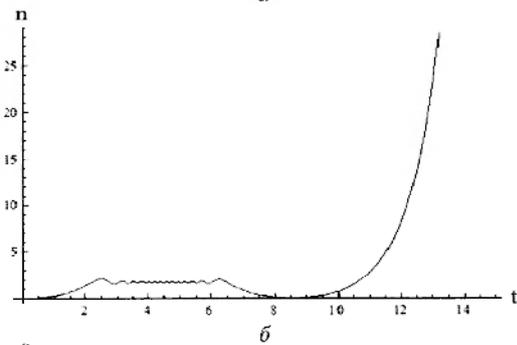
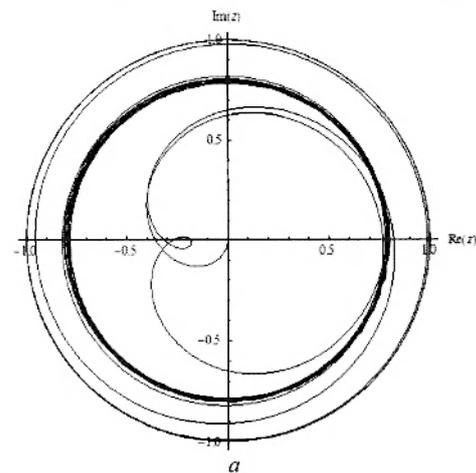


Рис. 2. Динамика SU(1,1) КС, числа фотонов и параметра сжатия для  $k = 1/4$ : траектория КС (а); временная зависимость среднего числа фотонов в сигнальной моде (б); временная зависимость параметра сжатия (в). Параметры моды:  $\omega_0 = 1, \Lambda = 0.5, \omega = 1.1, A = \pi, \beta = \pi/8, \Omega = \pi/14, t_0 = 2$

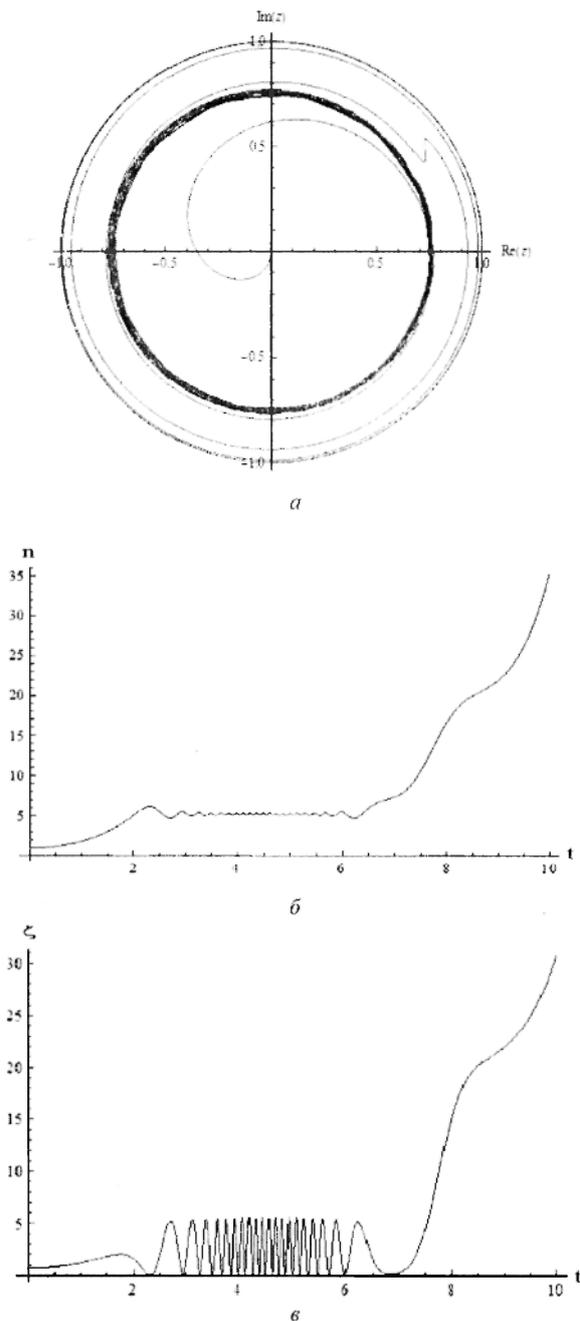


Рис. 3. Динамика  $SU(1,1)$  КС, числа фотонов и параметра сжатия для  $k = 3/4$ . Параметры см. на рис. 2

### Заключение

В работе показано, что описание динамики в представлении  $SU(1,1)$  КС адекватна задаче, поскольку позволяет описать сжатие

моды. Теоретически рассчитана временная эволюция среднего числа фотонов, которая при малом времени существования керровской нелинейности экспоненциально зависит от времени. В области сильной керровской нелинейности среднее число фотонов с удвоенной собственной частотой флуктуирует около достигнутого к моменту включения значения, и параметрическая генерация подавлена. Динамика квадратурного параметра сжатия  $\zeta$  является достаточно сложной, однако можно выделить моменты времени, когда результат расчета позволяет говорить о сжатии фотонной моды.

Расчеты были проведены в приближении классичности моды накачки и неизменности ее интенсивности. Кроме того, не учитывалось разбегание сигнального и холостого пучков, которое неизбежно есть в реальном эксперименте. В дальнейшем полученные результаты интересно обобщить на случай многомодовых полей с учетом квантованности поля накачки и учесть пространственные эффекты. Можно показать, что в общем случае с использованием КС группы  $SU(1,1)$  динамика уже не может быть описана и необходимо использовать группу  $WSp(6, R) = W_3^{Sp(6, R)}$  – динамическую группу симметрии трехмодового квантового осциллятора.

### Список литературы

1. Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003.
2. Шлях В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: Физматлит, 2005.
3. Шен Н.Р. Принципы нелинейной оптики. М.: Мир, 1989.
4. Мандель Л., Вольф А. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000.
5. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1977.
6. Горохов А.В. Когерентные состояния, динамический хаос и когерентная релаксация в моделях квантовой оптики и лазерной физики: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2005. 321 с.



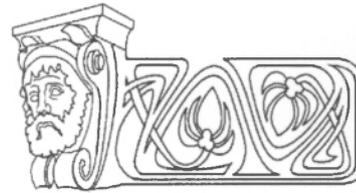
УДК 535.14; 536.75

## НЕМАРКОВСКАЯ КВАНТОВАЯ РЕЛАКСАЦИЯ И ТЕОРИЯ ШИРИНЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

А.В. Горохов, В.В. Семин\*

Самарский государственный университет  
E-mail: gorokhov@ssu.samara.ru

\* Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева  
E-mail: veyvlet@mail.ru



Выведено квантовое уравнение релаксации с немарковскими поправками в приближении малого времени памяти. Рассчитаны корреляционные функции для одиночного двухуровневого атома и системы двух диполь-дипольно взаимодействующих атомов во внешних регулярных полях и выполнен расчет контура линии излучения. Учет немарковских эффектов приводит к более яркому проявлению диполь-дипольного взаимодействия.

**Ключевые слова:** двухуровневые атомы, немарковское кинетическое уравнение, короткая память, контур линии излучения.

**Non-Markovian Quantum Relaxation and Theory of Spectral Lines Width**

A.V. Gorokhov, V.V. Semin

The quantum equation of relaxation with non-Markovian terms in the approximation of short-time memory is derived. The correlation functions for a single two-level atom and system of two dipole-dipole interaction of atoms in the external regular fields and the contour of the radiation lines are calculated. Accounting Non-Markovian effects leads to a more vivid expression of dipole-dipole interaction.

**Key words:** two-level atoms, non-Markovian kinetic equation, short time memory, radiation line contour.

### Введение

Теория марковских стохастических процессов является хорошо развитым и всесторонне исследованным разделом теории вероятностей и математической статистики [1]. Однако применение марковского приближения к физическим проблемам является зачастую необоснованным приближением. Так, например, броуновское движение малых частиц взвешенных в жидкости традиционно рассматривается как марковский процесс. Действительно, для длительных времен наблюдения за системой не обнаруживается никакой зависимости между координатой и скоростью частицы в соседних интервалах времени. Тем не менее при уменьшении времени наблюдения за частицей становятся заметными процессы ускорения и торможения, т.е. проявляется память [2]. На малых временах движение броуновской частицы является немарковским процессом.

В квантовой оптике марковское приближение при описании динамики систем двухуровневых атомов приводит к серьезному ограничению на форму квантового управляющего уравнения для системы, которое обязано иметь линдбладовскую форму [3]. Методам обобщения линдбладовского уравнения [4, 5], а также получению принципиально новых уравнений [6] в последнее время уделяется большое внимание.

В данной статье в приближении короткой памяти выведено немарковское кинетическое уравнение для одиночных двухуровневых атомов во внешнем лазерном поле и для системы двух диполь-дипольно взаимодействующих атомов.

### 1. Двухуровневый атом во внешнем поле

Рассмотрим двухуровневую систему, взаимодействующую со своим окружением и внешним лазерным полем.

#### 1.1. Модель системы

Традиционно в квантовой теории релаксации квантово-механическая система делится на две взаимодействующие части: малую (динамическую) и большую (диссипативную), которая моделируется бесконечно большим набором гармонических осцилляторов.

Гамильтониан такой системы

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{int}, \quad (1)$$

где

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z \quad (2)$$

– гамильтониан атома, выраженный через диагональный генератор группы SU(2),  $\hbar\omega_0$  – энергетическое расстояние между уровнями в атоме;



$$\hat{H}_B = \sum_j \hbar \omega_j \hat{b}_j^* \hat{b}_j \quad (3)$$

– гамильтониан термостата, который моделируется (бесконечным) набором гармонических осцилляторов с частотой  $\omega_j$ .

$$\hat{H}_{int} = \sum_j \hbar (f_j \hat{\sigma}_+ \hat{b}_j + \bar{f}_j \hat{\sigma}_- \hat{b}_j^*) \quad (4)$$

– оператор взаимодействия между атомом и термостатом, который записан в приближении вращающейся волны (ПВВ). Здесь  $f_j$  – константа взаимодействия  $j$ -го осциллятора с атомом; операторы  $\hat{\sigma}_+$  и  $\hat{\sigma}_-$  являются генераторами группы энергетического спина атома SU(2), а  $\hat{b}_j$  и  $\hat{b}_j^*$  – бозонные операторы рождения и уничтожения.

Кроме того, будем учитывать взаимодействие описываемой атомной системы с внешним лазерным возмущением. Данное взаимодействие описывается следующим образом [7]:

$$\hat{H}_{reg} = \hbar (\xi(t) \hat{\sigma}_+ + \bar{\xi}(t) \hat{\sigma}_-), \quad (5)$$

где  $\xi(t) = \xi_0 e^{-i(\omega_0 - \Delta\omega)t}$  – функция, пропорциональная интенсивности внешнего поля, определяющая переходы между уровнями,  $2\xi_0$  – частота Раби лазерного поля,  $\Delta\omega$  – отстройка частоты лазерного поля от частоты атомного перехода. В результате полный гамильтониан системы будет иметь вид

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{reg} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{reg}. \quad (6)$$

Для дальнейших расчетов удобно перейти к представлению взаимодействия:

$$\begin{aligned} \hat{H}^i &= e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} (\hat{H}_{int} + \hat{H}_{reg}) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} = \\ &= \hbar (\xi(t) \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}(t) \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}) + \\ &+ \sum_j \hbar (f_j \hat{\sigma}_+ \hat{b}_j e^{i(\omega_0 - \omega_j)t} + \bar{f}_j \hat{\sigma}_- \hat{b}_j^* e^{-i(\omega_0 - \omega_j)t}). \end{aligned} \quad (7)$$

### 1.2. Операторно-кинетическое уравнение

В рамках квантовой теории релаксации [7] с гамильтонианом (7) можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{reg}(t), \hat{\rho}(0)] -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{\hbar} \sum_j \int_0^t d\tau \{ |f_j|^2 [\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \hat{\rho}(t-\tau) - \\ & - \hat{\sigma}_+ \hat{\rho}(t\tau) \hat{\sigma}_-] e^{-i(\omega_0 - \omega_j)\tau} N + \\ & + |f_j|^2 [\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t-\tau) - \hat{\sigma}_- \hat{\rho}(t-\tau) \hat{\sigma}_+] e^{i(\omega_0 - \omega_j)\tau} \times \\ & \times (N+1) + h.c. \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $N = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega_j}{k_b T}\right) - 1 \right]^{-1}$  – среднее число бозонов в резервуаре на частоте  $\omega_j$ .

Следуя работе [8], будем предполагать, что система обладает коротким временем памяти  $\tau$ , малым по сравнению с характерным временем релаксации  $\tau_{relax}$ . Тогда матрицу плотности можно разложить в ряд по  $\tau$ , ограничиваясь первым порядком

$$\hat{\rho}(t-\tau) \approx \hat{\rho}(t) - \tau \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}. \quad (9)$$

Первое слагаемое в разложении соответствует марковскому приближению, а второе слагаемое учитывает эффекты памяти для коротких времен.

С учетом (9) уравнение (8) для нулевой температуры принимает вид

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{reg}(t), \hat{\rho}(0)] - \hat{L}_M \hat{\rho} - \hat{L}_{NM} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}, \quad (10)$$

где

$$\hat{L}_M \hat{A} = \frac{\gamma}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{A} - 2\hat{\sigma}_- \hat{A} \hat{\sigma}_+ + \hat{A} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-),$$

$$\hat{L}_{NM} \hat{A} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial(i\omega_0)} (\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{A} - 2\hat{\sigma}_- \hat{A} \hat{\sigma}_+ + \hat{A} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-).$$

Здесь  $\gamma$  – константа релаксации, традиционно возникающая при выводе кинетических уравнений.

Эффекты памяти являются следствием взаимодействия атома с термостатом. Имея это в виду, заменим производную в правой части (10) марковским членом, что соответствует следующему порядку итерации в так называемой TCL технике проекционного оператора [9]:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\hat{L}_M \hat{\rho}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение (10), после некоторых преобразований получим:



$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{reg}(t), \hat{\rho}(0)] - \frac{\gamma}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho} - 2\hat{\sigma}_- \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ + \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-) - ic[\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] \quad (12)$$

где  $c = \frac{\gamma}{4} \frac{\partial \gamma}{\partial \omega_0}$ .

Данное уравнение является более простым по сравнению с традиционными интегродифференциальными уравнениями и справедливо для процессов с короткими временами памяти.

1.3. Спектр излучения

Спектр излучения для стационарного процесса определяется следующей формулой [7]:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(0) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (13)$$

Используя квантовую теорему регрессии [10], можно показать, что корреляционная функция определяется следующим выражением:

$$\langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(0) \rangle = e^{i\omega_0 \tau} \langle b | \rho_i(t) a \rangle, \quad (14)$$

где  $\rho_i(0) = \sigma_- \rho(0)$ ,  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  – вектора верхнего и нижнего состояний атома соответственно.

Спектр резонансной флуоресценции, полученный численным решением операторно-кинетического уравнения (12), после интегрирования (13) представлен на рис. 1.

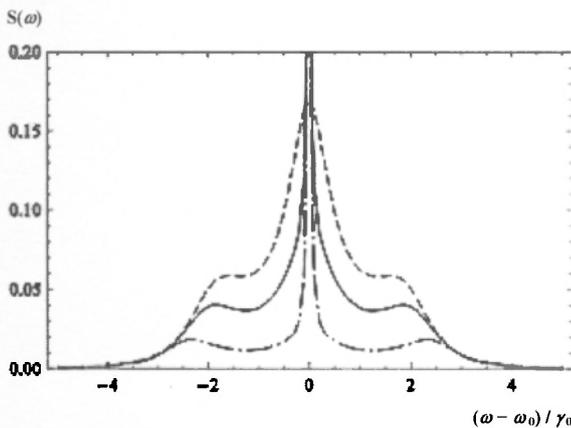


Рис. 1. Спектр резонансной флуоресценции двухуровневого атома в немарковском случае. Параметры в системе:  $\xi_0 = 1$ ,  $\gamma_0 = 1$ . Сплошная кривая –  $c = 3$ , штрих-пунктирная кривая –  $c = 6$ , пунктирная кривая –  $c = 0$  (марковский случай)

Из него видно, что немарковость процесса достаточно сильно влияет на спектр резонансной флуоресценции. По сравнению с марковским случаем спектральные кривые являются более узкими. Интенсивность немарковской флуоресценции ниже, чем в марковском случае. На частоте перехода наблюдается дельта-образный пик, свидетельствующий о переизлучении атомом частоты падающего поля. Результаты качественно хорошо соответствуют результатам, полученным в работе [11].

Для атома в отсутствие внешнего поля  $\xi = 0$  удается получить аналитическое выражение для контура линии излучения:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{8\gamma}{4\gamma^2 + (b\gamma - 4\omega + 4\omega_0)^2} \quad (15)$$

Контур представляет собой лоренцеву кривую, смещенную на величину  $\gamma b/4$ , где  $b = \partial\gamma/\partial\omega_0$ .

2. Система диполь-дипольно взаимодействующих атомов

Сдвиг максимума спектральной кривой достаточно тяжело обнаружить экспериментально. Однако данный факт может проявить себя при наблюдении за двумя взаимодействующими атомами. Рассмотрим далее такую систему.

2.1. Модель и операторно-кинетическое уравнение

Рассмотрим два идентичных диполь-дипольно взаимодействующих двухуровневых атома в тепловом резервуаре на расстоянии  $R$  друг от друга. Пусть на систему падает волна накачки с волновым вектором  $\vec{k}$ , которая индуцирует дипольные моменты атомов, и атомы начинают взаимодействовать диполь-дипольным образом, после чего волна накачки затухает. Нас будут интересовать спектральные свойства света, излученного системой.

Гамильтониан такой системы

$$H = \bar{H}_A + \bar{H}_B + H_{int} + H_{AA} + H_{BB}, \quad (16)$$

где  $H_A = \hbar\omega_0 \sum_p \sigma_p^z$  – гамильтониан свободных атомов,  $\omega_0$  – частота переходов в атоме,  $\sigma_p^z$  – диагональный генератор группы SU(2);



$H_T = \hbar \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$  – гамильтониан термостата (теплового резервуара),  $\omega_k$  – частота  $k$ -го фотона,  $b_k^\dagger$  и  $b_k$  – операторы рождения и уничтожения  $k$ -го фотона;  $H_{int} = \hbar \sum_{k,p} (g_{kp} b_k \sigma_p^\dagger e^{ikR_p} + h.c.)$  – гамильтониан взаимодействия атома и термостата,  $g_{kp}$  – константа взаимодействия атома с термостатом,  $\sigma_p^\dagger$  – повышающий и понижающий атомные операторы,  $\vec{R}_p$  – радиус-вектор  $p$ -го атома,  $\vec{k}$  – волновой вектор;  $H_{AA} = \sum_{p \neq p'} V_{pp'} \sigma_p^\dagger \sigma_{p'}$  – гамильтониан диполь-дипольного взаимодействия,  $V_{pp'}$  – константа диполь-дипольного взаимодействия;  $H_{AF} = - \sum_p \left\{ (\vec{d}_p \vec{E}_0) \exp[i(\vec{k} \vec{R}_p - \omega t)] \sigma_p^\dagger + h.c. \right\}$  – гамильтониан взаимодействия атомов с полем падающей лазерной волны,  $\vec{d}_p$  – переходной дипольный момент  $p$ -го атома.

Путем итерирования по константам взаимодействия атомов и термостата из квантового уравнения Лиувилля с гамильтонианом (16), как в предыдущем разделе, легко получается следующее интегродифференциальное уравнение [7]:

$$\frac{\partial \rho_{AT}(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_{AA}(t), \rho_{AT}(t)] - \frac{i}{\hbar} [H'(t), \rho_{AT}(0)] - \quad (17)$$

$$- \frac{1}{\hbar^2} \int [H'(t), [H'(t-t'), \rho_{AT}(t-t')]] dt',$$

где  $H'(t)$  – гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия,  $\rho_{AT}$  – матрица плотности атома и термостата.

Поскольку мы интересуемся динамикой только атомной подсистемы, возьмем след по переменным термостата и предположим, что состояния термостата распределены по некоррелированной тепловой смеси состояний. Тогда средние значения переменных термостата будут следующими [7]:

$$\begin{aligned} \langle b_j \rangle &= \langle b_j^\dagger \rangle = 0, \\ \langle b_j^\dagger b_j^\dagger \rangle &= (N+1) \delta_{jj'}, \\ \langle b_j^\dagger b_j \rangle &= N \delta_{jj'}, \\ \langle b_j^\dagger b_j^\dagger \rangle &= \langle b_j b_j \rangle = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $N = \left[ \exp\left(\frac{\hbar \omega_j}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}$  – среднее число бо- зонов в резервуаре на частоте  $\omega_j$  при темпе- ратуре  $T$ ,  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Учитывая, что термостат является систе- мой со множеством степеней свободы, мож- но предположить, что никакие изменения, происходящие с динамической подсистемой, не могут заметным образом изменить состо- яние термостата (приближением необрати- мости для матрицы плотности), т.е.  $\rho_{AT}(t') = \rho_A(t') \otimes \rho_T(0)$ . Тогда с учетом (18) уравнение (17) сводится к уравнению, кото- рое описывает только динамическую систе- му. Влияние термостата учитывается через средние значения (18).

Предположим, как и раньше, что время  $t' \ll t$ , т.е. время наблюдения за системой значительно больше, чем характерный вре- менной интервал памяти. Тогда мы можем разложить в ряд матрицу плотности под ин- тегралом и ограничимся только двумя чле- нами:

$$\rho(t-t') = \rho(t) - \frac{\partial \rho}{\partial t} t'. \quad (19)$$

Первое слагаемое в этом разложении со- ответствует марковскому приближению, ура- внение для которого хорошо известно [12], а второе слагаемое учитывает появление крат- ковременной памяти.

Подставляя (19) в уравнение (17) после достаточно громоздких преобразований для  $N = 0$  получим следующее операторно-кине- тическое уравнение:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [H_{AA}, \rho(t)] + \hat{L}_{\dots} \rho(t) + \hat{L}_{NM} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (20)$$

где  $\hat{L}_M$  и  $\hat{L}_{NM}$  – супероператоры, описы- вающие марковскую и немарковскую релакса- цию соответственно.

К сожалению, методы нахождения ре- шений этого уравнения не известны, поэтому в [13] было предложено производную в пра- вой части заменить марковским членом, что является подобием TCL метода проекцион- ного оператора [14]. В результате получаем:



$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & i \sum_{p \neq p'} [\sigma_p^+ \sigma_{p'}^-, \rho(t)] g_{pp'} - \\ & - \sum_{pp'} \frac{\gamma_{pp'}}{2} (\rho \sigma_p^+ \sigma_{p'}^- + \sigma_p^+ \sigma_{p'}^- \rho - \sigma_{p'}^- \rho \sigma_p^+) + \\ & + \frac{i}{4} \sum_{pp'} \gamma_{pp'} \frac{\partial \gamma_{pp'}}{\partial \omega} (-2(\sigma_p^+ \sigma_{p'}^- \sigma_{p'}^- \rho \sigma_p^+ - \\ & - \sigma_{p'}^- \rho \sigma_p^+ \sigma_{p'}^-) + [\sigma_p^+ \sigma_{p'}^- \sigma_p^+ \sigma_{p'}^-, \rho]), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} g_{12} = g_{21} = & \frac{3\gamma_0}{4} \times \\ & \times \left\{ -[\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 - (\bar{\mu}_1 \bar{e}_R)(\bar{\mu}_2 \bar{e}_R)] \frac{\cos(kR)}{kR} + \right. \\ & \left. + [\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 - 3(\bar{\mu}_1 \bar{e}_R)(\bar{\mu}_2 \bar{e}_R)] \left[ \frac{\sin(kR)}{(kR)^2} + \frac{\cos(kR)}{(kR)^3} \right] \right\}, \\ \gamma_{11} = \gamma_{22} = & \gamma_0, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = & \frac{3\gamma_0}{2} \left\{ [\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 - (\bar{\mu}_1 \bar{e}_R)(\bar{\mu}_2 \bar{e}_R)] \frac{\sin(kR)}{kR} + \right. \\ & \left. + [\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 - 3(\bar{\mu}_1 \bar{e}_R)(\bar{\mu}_2 \bar{e}_R)] \left[ \frac{\cos(kR)}{(kR)^2} - \frac{\sin(kR)}{(kR)^3} \right] \right\} = \gamma_0 \phi. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_0 = \frac{4\mu^2 \omega_0^3}{3c^3 \hbar}$  – стандартная константа релаксации, которая получается в теории

$$S(\omega) = Re \left( \frac{8i((D-4\omega_c)\rho_{ss} + (C-4\omega_c)\rho_{uu})\cos^2(\alpha)}{\pi(A-4g-2i\gamma_0(\phi+1)+4\omega_c)(-B+4g-2i\gamma_0(\phi+3)+4\omega_c)} - \frac{8i\sin^2(\alpha)\rho_{si}}{\pi(A-4g-2i\gamma_0(\phi-1)-4\omega_c)} \right), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A = & \gamma_0 \partial_\omega \gamma_0 + \gamma_{12} \partial_\omega \gamma_{12}, \\ B = & -\gamma_0 \partial_\omega \gamma_0 + \gamma_{12} \partial_\omega \gamma_{12}, \\ C = & A + 2\gamma_0 \partial_\omega \gamma_{12} + 2\gamma_{12} \partial_\omega \gamma_0 + \\ & + 4g_{12} - 6i(\gamma_0 - \gamma_{12}), \\ D = & B - 4g_{12} + 2i(3\gamma_0 + \gamma_{12}), \\ \alpha = & \Delta \bar{k} \bar{R} / 2, \quad \omega_c = \omega - \omega_0. \end{aligned}$$

Соответствующие графики представлены на рис. 2. Хорошо видно, что с ростом параметра немарковости  $\gamma_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \omega}$  контур деформируется и его максимумы смещаются. Это связано, по всей видимости, с деформацией структуры энергетических уровней, к которым приводят эффекты памяти. Данный факт, как нам кажется, может быть обнаружен при проведении прецизионных экспериментов с атомами в ловушках.

одного атома,  $R$  – расстояние между атомами,  $\bar{\mu}_p$  – единичный вектор дипольного момента  $p$ -го атома,  $\bar{e}_R$  – единичный вектор в направлении  $R$ .

## 2.2. Контур спектральной линии

Как было показано в статье [15], контур линии излучения определяется формулой

$$\begin{aligned} S(\omega, \Delta \bar{k}) = & \frac{1}{\pi} Re \left\{ \int_0^\infty (\langle \sigma_1^+(t) \sigma_1^-(0) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle \sigma_2^+(t) \sigma_2^-(0) \rangle) e^{-i\omega t} dt + \right. \\ & \left. + \cos(\Delta \bar{k} \bar{R}) \int_0^\infty (\langle \sigma_2^+(t) \sigma_1^-(0) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle \sigma_1^+(t) \sigma_2^-(0) \rangle) e^{-i\omega t} dt \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Delta \bar{k} = \bar{k}' - \bar{k}$  – разность волновых векторов падающей и излученной волн,  $\bar{R}$  – вектор, направленный от одного атома к другому, его модуль равен расстоянию между атомами. Слагаемые, пропорциональные  $\cos(\Delta \bar{k} \bar{R})$ , описывают интерференцию излучения, исходящего от разных атомов.

Используя квантовую теорему регрессии [10], из решения уравнения (21) можно построить контур линии излучения, который имеет вид

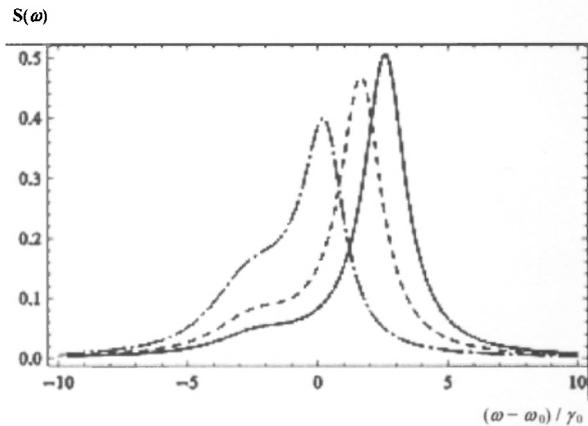


Рис. 2. Контур линии излучения взаимодействующих двухуровневых атомов в немарковском случае. Параметры в системе:  $kR = \pi/5$ ,  $\gamma_0 = 1$ ,  $\Delta \bar{k} \bar{R} = \pi/6$ ,  $\rho_{ss} = 0.8$ ,  $\rho_{uu} = 0.1$ ,  $\rho_{su} = 0.1$ ,  $\rho_{su} = 0$ . Сплошная кривая –  $\gamma_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \omega} = 0$  (марковский случай), штрих-пунктирная кривая –  $\gamma_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \omega} = 5$ , пунктирная кривая –  $\gamma_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \omega} = 2$



### Заключение

В работе рассмотрена квантовая немарковская релаксация для двухуровневого атома во внешнем лазерном и системы из двух идентичных взаимодействующих атомов в приближении короткой памяти.

В случае одиночного атома показано, что учет эффектов памяти приводит к смещению максимума спектральной линии. Смещение зависит от постоянной распада и деформирует спектр флуоресценции атома во внешнем поле.

В приближении короткой памяти построено немарковское обобщение операторного кинетического уравнения для двух идентичных диполь-дипольно взаимодействующих атомов. На основе решения полученного уравнения аналитически построен контур линии излучения. Показано, что немарковость приводит к его заметным деформациям. Данный факт может наблюдаться в прецизионных экспериментах с атомами в ловушках.

Заметим, что полученное немарковское квантовое кинетическое уравнение сохраняет все привлекательные черты соответствующего марковского уравнения, а именно сохраняется след матрицы плотности и ее эрмитовость. Выведенное уравнение имеет достаточно простую структуру по сравнению с традиционными немарковскими уравнениями, что позволило найти его аналитические решения и рассчитать двухвременные атомные корреляторы в случае одного и двух двухуровневых атомов.

### Список литературы

1. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
2. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высш. шк., 1990. 376 р.
3. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semi-groups // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol.48, №2. P.119–130.
4. *Budini A.A.* Stochastic representation of a class of non-Markovian completely positive evolution // *Phys. Rev. A.* 2004. Vol.69. P.042107(1)–042107(12).
5. *Shabani A., Lidar D.A.* Completely positive post-Markovian master equation via a measurement approach // *Phys. Rev. A.* 2001. Vol.71. P.020101(R)1–020101(R)4.
6. *Gainutdinov R. Kh.* Nonlocal interaction and quantum dynamics // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. Vol.32. P.5657–5678.
7. *Скалли М.О., Зубайри М.С.* Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003. 512 с.
8. *Gangopadhyay G., Ray D.* Non-Markovian master equation for linear and nonlinear systems // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol.46, №3. P.1507–1515.
9. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. Oxford: Oxford University Press, 2002. 630 p.
10. *Lax M.* Noise. XI. Multitime correspondence between quantum and classical stochastic processes // *Phys. Rev.* 1968. Vol.172. P.350–361.
11. *Budini A.A.* Open quantum system approach to single-molecule spectroscopy // *Phys. Rev. A.* 2009. Vol.79. P.043804(1-17).
12. *Kurizki G., Ben-Reuven A.* Theory of cooperative fluorescence from products of reactions or collisions: identical neutral atomic fragments // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol.36. P.90–102.
13. *Gangopadhyay G.* Non-Markovian master equation for linear and nonlinear systems // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol.46. P.1507–1515.
14. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. Oxford: Oxford University Press, 2002. 645 p.
15. *Горохов А.В., Семин В.В.* Расчет спектра флуоресценции для двух взаимодействующих атомов // *Оптика и спектроскопия.* 2009. Т.107, №4. С.617–622.

УДК 533.9, 539.1

## ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ МГНОВЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПОЛЯ В КИНЕТИКЕ ВАКУУМНОГО РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ

Д.Б. Блашке, В.В. Дмитриев\*, П.И. Смолянский\*, С.А. Смолянский\*, А.В. Чертилин\*

Институт теоретической физики, Вроцлав, Польша.

Лаборатория теоретической физики ОИЯИ им. Н.Н. Боголюбова, Дубна, Россия

\* Саратовский государственный университет

E-mail: smol@sgu.ru

Получено точное решение непerturbативных кинетических уравнений, описывающих вакуумное рождение фермионных и бозонных пар в линейно-поляризованном мгновенно включаемом электрическом поле. Показано, что найденные распределения нормированы, в отличие от случая произвольно зависящих от времени внешних полей. Найдены соответствующие перенорми-

рованные функции распределения. Полученные результаты могут быть использованы для вычисления верхних оценок наблюдаемых величин порожденной из вакуума плазмы под действием более реалистических коротких импульсов электрического поля.

**Ключевые слова:** вакуумное рождение, электрон-позитронная плазма, кинетическое уравнение, эффект Швингера.





**Exactly Solvable Model of Instantaneously Switched-On Field In the Kinetics of Vacuum Particle Creation**

**D.B. Blaschke, V.V. Dmitrlev, P.I. Smolyansky, S.A. Smolyansky, A.V. Chertlin**

Exact solutions of the nonperturbative kinetic equations for the description of fermion and boson pair creation in the vacuum are obtained for the case of a linearly polarized instantaneously switched-on electric field. The corresponding momentum distributions are non-integrable. The renormalized distribution functions are also found. The obtained results can be used as estimates for upper limits of different vacuum pair creation effects in the more realistic case of short electric field pulses.

**Key words:** vacuum creation, electron-positron plasma, kinetic equation, Schwinger effect.

**Введение**

В настоящей работе мы рассматриваем точно решаемую модель вакуумного рождения электрон-позитронных или бозон-антибозонных пар в переменном пространственно-однородном электрическом поле линейной поляризации  $\vec{A}(t)(0,0, A(t))$ , которое включается мгновенно,

$$A(t) = [E_0/v]\theta[v(t-t_0)], \quad (1)$$

где  $v$  – масштабный фактор, обсуждаемый ниже, а  $\theta$  – функция Хевисайда, доопределенная таким образом, что  $\theta(0) = 1$  (см., например, [1]). Напряженность электрического поля будет иметь тогда  $\delta$ -образный характер,

$$E(t) = -\dot{A}(t) = E_0\delta[v(t-t_0)], \quad (2)$$

что и обеспечивает возможность точного решения соответствующего кинетического уравнения (КУ) [2]. Подобная модель включения поля была рассмотрена в ранней космологии [3] в связи с проблемой вакуумного рождения массивных векторных бозонов в рамках так называемого инерциального механизма [4] вакуумной генерации частиц в модели с мгновенным включением массы покоя.

Вне проблематики, связанной с вакуумным рождением частиц, модель (2) неоднократно использовалась ранее при описании взаимодействия систем, состоящих из заряженных частиц (плазмы, атомов), с электромагнитным полем (см., например, [5] и имеющиеся там ссылки).

Особенностью подобных моделей в теории вакуумного рождения частиц является отсутствие промежуточной стадии эволюции, когда действует внешнее поле и вакуумные возбуждения имеют квазичастичный характер; здесь в результате мгновенного действия поля (2) сразу генерируются наблюдаемые частицы [6]. Другими словами, in-вакуумное состояние мгновенно переходит в out-состояние.

Неожиданным результатом является отсутствие в рассматриваемой модели порогового критического поля, характерного для точных решений КЭД в случае постоянных полей (см., например, [7]). По-видимому, это связано с тем, что вакуумное возбуждение частиц здесь обусловлено многофотонными процессами в импульсе (1), (2) (в отличие от туннельной интерпретации эффекта в случае постоянного электрического поля). В этом смысле модель вакуумного рождения в поле (1), (2) является альтернативой к модели Заутера–Гейзенберга–Эйлера–Швингера [8]. В промежуточном случае действуют оба механизма.

Ниже использована система единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ .

**Точные решения КУ и их свойства**

В случае линейно поляризованного электрического поля КУ, предназначенные для описания вакуумного рождения бозонных либо фермионных пар, были получены в работах [9, 10]:

$$f(\vec{p}, t) = \frac{1}{2}\lambda(\vec{p}, t) \times \int_{t_0}^t dt' \lambda(\vec{p}, t') [1 \pm 2f(\vec{p}, t')] \cos \theta(\vec{p}, t, t'). \quad (3)$$

Знаки  $(\pm)$  в статическом факторе соответствуют бозонам  $(+)$  и фермионам  $(-)$ . Амплитуда вакуумного перехода в наблюдаемое состояние для фермионов и бозонов равна соответственно

$$\lambda(\vec{p}, t) = \lambda_f(\vec{p}, t) = \frac{eE(t)\epsilon_{\perp}}{\omega^2(\vec{p}, t)}, \quad (4)$$

$$\lambda(\vec{p}, t) = \lambda_b(\vec{p}, t) = \frac{eE(t)P(t)}{\omega^2(\vec{p}, t)}. \quad (5)$$



Здесь  $e$  – заряд электрона со своим знаком,

$$\omega(\vec{p}, t) = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + P^2(t)}, \varepsilon_{\perp} = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2}, \quad (6)$$

$P = p^3 - eA(t)$  – «продольная» компонента кинематического импульса,  $\varepsilon_{\perp}$  – «поперечная» энергия. Наконец,

$$\theta(\vec{p}, t, t') = 2 \int_{t'}^t d\tau \omega(\vec{p}, \tau) \quad (7)$$

– высокочастотная фаза.

Для численного решения задач с КУ (3) удобна эквивалентная (3) система ОДУ

$$\dot{f} = \frac{1}{2} \lambda u, \dot{u} = \lambda(1 \pm 2f) - 2\omega v, \dot{v} = 2\omega u. \quad (8)$$

Предполагается, что функция  $f(\vec{p}, t)$  имеет смысл функции распределения числа частиц с заданными импульсами. Тогда интеграл (плотность числа частиц)

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p f(\vec{p}, t) \quad (9)$$

должен быть сходящийся (в (9)  $g$  – фактор вырождения по спиновым степеням свободы:  $g = 1$  для бозонов и  $g = 2$  для фермионов). Полное число частиц и античастиц будет равно  $2n(t)$ .

Как следует из КУ (3), функция  $f(\vec{p}, t)$  при действии поля (1), (2) имеет ступенчатый вид (при нулевом начальном значении)

$$f(\vec{p}, t) = F(\vec{p}) \vartheta[v(t - t_0)], \quad (10)$$

$$F(\vec{p}) = \frac{\Lambda^2(\vec{p})}{2[v^2 \mp \Lambda^2(\vec{p})]}, \quad (11)$$

верхний и нижний знаки соответствуют бозонам и фермионам. Согласно (2), (4), (5)

$$\lambda(\vec{p}, t) = \Lambda(\vec{p}) \delta[v(t - t_0)], \quad (12)$$

$$\Lambda_f(\vec{p}) = \frac{eE_0 \varepsilon_{\perp}}{\omega_0^2}, \Lambda_b(\vec{p}) = \frac{eE_0 P_0}{\omega_0^2}, \quad (13)$$

а  $\omega_0$  – энергия частицы при включенном поле (т.е. при  $t > t_0$ ),

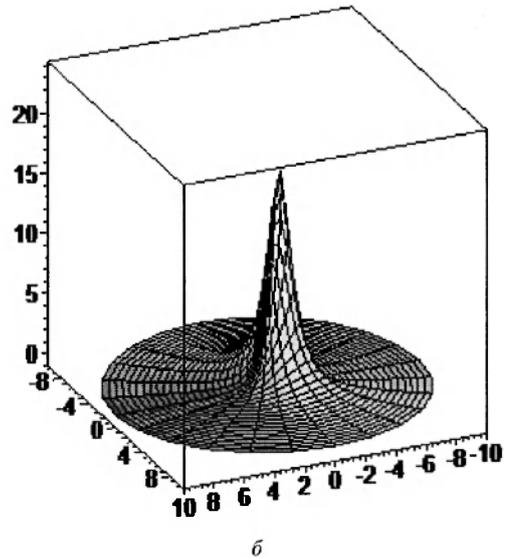
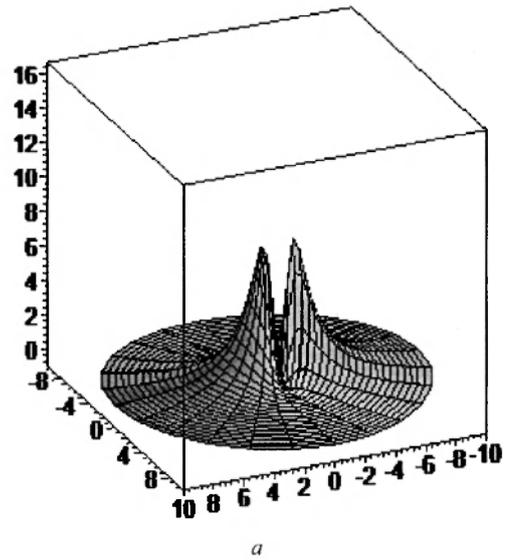
$$\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + P_0^2}, P_0 = P(t_0) = p^3 + e \frac{E_0}{v}. \quad (14)$$

Запишем (13) в безразмерных переменных:

$$\frac{\Lambda_{\pm}}{m} = \frac{\varepsilon \pi_{\pm}}{1 + \pi_{\perp}^2 + \pi_{\parallel}^2}, \quad (15)$$

где  $\varepsilon = E_0/E_c$ ,  $E_c = m^2/e \cong 10^{16}$  В/см – критическое поле;  $\pi_{\perp} = \varepsilon_{\perp}/m$ ,  $\pi_{\parallel} = P_0/m$  и  $a = f, b$ , причем  $\pi_a = \pi_f = \pi_{\perp}$  и  $\pi_a = \pi_b = \pi_{\parallel}$ .

На рисунке показаны бозонное и фермионное распределения для  $E = 0.75E_c$ , где критическое значение поля  $E = E_c = m^2/|e|$  характерно для точных решений уравнений КЭД в постоянном поле.



Бозонное (а) и фермионное (б) распределения для  $E = 0.75E_c$



Был зафиксирован масштабный фактор,  $v = m$ : в КЭД это единственный параметр с необходимой размерностью. Полученные распределения воспроизводят на качественном уровне распределения, характерные для нестационарного векторного потенциала в форме Заутера (см., например, [11]).

Нетрудно получить асимптотику распределений (11), (13) при больших импульсах. Пусть  $|p^3| > |eA(t)|$  и  $p > m$ . Тогда  $p^3 = p \cos \vartheta$  и  $p_\perp = p \sin \vartheta$ , так что ( $\vartheta$  – полярный угол)

$$F_f(\vec{p}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \left( \frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left[ 1 - x \frac{E_0}{E_c} \cos \vartheta \right] \sin^2 \vartheta = (16) \\ = F_f^\infty(\vec{p}),$$

$$F_b(\vec{p}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \left( \frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left( \cos \vartheta - 2x \frac{E_0}{E_c} \cos 2\vartheta \right) \cos \vartheta = (17) \\ = F_b^\infty(\vec{p}).$$

Здесь учтены первых два лидирующих члена асимптотических рядов, устраняющие линейную и логарифмическую расходимость в интеграле (9),  $x = m/p$ . Вклады в интегралы (9) от последних слагаемых с  $x^3$  зануляются в результате интегрирования по углам.

Таким образом, степень убывания на бесконечности обоих распределений недостаточна, чтобы обеспечить сходимость интеграла (9). Другими словами, распределения  $F_f(\vec{p}, t)$  и  $F_b(\vec{p}, t)$  не интегрируемы и, следовательно, не являются, строго говоря, функциями распределения.

Чтобы оценить степень уникальности такой ситуации, рассмотрим асимптотику функции  $f(\vec{p}, t)$  при больших импульсах для линейно поляризованного поля с произвольной зависимостью от времени потенциала  $A(t)$ . Для этого воспользуемся методом асимптотических разложений [12] входящих в систему ОДУ (8) функций. Например, для функции  $f(\vec{p}, t)$  в области  $p \rightarrow \infty$  имеем

$$f(\vec{p}, t) = \sum_{n=1} f_n(t) \frac{1}{p^n}. \quad (18)$$

Подставляя это и аналогичные разложения функций  $u(\vec{p}, t)$  и  $v(\vec{p}, t)$  в систему (8), по-

лучим систему зацепляющихся уравнений для коэффициентов разложения типа (18). В лидирующем приближении отсюда находим при нулевых начальных условиях

$$f_4(t) = \lambda_0^2(t)/2,$$

где

$$\lambda_0^f(t) = eE(t) \sin \vartheta, \quad \lambda_0^b(t) = eE(t) \cos \vartheta \quad (19)$$

для фермионов и бозонов соответственно. Таким образом, в общем случае в КЭД степень убывания на бесконечности функции  $f(\vec{p}, t)$  достаточна, чтобы обеспечить сходимость интеграла (9) и интегрировать  $f(\vec{p}, t)$  как функцию распределения (по сути, такая ситуация давно известна (см., например, [11])). С другой стороны, асимптотики (16), (17) соответствуют реальным частицам, остающимся после выключения поля (2), тогда как асимптотика (1) получена в квазичастичной области действия поля  $A(t)$ . Таким образом, в последнем случае предполагается, что характер асимптотики остается неизменным при выключении поля  $A(t)$ .

Резкое (не адиабатически медленное) включение поля связано с появлением высших гармоник поля, которые приводят к завышенному результату. В частности, это означает, что рассматриваемая модель, основанная на мгновенном включении поля (1), (2), может претендовать на верхнюю оценку наблюдаемых величин по сравнению с результатами более реалистических моделей внешнего поля, в частности ультракороткого лазерного импульса [5].

Соответствующие функции распределения могут быть получены из распределений (10), (11), (13) путем регуляризационной процедуры, основанной на удалении лидирующих вкладов (16), (17) в ультрафиолетовой области:

$$f(\vec{p}) = F(\vec{p}) - F^\infty(\vec{p}) [1 - \exp(-p^2/m^2)]. \quad (20)$$

Обрезающий фактор здесь введен для того, чтобы контрчлены  $F^\infty(\vec{p})$  «работали» только при  $p^2 > m^2$ .

Отсутствие промежуточной (квазичастичной) стадии эволюции в рассматриваемой модели приводит к выключению квантовых осцилляций с высокочастотной фазой (7) и



понижению порядка системы ОДУ (8): она замещается системой  $\dot{f} = \lambda u/2$ ,  $\dot{u} = \lambda(1 \pm 2f)$ , т.е.  $v = 0$ .

Асимптотики (16), (17) приводят к линейной расходимости плотности числа частиц (9), которая представляет собой минимальный (нулевой) момент функции распределения. При вычислении других макроскопических величин (плотности тока, энергии, давления) степени расходимости соответствующих интегралов увеличиваются (например, появляется квадратичная расходимость в плотности тока проводимости). Остается открытым вопрос о физической обоснованности регуляризационной процедуры в подобных случаях ультрафиолетовой расходимости степенного типа. Заметим, что при мгновенном включении поля (1), (2) плотность тока также, по-видимому, будет сингулярна (при конечной перенормированной проводимости), и становится необходимым учет обратной реакции.

#### Заключение

Полученные в работе аналитические решения (10), (11), (13) сложных интегрально-дифференциальных КУ типа (3) очень удобны для получения верхних оценок наблюдаемых физических величин электрон-позитронной и бозон-антибозонной плазмы, генерируемой из вакуума под воздействием коротких импульсов электрического поля. Достаточно сказать, что при компьютерных вычислениях возникают трудности при «больших» временах  $t > 1/m$ , которые отсутствуют в аналитических решениях. Это открывает новые перспективы как при оценках конкретных эффектов в линейно поляризованных электрических полях, так и в случае полей произвольной поляризации [14], когда неустойчивую роль начинают играть спиновые эффекты и число ОДУ с трех уравнений (8) увеличивается до 16-ти. Ситуация еще больше усложняется при кинетическом описании партонной плазмы в области сильно неравновесной эволюции на ранних стадиях формирования кварк-глюонной плазмы при столкновении ультрарелятивистских тяжелых ионов [15]. Здесь модель мгновенного включения глюонного поля также может оказаться полезной.

Мы показали, что в КЭД в случае линейной поляризации поля лидирующие члены асимптотических разложений точного решения со ступенчатым включением взаимодействия и функции распределения, удовлетворяющей КУ (3), различаются и необходимо использовать регуляризационную процедуру для восстановления интегрируемости распределения (10), (11). Было бы интересно сравнить разобранный случай с другими способами возбуждения вакуума (присутствие магнитного, цветового или гравитационного поля, инерциальный механизм).

Авторы благодарны М.В. Давидовичу за полезные замечания.

#### Список литературы

1. Doetsch G. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace Transformation. Munchen: Springer, 1967. 198 p.
2. Pervushin V.N., Skokov V.V., Reichel A.V., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V. The kinetic description of vacuum particle creation in the oscillator representation // Intern. J. Mod. Phys. A. 2005. Vol.20. P.5689.
3. Смолянский С.А., Блашке Д.Б., Дмитриев В.В. Вакуумное рождение Z. W бозонов в ранней Вселенной как дополнительный источник реликтового излучения // Тр. II Всерос. школы-семинара GRACOS 2009 «Современные проблемы теории гравитации и космологии» / Под ред. Ю.Г. Игнатъева. Казань: Фолиант, 2009. С.130.
4. Filatov A.V., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Toneev V.D. Inertial mechanism: dynamical mass as a source of partial creation // ЭЧАЯ. 2008. Т.39. С.886.
5. Popov Yu.V., Kouzakov K.A., Vinitzky S.I., Gusev A.A. Interaction of Attosecond Electromagnetic Pulses with Atoms: the Exactly Solvable Model // ЯФ. 2007. Т.70. С.629–634.
6. Смолянский С.А., Блашке Д.Б., Тараканов А.В., Шмидт С.М. Вакуумное рождение в сильных полях: статистические аспекты // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т.17, №5. С.17.
7. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоиздат, 1988.
8. Sauter F. Über das Verhalten eines electrons im homogenen elektrischen field nach der relativistische theory Dirac // Z. Phys. 1931. Vol.69. P.742.
9. Schmidt S.M., Blaschke D.B., Ropke G., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V. A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism // Intern. J. Mod. Phys. 1998. Vol.7. P.709.
10. Kluger Y., Mottola E., Eisenberg J.M. The quantum Vlasov equation and its Markov limit // Phys. Rev. 1998. Vol.D58. P.125015.
11. Винник Д.В., Мизерный В.А., Prozorkevich A.V., Смолянский С.А., Тонеев В.Д. Кинетическое описание вакуумного рождения частиц при столкновениях релятивистских ядер. Препринт ОИЯИ, 2000. №P2-2000-85.



12. Зельдович Я.Б., Старобинский А.А. Рождение частиц и поляризация вакуума в анизотропном гравитационном поле // ЖЭТФ. 1971. Т.61. С.2161.
13. Filatov A.V., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A. Pair creation by electromagnetic wave in a self-created plasma // Proc. of SPIE. 2006. Vol.6165. P.616509.
14. Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Bravina L.V., Zabrodin E.E. Dynamical Casimir effect in an expanding flux tube //

Proc. of the XVIII Baldin Intern. Seminar on High Energy Physics Problems «Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics» / Eds. A.N. Sisakian, V.V. Burov, A.I. Malakhov. Dubna, 2008. Vol.2. P.75.

15. Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Ilyine S.V. Kinetic equation for the quark Wigner function in strong gluon fields // Теоретическая физика. 2002. Т.3. С.108.

УДК 537.8; 539.186.2

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Ю.Н. Зайко

ФГОУ ВПО Поволжская академия государственной службы  
им. П.А. Столыпина, Саратов  
E-mail: zyrnick@rambler.ru

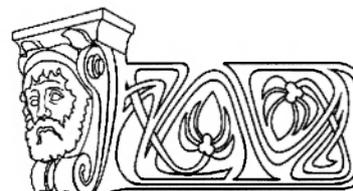
В работе исследовано влияние собственного гравитационного поля сферической электромагнитной волны (ЭМВ) на ее распространение в вакууме. Получено решение уравнений Максвелла совместно с уравнениями тяготения Эйнштейна. Вид метрики предполагается таким же, как в известной шварцшильдовской задаче о поле тяготения в окрестности точечной массы с учетом дополнительной зависимости от полярного угла  $\theta$ . Получены уравнения для радиальной и угловой части поля ЭМВ для волны  $E$ -типа. Исследованы их различные решения. Показано, что наряду с решением, описывающим поле бегущей ЭМВ на больших расстояниях, существует решение инстантонного типа, описывающее в квазиклассическом приближении процесс туннелирования между асимптотически вырожденными состояниями, соответствующими сходящейся и расходящейся сферическим ЭМВ. Получены точные выражения для решений обоих типов, а также точные выражения для соответствующих метрик. Рассмотрены решения уравнений Максвелла–Эйнштейна (Максвелла) для волн, обладающих нулевым орбитальным моментом импульса. Показано, что в статическом случае они описывают поля точечных зарядов – электрического  $e$  и магнитного  $m$ . Показано, что симметрия уравнений Максвелла в вакууме относительно группы  $U(1)$  дуальных преобразований:  $(\mathbf{E}+i\mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{E}+i\mathbf{H})^\alpha$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – электрическое и магнитное поля, где  $\alpha$  – вещественный параметр переносится и на обобщенный заряд  $e + im$ , который преобразуется так же. Спонтанное нарушение симметрии этой группы, при котором  $tga = -m/e$ , сопровождающееся в силу теоремы Голдстоуна появлением безмассовых частиц – фотонов, приводит к невозможности наблюдения магнитных зарядов в Природе.

**Ключевые слова:** метрика, инстантон, магнитный заряд, монополь Дирака, дуальная группа, теорема Голдстоуна, спонтанное нарушение симметрии.

### An Explicit Solutions of the Maxwell–Einstein Equations

Yu.N. Zayko

This article concerns the effect of gravitation field of the spherical electro-magnetic wave (EMW) on its propagation in vacuum. For this it was received a solution of the coupled Maxwell–Einstein equations. The expression for metric is supposed to be just the same as in well-known Schwarzschild problem for gravitation field at the vicinity of point mass with additional dependence on polar angle  $\theta$ . The equa-



tions for radial and angular parts of EMW fields of TE- and TM-types are received. Their various solutions are investigated. It is shown that in addition with traveling wave EMW at a great distance some new solution of so-called instanton type exists. It describes the process of quantum tunneling between degenerate states corresponding to convergent and divergent spherical waves in quasiclassical approximation. An explicit solutions for waves of both types are received so as an expressions for corresponding metrics.

The solutions of the Maxwell–Einstein (Maxwell) equations are considered for waves which have zero value of moment momentum. It was shown that in static case they describe fields of point charges – electric  $e$  and magnetic  $m$ . It was shown that symmetry of Maxwell equations with respect to group  $U(1)$  of dual transformations:  $(\mathbf{E}+i\mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{E}+i\mathbf{H})^\alpha$ ,  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$  are electric and magnetic fields,  $\alpha$  – is real parameter is valid for generalized charge  $e + im$ , which is transformed in the same manner. Spontaneous breaking of symmetry of this group, which is characterized  $tga = -m/e$ , leads to arising massless particles – photons due to Goldstone theorem. This also leads to the fact that magnetic charges cannot detect in Nature.

**Key words:** metrics, instanton, magnetic charge, Dirac's monopole, dual group, Goldstone's theorem, spontaneous breaking symmetry.

### Введение

О геометрии пространства–времени можно судить по поведению световых лучей [1]. При этом предполагается, что вид световых волн, которым соответствуют лучи, не важен. В настоящей работе показано, что это не так, т.е. геометрия будет разной, например, для плоских и сферических волн. Причина этого – в собственном гравитационном поле сферической электромагнитной волны (ЭМВ). Действительно, лучи, нормальные к фронту сферической волны, направлены под углом друг к другу и, следовательно, их вклад в гравитационное поле отличен от нуля. Вид соответствующей метрики для слабого гравитационного поля определен в [2].



В настоящей работе этот эффект исследован для гравитационного поля сферической ЭМВ произвольной величины. В то же время лучи, нормальные к фронту плоской ЭМВ, параллельны друг другу, не вносят вклада в гравитационное поле [2] и, следовательно, не изменяют метрику.

**Исходные уравнения**

В качестве исходных уравнений выберем уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения электромагнитного поля в вакууме (уравнения Максвелла), связанные друг с другом [1, 2]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi K}{c^4} T_{ik}; \quad F^{ik} + \Gamma^l_{kl} F^{ik} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $R$  – след тензора Риччи  $R^i_k$ :  $R = R^i_i$ ,  $g_{ik}$  – метрический тензор;  $T_{ik}$  и  $F^{ik}$  – тензор энергии-импульса и электромагнитный тензор;  $\Gamma^l_{kl}$  – символы Кристоффеля;  $c$  – скорость света в вакууме,  $K$  – постоянная тяготения; индексы  $i, k, l$  пробегает значения 0, 1, 2, 3; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; запятая означает обычную, т.е. не ковариантную производную [1]. Будем искать решения (1), соответствующие наличию на бесконечности сферической ЭМВ. Для этого, следуя [1], зададим вид интервала

$$ds^2 - e^v c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2), \quad (2)$$

где  $v = v(t, r, \theta)$ ,  $\lambda = \lambda(t, r, \theta)$ ;  $x^0 = ct$ ,  $t$  – время;  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$  – сферические координаты. ЭМВ характеризуется частотой  $\omega$ , полным моментом импульса  $J$  и его проекцией на направление оси  $z$  –  $J_z$ . Кроме того, ЭМВ можно характеризовать орбитальным моментом  $L$ , который коммутирует с  $J$  и  $J_z$ . Выберем ось  $z$  системы координат таким образом, чтобы  $J_z = 0$ . Это упростит задачу, поскольку позволит опустить в уравнениях (1) зависимость от азимутального угла  $\varphi$ .

Второе уравнение (1) можно привести к виду [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) - \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{-g} F^{0\alpha}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{0\beta}) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad \sqrt{-g} = e^{\frac{\lambda+v}{2}} r^2 \sin^2 \theta.$$

При этом  $\alpha = 1, 2$  соответствуют волне  $E$ -типа, а  $\alpha = 3$  – волне  $M$ -типа. Ниже мы ограничимся рассмотрением волны  $E$ -типа<sup>1</sup>, для которой отличными от нуля компонентами вектор-потенциала и электромагнитного тензора являются  $A_1, A_2$  и

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0}, F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}, F_{02} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0}. \quad (4)$$

При этом мы используем калибровку  $A_0 = 0$ . Для разделения переменных наложим дополнительное условие:  $\lambda = \alpha(r, t) + \beta(\theta)$ ,  $v = -\alpha(r, t) + \beta(\theta)$ . Подставляя (4) в (3), получим два уравнения для компонент  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(r,t)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 e^{-\beta(\theta)} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial A_2}{\partial t} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) \right] - \\ - e^{\alpha(r,t)} \frac{r^2}{c^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{-\beta(\theta)} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом первое из уравнений (3) является следствием (5). Дифференцируя первое уравнение в (5) по  $r$ , а второе – по  $ct$ , исключим из уравнений  $A_2$ . Представляя  $F_{01} = \Psi(r, t) \cdot \Phi(\theta)$ , получаем уравнения для  $\Psi(r, t)$  и  $\Phi(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + c i g \theta \frac{d\Phi}{d\theta} + l(l+1) e^{-\beta(\theta)} \Phi &= 0, \\ e^{-\alpha(r,t)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \Psi) - e^{\alpha(r,t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r^2 \Psi) - \\ - l(l+1) \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что при  $\tilde{v} \rightarrow 0$   $\Phi(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$ , где  $P_l(\cos \theta)$  – полином Лежандра, причем  $l$  является целым неотрицательным числом [3, 4]. Оно соответствует значению  $L$  орбитального момента импульса волны<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Решение задачи для волны  $M$ -типа не требует отдельного рассмотрения, поскольку перестановочная двойственность уравнений Максвелла, т.е. инвариантность относительно преобразования  $E \rightarrow -H, H \rightarrow E$ , распространяется и на уравнения Максвелла-Эйнштейна из-за того, что тензор энергии импульса  $T_{ik}$  остается при этом инвариантным.

<sup>2</sup> Т.е. величина  $l(l+1)$  является собственным значением оператора  $L^2$ .



## Тензор энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса  $T_k^i$  можно выразить через компоненты метрического тензора  $g_k^i$  в соответствии с уравнениями тяготения Эйнштейна [1]:

$$\frac{8\pi K}{c^4} T_k^i = R_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i R, \quad (7)$$

где  $\delta_k^i$  – единичный 4-тензор, а  $R$  – след тензора  $R_k^i$ . Детали вычислений можно найти,

например, в [1]. Кроме символов Кристоффеля, приведенных в [1], нам понадобятся дополнительные, знак  $\sim$  (тильда) означает производную по углу  $\theta$ :

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\tilde{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{\tilde{\nu}}{2},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\tilde{\lambda} e^\lambda}{2r^2}, \quad \Gamma_{00}^2 = \frac{\tilde{\nu} e^\nu}{2r^2}.$$

Окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 &= -e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\tilde{\beta}}{2r^2} (2\tilde{\beta} + 1), \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^1 &= -e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \left[ 2\tilde{\beta} + 2(\tilde{\beta})^2 + 2\tilde{\beta} \text{ctg} \theta - \frac{\tilde{\beta}}{2} \right], \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_2^2 &= \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} \left[ \alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] + \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2r^2} \left[ \tilde{\beta} + (\tilde{\beta})^2 - \tilde{\beta} \text{ctg} \theta - \frac{\tilde{\beta}}{2} \right], \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_3^3 &= \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} \left[ \alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] + \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - \frac{1}{2r^2} \left( \tilde{\beta} - \tilde{\beta} \text{ctg} \theta + \frac{\tilde{\beta}}{2} \right), \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_0^1 &= -e^{-\alpha-\beta} \frac{\dot{\alpha}}{r}; \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_0^2 = 0; \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_1^2 = -\frac{2\tilde{\beta}}{r^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выразим компоненты тензора энергии-импульса  $T_k^i$  через решения уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ \frac{3}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[ \frac{3}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^1 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ \frac{3}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 - \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[ \frac{1}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{3r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_2^2 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[ \frac{3}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 - \frac{3r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_3^3 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[ -\frac{1}{4r^2} e^{-\alpha-\beta} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{r^2}{4} e^{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_0^1 &= -\frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\alpha-\beta}}{[l(l+1)]^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right) \Phi^2; \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_0^2 = \frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\beta}}{l(l+1)} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^2 &= \frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\beta}}{l(l+1)} \frac{\Psi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Psi) \Phi^2. \end{aligned} \quad (8a)$$

При этом, строго говоря, правые части в (8a) следует усреднять по времени. Однако эту

процедуру можно выполнить на любом этапе вычислений.



**Решение уравнений**

Вычитая в (8а) из первого уравнение второе и из третьего четвертое и приравнивая результатам аналогичных операций с одноименными компонентами тензора  $T'_k$ , выраженными через компоненты тензора  $g'_k$  (8), получим уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{2K}{c^4} \left[ e^{-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + e^{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} r^2 \Psi \right)^2 \right] = \\ & = \frac{e^{\beta} [l(l+1)]^2}{\Phi^2} \left[ \tilde{\beta} + 2\tilde{\beta}^2 + \tilde{\beta} \left( ctg\theta + \frac{1}{4} \right) \right] = A, \\ & \frac{2K}{c^4} \left[ e^{-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 - e^{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} r^2 \Psi \right)^2 \right] = \\ & = \frac{e^{\beta} [l(l+1)]^2}{\Phi^2} \left[ \tilde{\beta} + \frac{\tilde{\beta}^2}{2} - \tilde{\beta} ctg\theta \right] = B. \end{aligned} \quad (9)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  играют роль интегралов (6). Остальные уравнения, получающиеся из компонент  $T_0^1$  и  $T_1^2$  после усреднения по времени, приведут к уравнениям

$$\dot{\alpha} = 0, \quad \dot{\tilde{\beta}} = 0, \quad (9a)$$

а из  $T_0^2$  – к тождеству. Заметим, что операция усреднения не отразится на уравнениях (9).

Второе уравнение в (6) описывает при  $r \rightarrow \infty$  плоскую бегущую волну, откуда следует, что постоянная  $B = 0$ . Выражая из второго уравнения (9)  $e^{\alpha}$  через решения волнового уравнения и подставляя это выражение во второе уравнение (6), получим (штрих означает производную по  $r$ , точка – по  $x^0$ ):

$$\begin{aligned} & e^{\alpha} = \pm \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x^0} \right)^{-1}; \\ & f'' - \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \dot{f} \mp \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{f'}{f} f = 0; \quad (10) \\ & f = r^2 \Psi, \end{aligned}$$

знаки “±” соответствуют сходящейся и расходящейся волне. Граничным условием для этого уравнения является наличие плоской бегущей волны при  $r \rightarrow \infty$ .

Решения (6), порождаемые первым из уравнений (9), исследуем в псевдоевклидовом пространстве с метрикой, определяемой заменой временной координаты  $x^0$  простран-

ства Минковского на «временную» координату  $-iy^0$  псевдоевклидова пространства, одновременно вводя псевдоевклидово действие  $\Lambda$ , связав его с действием в пространстве Минковского  $S$  выражением  $\Lambda = iS, i = (-1)^{1/2}$ . Как известно [5], локализованным решениям евклидовых полевых уравнений с конечным евклидовым действием соответствуют инстантоны. Инстантоны классических полевых уравнений в пространстве Минковского описывают в квазиклассическом приближении квантовый процесс туннелирования между вырожденными классическими состояниями. Второе уравнение (6) после такой замены из гиперболического превращается в эллиптическое. Накладывая на его решения условие ограниченности при  $r \rightarrow \infty$ , получим из первого уравнения (9)  $A = 0$  и приведем его к виду

$$\begin{aligned} & e^{\alpha} = \pm \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial y^0} \right)^{-1}; \\ & f'' + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \dot{f} \mp \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{f'}{f} f = 0; \quad (11) \\ & f = r^2 \Psi, \end{aligned}$$

где штрих по-прежнему означает дифференцирование по  $r$ , а точка – дифференцирование по  $y^0$ .

Правые части уравнений (9) определяют зависимость  $\beta(\theta)$ . Из их вида, а также из (9а) следует, что их решением является константа  $\beta(\theta) = \beta_0$ . Ниже мы положим  $\beta_0 = 0^3$ . В этом случае угловое распределение полей ЭМВ будет таким же, как и без учета гравитационного взаимодействия.

Займемся решением уравнений (10) и (11). Решение уравнения (10) в комплексной плоскости  $z$  имеет вид  $f(z,t) = F(z)e^{\pm i\omega t}$ ,  $|z| = \omega r/c$ ,  $\omega$  – частота. Для  $F(z)$  получим уравнение

$$FF'' - (F')^2 + i \frac{l(l+1)}{z^2} FF' = 0; F' = \frac{dF}{dz}. \quad (12)$$

<sup>3</sup> В случае  $\beta \neq 0$ , отвечающем метрике, отличающейся на бесконечности от плоской, на  $l$  накладывается условие  $l(l+1)e^{-\beta} = k(k+1)$ , где  $k$  – неотрицательное целое. Для произвольного  $\beta$  это уравнение имеет решение  $l = k = 0$ , что приводит к эффективному значению  $r_c = 0$ .



Точное решение для  $F$  с граничным условием на бесконечности  $F \sim e^{iz}$  имеет вид

$$\ln F = C_1 \int e^{\frac{i(l+1)}{z}} dz = C_1 \left[ ze^{\frac{i(l+1)}{z}} - il(l+1) \cdot Ei\left(i \frac{l(l+1)}{z}\right) + C_2 \right], \quad (13)$$

где  $Ei(x)$  – интегральная показательная функция,  $C_1 = i$  и  $C_2$  – постоянные.

Значение величины  $e^\alpha = F'(z)/iF(z)$ , определяющее метрику в (10), вычисляем с помощью формул Даламбера–Эйлера [6]

$$e^\alpha = \exp\left(\frac{r_c}{r}\right), \quad r_c = \frac{l(l+1)c}{\omega}. \quad (14)$$

Решение уравнения (11) ищем в виде  $f(z, y^0) = F(z)e^{i\omega t}$ ,  $z = \omega r/c$ ,  $y^0 = ct$ . Подставляя это в (11), получим уравнение для функции  $F(z)$ :

$$FF'' + (F')^2 - \frac{l(l+1)}{z^2} FF' = 0, \quad (15)$$

штрих означает производную по  $z$ . Решение (15), конечное при  $z \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$F^2(z) = C_1 \left[ ze^{\frac{l(l+1)}{z}} + l(l+1) \cdot Ei\left(-\frac{l(l+1)}{z}\right) \right] + C_2, \quad (16)$$

где  $C_{1,2}$  – постоянные. При этом выражение для метрического коэффициента в (10) имеет вид ( $C_2 = 0$ )

$$e^\alpha = \frac{c}{2\omega r} \left[ 1 + \frac{r_c}{r} e^{r_c/r} Ei\left(-\frac{r_c}{r}\right) \right]^{-1}, \quad (17)$$

$$r_c = \frac{l(l+1)c}{\omega}.$$

Вычислим действие для (16) в искривленном пространстве–времени [1]:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} \sqrt{-g} d\Omega; \quad (18)$$

$$d\Omega = dx^1 dx^2 dx^3;$$

$$\sqrt{-g} = r^2 e^{\beta(\theta)} \sin \theta.$$

Переходя к действию в псевдоевклидовом пространстве  $A = iS_f$ ,  $dx^0 = -idy^0$ , а также учитывая нормировку  $\Phi(\theta)$  [3], получим (для  $\beta = 0$ ):

$$\Lambda(r_0) = \frac{C_1}{4\omega(2l+1)} \times \int_0^{r_0} \left[ \frac{\omega}{cr^2} \int_0^r e^{-r_c/r} dr + \frac{1}{r_c^2} e^{-r_c/r} \right] dr. \quad (19)$$

Постоянная  $C_1 > 0$ , поскольку  $\Lambda > 0$ . На рис. 1 показана зависимость  $\Lambda(r_0)$  от размера  $r_0$  инстантона.

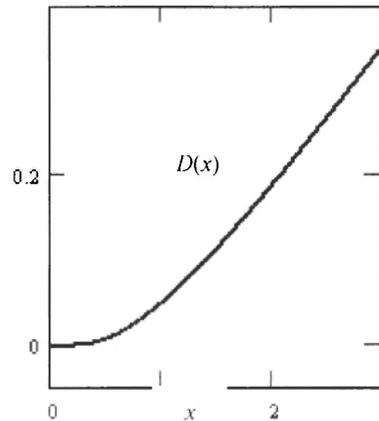


Рис. 1. Зависимость величины евклидова действия  $\Lambda$  от размера инстантона  $r_0$ .  $D(x) = \Lambda(x)/(C_1/4c)$  – безразмерное действие;  $x = r_0/r_c$  – безразмерное расстояние;  $l = 1$

Исследуем поведение геодезических. Для этого перепишем уравнение для интервала (2), полагая  $d\theta = d\varphi = 0$ :

$$ds^2 = e^{-\alpha} c^2 dt^2 - e^\alpha dr^2 = 0. \quad (20)$$

Подставляя значение  $e^\alpha = \exp(r_c/r)$ , находим уравнения геодезических:

$$t = \pm \frac{1}{c} \int_0^r e^{r_c/r} dr. \quad (21)$$

На рис. 2 показаны решения этого уравнения. Ввиду того что подынтегральная функция сингулярна при  $r = 0$ , при вычислении интеграла постоянный предел полагался равным некоторой малой величине  $b \neq 0$ . В приведенном на рис. 2 случае  $b = 0.15$ . Это сказывается на поведении кривых, изображенных на рисунке. Производные  $dr/dt$  на обеих ветвях «светового конуса» обращаются в нуль при  $r = 0$ , что является результатом искривления пространства–времени под действием собственного гравитационного поля ЭМВ. По часам удаленного наблюдателя лучу требуется бесконечное время для дости-

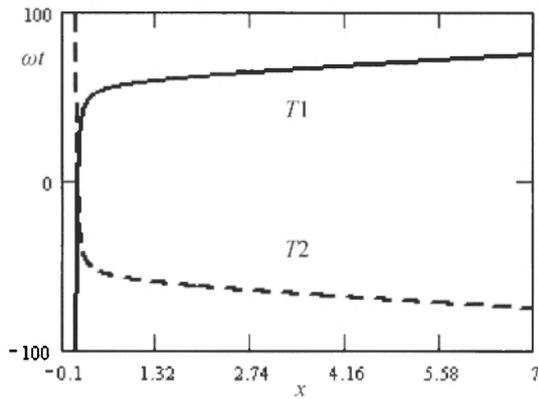


Рис. 2. Геодезические (траектории световых лучей).  $T_i = \omega t$ ,  $x = r/r_c$ ,  $i = 1$  (сплошная кривая) соответствует знаку «+»,  $i = 2$  (пунктирная кривая) – знаку «-» в формуле (21);  $l = 1$ . Ось ординат проведена через  $x = -0.1$ .

жения точки  $r=0$  за исключением случая  $l=0$ , когда геодезические имеют вид  $t = \pm r/c$ . Это выражается в том, что интеграл (21) расходится, а две ветви (21) уходят в бесконечность при  $b \rightarrow 0$ .

Таким образом, геометрия пространства–времени, получаемая из исследования поведения сферических ЭМВ, отличается от геометрии плоского пространства–времени, построенной с помощью плоских ЭМВ. Кроме того, использование решений (1) инстантонного типа позволит по-новому трактовать процесс преобразования сходящейся сферической ЭМВ в расходящуюся. Действительно, сходящаяся ЭМВ может перейти в расходящуюся за конечное время для  $l \neq 0$  только при условии, что при каком-то значении  $r_0$  она перейдет в инстантонное состояние с вероятностью  $\sim \exp(-\Lambda_0 / \hbar)$  ( $\hbar$  – постоянная Планка,  $\Lambda_0 = \Lambda(r_0)$ ), чтобы затем перейти в расходящуюся ЭМВ. Это, в свою очередь, означает, что информация из сферы радиусом  $r_0$  не передается из прошлого в будущее.

#### Исследование решений с $l = 0$

Рассмотрим решения уравнений Максвелла–Эйнштейна, или, точнее, Максвелла для  $l = 0$ , поскольку, как было сказано, такие решения не искривляют пространство–время и, следовательно, могут быть описаны только с помощью последних. Как легко показать, они имеют вид для  $E$ -волны:

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{i\omega q}{cr} \operatorname{ctg}\theta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)}, \\ H_\varphi &= \pm \frac{i\omega q}{cr} \operatorname{ctg}\theta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)}, \\ E_r &= \frac{q}{r^2} e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $q$  – постоянная, знаки  $\pm$  в экспоненте соответствуют сходящейся и расходящейся волне. Соответствующие решения для  $M$ -волны получаются заменой  $E \rightarrow -H$ ,  $H \rightarrow E$  [7].

Отметим некоторые особенности решений уравнений Максвелла (22) в контексте настоящей статьи. В традиционной электродинамике, рассматривающей конечные области пространства без источников, постоянную  $q$  в (22) полагают равной нулю [4]. Если же применять уравнения Максвелла к Вселенной в целом, то, во-первых, приходится отказаться от условия излучения [4], согласно которому на бесконечности присутствуют только расходящиеся волны. Во-вторых, сходящиеся волны могут играть роль источников для расходящихся волн, и поэтому постоянная  $q \neq 0$  в (22). Ее значение можно связать со спектральной плотностью энергии излучения, приходящего из Вселенной. В общем случае к правым частям (22) можно добавить слагаемые вида

$$\frac{p}{\operatorname{Sin}\theta} e^{i\omega\left(\frac{r}{c} \mp t\right)},$$

где  $p$  – постоянная. Ниже мы ограничимся рассмотрением решений (22) для  $p = 0$ . Решения (22) описывают состояния электромагнитного поля, обладающие только спиновым моментом импульса, имеющим проекцию на ось  $z$ ,  $s_z = 0$ . Как отмечается в [8, с.32], разделение момента фотона на орбитальный и спиновый лишено физического смысла. Это связано с тем, что для фотонов в отличие от массивных частиц невозможно отделить спиновые степени свободы от орбитальных<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Для электронов, например, влияние спина проявляется в разложении решений уравнений Дирака по степеням  $c^{-1}$  ( $c$  – скорость света) в членах порядка не ниже первого. В нулевом порядке, соответствующем пределу  $c \rightarrow \infty$ , уравнение Дирака переходит в уравнение Шредингера, не учитывающее влияние спина [8, с.144]. Уравнения Максвелла сами по себе первого порядка по  $c^{-1}$ .



С точки зрения симметрии по отношению к вращениям решения (22), соответствующие, как уже было сказано, значению  $l = 0$ , характеризуются значением  $j = 1$ , определяющим полный момент  $J: J^2 = j(j + 1)^2$ . Проекция спина фотона  $s$  на направление его импульса, т.е. спиральность,  $\lambda = \pm 1$  [8]. Отсюда, а также из условия  $s_r = 0$ , следует, что (22) соответствует фотонам, импульс которых нормален к выбранной оси  $z$ .

Чтобы лучше понять свойства решений (22) и, в частности, вычислить постоянную  $q$ , входящую в них, воспользуемся методом эквивалентных источников [7]. Применяя последовательно к первому и второму уравнениям (22) теоремы Гаусса и Стокса [3], получим выражения для линейной плотности заряда и тока эквивалентных источников. Ниже приведено выражение для распределения тока  $I(\rho, z)$  (выражение для плотности заряда не приводится ввиду его громоздкости):

$$I(\rho, z) = \mp \frac{i\omega q}{2} \frac{z}{r} e^{i\omega \left( \frac{r+z}{c} \right)}, \quad r = \sqrt{z^2 + \rho^2}, \quad (23)$$

где  $\rho$  и  $z$  – цилиндрические координаты. Распределение имеет цилиндрическую симметрию, что демонстрирует часто встречающееся явление – спонтанное нарушение симметрии исходной задачи, имеющей сферическую симметрию. Это свойство позволяет при вычислении потока энергии сходящейся или расходящейся волны учитывать только часть потока, нормальную полярной оси  $z$ , что обеспечивает сходимость соответствующего выражения. Используем выражение для вектора Умова–Пойнтинга  $\mathcal{S}$  [1]:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*],$$

$$S_r = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_\theta H_\phi^*).$$

Подставляя сюда выражения для  $E_\theta$  и  $H_\phi$  из (22) и выполняя интегрирование по поверхности сферы радиуса  $r$  с учетом сказанного выше, получим выражение для среднего потока мощности, падающего на эквивалентный источник (или излучаемого им),

<sup>5</sup> Это следует из связи  $l = j \pm 1$  для фотонов электрического типа [8, с.35].

$$\langle S_n \rangle = \langle S_r \cdot \sin \theta \rangle = \frac{\omega^2 |q|^2 \pi}{8c}, \quad (24)$$

откуда можно определить величину  $q$  с точностью до фазы.

Статический случай  $\omega = 0$  требует особого рассмотрения. Последнее уравнение в (22) описывает электрическое поле точечного заряда  $q$  в вакууме. Это свойство уравнений Максвелла является неожиданным, хотя и укладывается в концепцию, выраженную словами А. Эйнштейна: «I feel that it is a delusion to think of the electrons and the fields as two physically different, independent entities. Since neither can exist without the other, there is only one reality to be described, which happens to have two different aspects; and the theory ought to recognize this from the start instead of doing things twice» [9, с.32]. Оно не противоречит сути задачи, так как плотности заряда (но не заряд) и тока в вакууме по прежнему равны нулю. Трудности, связанные с решениями (22), связаны с их интерпретацией. Интересно, что те же трудности для волны  $M$ -типа, связанные с понятием магнитных зарядов, разрешаются (или обходятся) тем, что предполагают существование последних в недоступных областях Вселенной [10].

Покажем, что в рамках концепции Эйнштейна<sup>6</sup> отсутствие в природе магнитных зарядов имеет принципиальное значение и связано, в частности, с отсутствием массы у фотонов. Рассмотренное выше преобразование полей  $E \rightarrow -H, H \rightarrow E$  является частным случаем инвариантности уравнений Максвелла в вакууме относительно непрерывной группы  $U(1)$  «дуальной симметрии»:  $(E + iH) \rightarrow (E + iH)^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  – вещественный параметр [10]. В теории, описывающей взаимодействие электромагнитного поля с другим полем, соответствующим заряженным частицам, например лептонам, эта симметрия нарушается. Но там отсутствие массы у фотонов является следствием калибровочной

<sup>6</sup> Она носит название «полевого монизма» в отличие от традиционной концепции «корпускулярно-полевого дуализма» и согласуется с основным принципом, управляющим любым исследованием окружающего мира, получившим название «принципа экономии при образовании понятий» [12].



инвариантности лагранжиана взаимодействия [11]<sup>7</sup>. Здесь ситуация иная, поскольку «заряды»  $q$  не являются внешними по отношению к электромагнитному полю и привлекать калибровочную группу для описания их взаимодействия с полем нет необходимости, так как и самого взаимодействия нет. Ее роль в доказательстве равенства нулю массы фотона играет дуальная группа. Симметрия дуальной группы распространяется также и на «заряды»  $q$  в (22) – электрический, обозначим его  $e$ , и магнитный –  $m$ , которые должны преобразовываться как  $(e + im) \rightarrow (e + im)^{im}$ . Отсутствие магнитного заряда связано со спонтанным нарушением симметрии дуальной группы, при котором  $tg\alpha \approx -m/e$ . Как всегда, в соответствии с теоремой Голдстоуна, это приводит к появлению безмассовых частиц – фотонов. В квантовой теории доказывается, что  $tg\alpha \approx -137n/2$ ,  $n$  – целое,  $\alpha \approx -\pi/2$ .

Следует отметить, что приведенные рассуждения сохраняют силу и в рамках традиционной концепции корпускулярно-полевого дуализма. Однако в этом случае связь полученного результата с равенством нулю массы фотона уже не столь убедительна.

#### Обсуждение результатов

Обсудим следствия, вытекающие из полученных результатов. Рассмотрим прежде всего их отношение к так называемому Космологическому принципу (КП) [13], лежащему в основе Стандартной модели строения Вселенной. Под последним понимают, что Вселенная в больших масштабах однородна и изотропна. Явным свидетельством этого является высокая изотропность реликтового излучения. Специалисты отмечают неоднозначность КП в том смысле, что неизвестно, какой была Вселенная в разные моменты времени и выполнялся ли КП всегда. При этом обходится стороной вопрос о том, говорится ли в КП о *действительном* или только *кажущемся* состоянии Вселенной, хотя здесь тоже заключена неоднозначность, но, скорее,

понятийная или терминологическая. Полученный результат устраняет эту последнюю неоднозначность. Какой бы ни была Вселенная на разных этапах своего развития, казаться она всегда будет изотропной и, следовательно, однородной, поскольку неизотропная часть излучения, характеризующаяся ненулевыми значениями орбитального момента, никогда не дойдет до нас<sup>8</sup>.

То, что гравитационный эффект ЭМВ связан с отклонением от изотропии было известно ранее. Так, в [2] рассматривался случай слабых гравитационных полей, создаваемых ограниченными по длине пучками света. Используя эти результаты, можно получить распределение скоростей пучков вблизи опорного пучка, скорость которого принимается за 1 (скорость света  $c$  положена равной 1). Используем выражение для интервала  $ds$  вблизи опорного пучка, распространяющегося вдоль оси  $x$  [2]:

$$ds^2 = -(1 - h_{11})dx^2 - dy^2 - dz^2 + (1 + h_{11})dt^2 - 2h_{11}dxdt, \quad (25)$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Здесь  $h_{\mu\nu}$  – поправка к галилеевскому метрическому тензору  $\delta_{\mu\nu}$  плоского пространства–времени. Для световых пучков  $ds^2 = 0$ . Делим  $ds^2$  в (25) на  $dt^2$  и получаем уравнение для скоростей пробных пучков вблизи опорного пучка:

$$(1 - h_{11})v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2h_{11}v_x = 1 + h_{11}, \quad (26)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 0,$$

которое, в свою очередь, можно представить в виде

$$\left(\frac{v_x + h_{11}a}{a}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{\sqrt{a}}\right)^2 = 1, \quad (27)$$

$$a = \frac{1}{1 - h_{11}}.$$

<sup>8</sup> Дипольная составляющая решений (22) не противоречит дипольному распределению реликтового излучения, которое действительно наблюдается и связано с движением наблюдателя относительно реликтового фона, приводя к характерной зависимости температуры реликтового излучения от направления.

<sup>7</sup> Может показаться, что если бы не было лептонов или других заряженных частиц, масса фотонов могла бы отличаться от нуля.



Из (27) видно, что сферически симметричное распределение скоростей пробных пучков, соответствующее сферическому фронту волны, имеет место только при  $h_{11} = 0$ , что отвечает отсутствию гравитации.

Из сказанного выше следует, что Вселенная с точки зрения передачи информации выглядит как линия передачи с шумами, требующая бесконечного времени для полной передачи информации.

Имеет смысл также поставить вопрос о связи двух определений постоянной  $q$  в (22). Если такая связь существует, то она означает связь между двумя фундаментальными явлениями – потоком фонового излучения из Вселенной и интенсивностью электромагнитного взаимодействия, зависящей от величины элементарного заряда. Это соображение можно обосновать тем, что появление микроволнового фона произошло в результате рекомбинации и перехода Вселенной из плазменного состояния в атомное, обеспечивших ее прозрачность.

Автор благодарит С.А. Смолянского и М.В. Давидовича за обсуждение результатов работы.

УДК 530.145.61: 530.182

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

А.Г. Лазерсон, А.А. Бойков

Саратовский государственный университет  
E-mail: tmf@sgu.ru

Рассмотрена сложная динамика квантовой системы «частица в прямоугольной яме с колеблющимся дном». Показано, что анализ временных зависимостей наблюдаемых позволяет выяснить, является ли динамика регулярной или хаотической. В качестве иллюстрации представлены результаты анализа временных зависимостей для средней по ансамблю энергии. Обнаружено, что с ростом амплитуды внешнего воздействия спектр интенсивности наблюдаемой демонстрирует свойства, характерные для спектра случайного процесса, что можно интерпретировать как хаотизацию динамики.

**Ключевые слова:** динамический хаос, квантовый хаос, квантовый осциллятор.

### Dynamical Chaos in Quantum Systems

A.G. Lazerson, A.A. Boikov

Complex dynamics of a quantum periodically driven square well is considered. It is shown that analysis of its ensemble average energy time series provides an identification of its dynamics to be either

### Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология / Пер. с англ.; Под ред. Я.А. Смородинского. М.: Наука, 1974. 520 с.
3. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
4. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1966. 376 с.
5. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Пер. с англ.; Под ред. О.А. Хрусталева. М.: Мир, 1985. 414 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 678 с.
7. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.
8. Carver A. Mead. Collective Electrodynamics I // Feynmann and Computation. Exploring the Limits of Computers / Ed. by A.J.G. Hey. Massachusetts: Perseus Books, Reading, 1998. 438 p.
9. Долгов А.Д. Магнитный монополю // Физическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1990. Т.2. С.687–688.
10. Берестецкий В.Б. Проблемы физики элементарных частиц. М.: Наука, 1979. 256 с.
11. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1968. 480 с.
12. Неванлинна Р. Пространство, время и относительность / Пер. с нем. Г.А. Вольперта; Под ред. И.М. Яглома. М.: Мир, 1966. 231 с.
13. Вайнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной / Пер. с англ.; Под ред. Я.Б. Зельдовича. М.: Энергоатомиздат, 1981. 209 с.



regular or chaotic. It has been found that enhancement of the driving force causes the energy spectrum to look like a spectrum of some random process, which may be identified as the signature of chaos in a quantum system.

**Key words:** dynamical chaos, quantum chaos, quantum oscillator.

### Введение

Известно, что модели квантовых неавтономных гамильтоновых систем являются объектом чрезвычайно интенсивного изучения в теории квантового хаоса [1–17]. С одним из самых простых примеров таких систем мы встречаемся при исследовании движения частицы в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме под действием внешнего монохроматического по-



ля. С точки зрения классической механики эта система была рассмотрена, в частности, в работе [18]. Впоследствии в работе [19] было дано исчерпывающее описание фазовых траекторий и КАМ-поверхностей, отвечающих движению частицы в прямоугольной яме, подверженной внешнему периодическому возмущению. Квантовый аналог этой задачи был исследован в работах [2–4]; было обнаружено, что при перекрытии квантовых нелинейных резонансов спектр квазиэнергий совершает переход от статистики Пуассона к распределению Вигнера. В работе [5] была проверена возможность развития техники ренормализации [1] для описания явления перекрытия резонансов. В работе [6] исследовано образование квантовых резонансов и их характеристики, отличающиеся от характеристик соответствующего классического резонанса.

В нашей статье, в отличие от указанных выше, предлагается идентифицировать сложную квантовую динамику частицы по поведению во времени наблюдаемых величин аналогично тому, как это делается при рассмотрении классических систем.

Как известно [20], в классической механике спектр интенсивности динамической величины  $f(t)$  – фурье-преобразование автокорреляционной функции этой величины. Автокорреляционная функция задается выражением  $B(\tau) = \langle f(t + \tau)f(t) \rangle - \langle f(t) \rangle^2$  (угловые скобки означают усреднение по времени). В случае периодической или квазипериодической динамики спектр интенсивности является дискретным, а в случае хаотической динамики – непрерывным. Если этот спектр непрерывный, то говорят, что величина  $f(t)$  обладает свойством перемешивания. Возникает вопрос: могут ли наблюдаемые величины квантово-механической системы, которым в классическом аналоге соответствуют динамические переменные, проявлять свойство, аналогичное перемешиванию в классической механике? А именно может ли увеличение спектрального разрешения на некотором частотном интервале привести к такому же изменению спектральной плотности наблюдаемых, какое имеет место для случайных процессов? (Напомним,

что спектр случайных процессов непрерывен [21].) В данной работе мы отвечаем на этот вопрос утвердительно, демонстрируя исследование спектральных характеристик наблюдаемых на примере усредненной по ансамблю энергии частицы.

Как представляется, анализ поведения во времени наблюдаемых позволяет проследить соответствие между классической и квантовой динамикой более наглядно, чем исследование перекрытия квантовых резонансов или изучение перехода спектра квазиэнергий от распределения Пуассона к распределению Вигнера. Дело в том, что в классической механике существует непосредственный аналог усредненной по ансамблю энергии – полная энергия частицы; так же обстоит дело и с любой другой наблюдаемой в квантовой системе. При этом трудно придумать столь же простой классический аналог такой часто используемой характеристики, как распределение квазиэнергий. Что касается квантового нелинейного резонанса, то в работе [6] указывается, что перекрытие квантовых резонансов оказывается еще более сложным, чем перекрытие резонансов классических. С нашей точки зрения, дело обстоит так по следующей причине. В классической механике картина перекрытия существенно зависит от поведения резонансов второго и более высоких порядков. При квантово-механическом рассмотрении введение понятия «резонанс второго или более высокого порядка» затрудняется тем, что число уровней, на которых мог бы разместиться такой резонанс, заведомо ограничено. С увеличением порядка резонанса уменьшается мера области, занимаемой резонансом в фазовом пространстве (при классическом описании), или уменьшается число уровней энергии, занимаемых резонансом (при квантово-механическом описании). Значит, при достаточно большом натуральном  $n$  для квантового резонанса  $n$ -го порядка не найдется уровней энергии – все доступные уровни заняты резонансами порядков меньших, чем  $n$ . С другой стороны, классическое фазовое пространство имеет мощность «континуум» и в нем присутствуют резонансы сколь угодно высоких порядков.



В качестве критерия стохастичности динамической системы будем использовать классическое условие Чирикова: для неинтегрируемой системы существует безразмерный параметр  $K$ , смысл которого заключается в следующем. Если параметр  $K$  очень мал по сравнению с единицей, стохастические слои являются очень тонкими и отделены друг от друга инвариантными кривыми. С увеличением  $K$  инвариантные кривые, разделяющие соседние резонансы и их стохастические слои, сильно искажаются и в конце концов разрушаются. В результате происходит слияние стохастических слоев и возникает так называемая «глобальная стохастичность» [20, 22]. Условие Чирикова используется нами для проверки соответствия между классической и квантовой механикой. Выберем амплитуду и частоту внешнего возмущения так, чтобы параметр  $K$  был мал по сравнению с единицей, и проведем исследование поведения во времени какой-либо наблюдаемой переменной. Тогда мы вправе ожидать периодической зависимости этой переменной от времени с частотой, равной частоте внешнего возмущения. Но если мы выберем амплитуду и частоту внешнего возмущения так, чтобы параметр  $K$  был примерно равным единице или большим единицы, следует ожидать нерегулярного поведения наблюдаемой переменной, то есть появления новых частотных пиков, густота которых неограниченно возрастает с повышением точности измерений. А это и означает, что спектр становится всюду плотным (то есть практически сплошным) в некоторой области частот.

В разделе 1 приводится вывод системы уравнений для модели прямоугольной ямы с колеблющимся дном, указывается тип начального условия, для которого эта система была численно решена. В разделе 2 обсуждается проблема исследования спектральной плотности интенсивности наблюдаемой переменной. В разделе 3 проводится анализ полученных результатов.

#### 1. Динамическая модель

В данной работе мы используем систему единиц измерения, в которой масса частицы, ширина ямы и постоянная Планка  $\hbar$  приняты

равными единице. Гамильтониан частицы в потенциале  $V(x)$ , подверженной внешнему гармоническому возмущению, имеет вид [7]

$$H(x, t) = 1/2 p^2 + V(x) + F_0 x \sin(\omega_0 t), \quad (1)$$

где  $F_0$  – амплитуда,  $\omega_0$  – частота внешнего поля; под  $x$  понимаем совокупность всех координат конфигурационного пространства системы.

При квантово-механическом описании поведение частицы определяется волновой функцией  $\psi(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}(x, t) \psi \quad (2)$$

с граничными условиями на  $\psi$  и её производную по  $x$ .

Рассматривая потенциал  $V(x)$  как невозмущенный, а периодическую внешнюю силу как возмущение и следуя методу Дирака (см., например, [23]), запишем решение уравнения Шредингера в виде ряда

$$\psi(x, t) = \sum c_n(t) \psi_n(x) \exp(-iE_n t), \quad (3)$$

где  $\psi_n(x)$  – собственные функции невозмущенной задачи, а  $E_n$  – соответствующие собственные значения. Получим после несложных преобразований, вообще говоря, бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов разложения  $c_n(t)$  волновой функции частицы по собственным функциям невозмущенной задачи:

$$i \frac{dc_n(t)}{dt} = \sum_m c_m V_{nm} \{ \exp i(E_m - E_n)t \}, \quad (4)$$

где матричные элементы возмущения  $V_{nm}(t)$  определяются стандартным образом [23]:

$$V_{nm} = F_0 \sin \omega_0 t \int \psi_m^*(x) \varphi(x) \psi_n(x) dx, \quad (5)$$

где интеграл берется по всему конфигурационному пространству системы.

Как известно, величина  $|c_n(t)|^2$  представляет собой вероятность того, что при проведении измерения в момент времени  $t$  частица будет обнаружена в состоянии с энергией  $E_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

Начальное условие зададим следующим образом:



$$c_n(0) = \delta_{nN}, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Такое начальное условие означает, что в момент времени  $t = 0$  частица располагается на уровне энергии с заданным номером  $N$ . После того как получено решение системы (4), можно построить зависимость от времени любой наблюдаемой величины и исследовать ее поведение.

## 2. Исследование спектральной плотности интенсивности

Вычисление спектральных составляющих производится по стандартной процедуре, которая заключается в следующем [21, 24]. На основе численного решения системы (4) строится зависимость наблюдаемой переменной от времени (временная реализация). Длина этой реализации  $T$  сначала выбирается произвольно. Затем вычисляется выборочная автокорреляционная функция наблюдаемой и нормированная спектральная плотность интенсивности (далее – спектр). Для вычисленного спектра шаг дискретизации по частоте однозначно определяется длиной реализации  $T$  наблюдаемой переменной ( $\Delta f = 1/T$ ).

Далее строится временная реализация того же процесса на удвоенном временном интервале  $2T$ , рассчитываются ее корреляционная функция и спектр. При этом шаг дискретизации по частоте становится в два раза меньше. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения амплитуд всех вычисленных спектральных составляющих не стабилизируются. Если спектр не является всюду плотным, то амплитуды спектральных составляющих на промежуточных частотах либо равны нулю, либо вследствие погрешности численного метода спектрального анализа достаточно малы (обычно порядка минус пятьдесят децибел). Для всюду плотного спектра эти амплитуды значительно превышают указанный уровень и сравнимы по величине с амплитудами, определенными на предыдущем этапе.

## 3. Результаты расчетов

В качестве примера рассмотрим бесконечно глубокую прямоугольную яму, возбуждаемую внешним периодическим воздействием. В этом случае  $\psi_n(x) = 2 - 1/2 \sin(\pi/x)$

$\varphi(x) - x$ . Для классического аналога рассматриваемой динамической системы параметр стохастичности  $K$  записывается в соответствии с [20] в виде

$$K = \frac{2\pi^3}{\omega_0^2} F_0. \quad (7)$$

Как легко видеть из этой формулы, величина  $K$  зависит только от амплитуды и частоты внешнего поля. Так как оба эти параметра полностью сохраняют свой физический смысл при переходе от классического рассмотрения к квантово-механическому, формула (7) может использоваться и в квантовой задаче.

В данной работе система (4) решалась численно для  $K = 0.01, 1.0$  и  $2.0$ , то есть в соответствии с формулой (7) были соответствующим образом подобраны значения амплитуды и частоты внешнего возмущения. Начальное условие выбиралось так, чтобы частица в момент времени  $t = 0$  находилась на 150-м уровне. Частота возмущения  $\omega_0$  задавалась так, чтобы она совпадала с частотой перехода между 150-м и 151-м уровнями. Интервал времени, на котором получено решение системы (4), составил 5000 периодов колебаний внешнего поля для случая  $K=0.01$  и 150 периодов колебаний внешнего поля для случаев  $K=1.0$  и  $K=2.0$ .

В качестве примера наблюдаемой переменной для рассматриваемой системы была выбрана средняя по ансамблю энергия частицы.

При построении численного решения для  $K=0.01$  мы ограничились учетом уровней энергии от 100-го по 200-й. Для  $K=0.01$  на рис. 1 показан график средней энергии, а на рис. 2 – выборочный спектр средней энергии. Результаты расчетов, приведенные на рис. 2, позволяют утверждать, что для малых амплитуд возмущения спектр заведомо является дискретным с небольшим количеством (не более десятка) частотных пиков. Кажущаяся непрерывность спектра вокруг пиков  $0.1\omega_0$  и  $0.3\omega_0$  должна быть отнесена на счет боковых лепестков. В самом деле, характер зависимости спектральных составляющих от частоты в небольшой окрестности точки  $0.1\omega_0$  и в небольшой окрестности точки  $0.3\omega_0$  качествен-

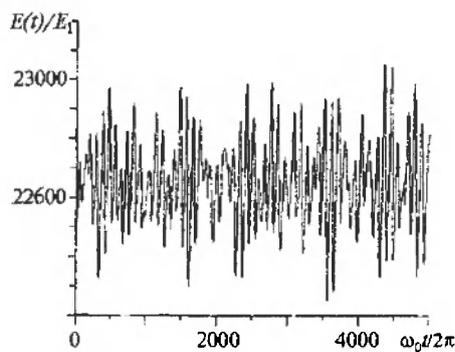


Рис. 1. Реализация среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=0.01$

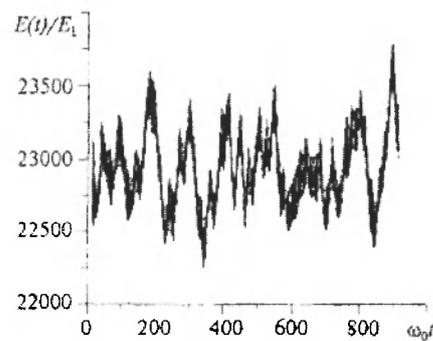


Рис. 3. Реализация среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=1.0$

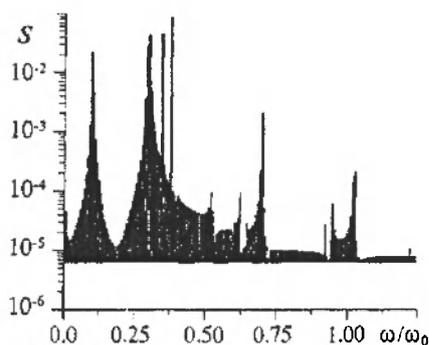


Рис. 2. Спектральная плотность интенсивности среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=0.01$

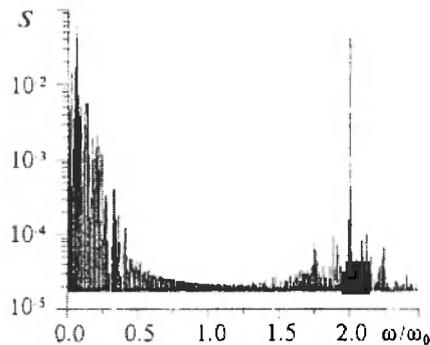


Рис. 4. Спектральная плотность интенсивности среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=1.0$

но совпадает с боковыми лепестками для прямоугольного окна [24]. Кроме того, мы обнаружили, что основная мощность имеет место на низких частотах, не превышающих  $0.75\omega_0$ , а частоте колебаний частицы  $\omega_0$  соответствует пик значительно меньшей интенсивности.

При построении численного решения для  $K=1.0$  мы ограничились учетом энергетических уровней с 50-го по 250-й. Для этого случая на рис. 3 показан график средней энергии, на рис. 4 представлен спектр средней энергии для всего временного интервала реализации, на рис. 5 изображен сравнительный график спектров средней энергии для первой четверти и всего временного интервала реализации в области низких частот. Рис. 3 демонстрирует, что средняя энергия как функция времени ведет себя подобно реализации случайного процесса. На рис. 4 показано, что высокая мощность сосредоточена на низких частотах, а именно в интервале частот от нуля до  $\omega_0/3$ ; начиная с этого значения частоты мощность резко снижается.

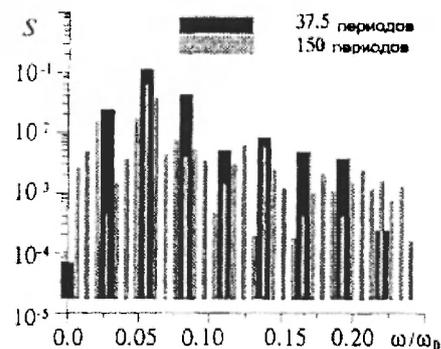


Рис. 5. Сравнение вычисленных значений спектральной плотности интенсивности для разных интервалов реализации среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=1.0$  на низкочастотном интервале

Отдельные заметные всплески мощности можно наблюдать и в окрестности частоты, равной удвоенной частоте колебаний внешнего поля. Обратим внимание на то, что на данной частоте имеется одинокий острый пик. Это, по-видимому, является квантовомеханическим аналогом так называемого параметрического резонанса [25, 26].



Сравнивая изображенные на рис. 5 спектры средней энергии для первых 37.5 и первых 150-ти периодов колебаний внешнего поля, отметим, что спектральная плотность интенсивности средней энергии проявляет такое свойство, как неограниченное сгущение спектральных линий с уменьшением шага по частоте. Именно в этом смысле можно говорить о том, что спектр наблюдаемой является сплошным.

При построении численного решения для  $K = 2.0$  мы ограничились учетом первых 300 энергетических уровней. Для этого случая на рис. 6 показан график средней энергии, на рис. 7 представлен спектр средней энергии для всего временного интервала реализации, на рис. 8 изображен сравнительный график спектров средней энергии для первой четверти и всего временного интервала реализации в области низких частот, если сравнить графики, приведенные на рис. 3 и 6 (графики временных реализаций средней энергии для случаев  $K=1.0$  и  $K=2.0$  соответствен-

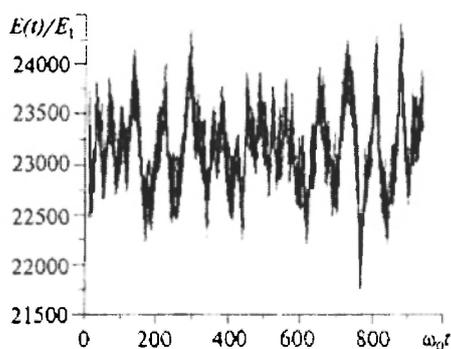


Рис. 6. Реализация среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=2.0$

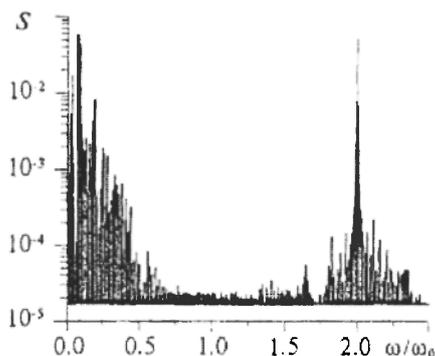


Рис. 7. Спектральная плотность интенсивности среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K = 2.0$

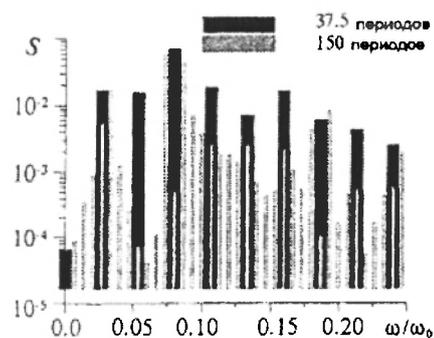


Рис. 8. Сравнение вычисленных значений спектральной плотности интенсивности для разных интервалов реализации среднего по ансамблю от энергии частицы при значении управляющего параметра  $K=2.0$  на низкочастотном интервале

но), то можно заметить, что средняя энергия на рис. 6 колеблется с несколько большей амплитудой и в основном с большей частотой, нежели средняя энергия на рис. 3. Можно заметить, что при  $K=2.0$  мощность заметно спадает, начиная с частоты, равной приблизительно  $\omega_0/2$  (а не  $\omega_0/3$ , как при  $K=1.0$ ). Что касается сравнения изображенных на рис. 8 спектров средней энергии для первых 37.5 и первых 150-ти периодов колебаний внешнего поля, скажем, что спектр средней энергии при  $K=2.0$  также может рассматриваться как непрерывный по аналогии со спектром на рис. 5.

#### Выводы

Изложенные результаты позволяют сделать следующие выводы. В полном соответствии с классической динамикой поведение неавтономной квантовой системы сводится к одному из двух случаев.

Классический аналог рассматриваемой системы показывает, что области стохастичности существуют лишь в очень малых окрестностях сепаратрис и отделены друг от друга. Тогда при квантовом рассмотрении наблюдаемая величина обнаруживает только дискретный спектр.

Классический аналог переходит к глобальной стохастичности, то есть нелинейные резонансы перекрываются, сепаратрисы разрушаются и области стохастичности сливаются друг с другом. Тогда при квантовом рассмотрении спектральная плотность интенсивности наблюдаемой проявляет такое



свойство, как появление все новых и новых частотных пиков с уменьшением шага по частоте. Такое сгущение, по-видимому, неограниченно, что и позволяет сравнить полученный спектр наблюдаемой с непрерывным спектром случайного процесса.

Итак, при квантовом рассмотрении гамильтоновой системы исследование переменной во времени наблюдаемой величины позволяет идентифицировать динамику данной системы. Поэтому поведение во времени наблюдаемых значений – средних по ансамблю – физических величин (энергии, импульса и др.) может служить критерием регулярности поведения квантовых систем.

#### Список литературы

1. *Reichl L.E.* The transition to chaos in conservative classical systems: quantum manifestations. N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
2. *Reichl L.E., Lin W.A.* Exact quantum model of field-induced resonance overlap // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol.33. P.3598.
3. *Lin W.A., Reichl L.E.* Transition of spectral statistics due to overlap of quantum resonance zones // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol.36. P.5099.
4. *Lin W.A., Reichl L.E.* Spectral analysis of quantum resonance zones, quantum Kolmogorov-Arnold-Moser theorem and quantum resonance overlap // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol.37. P.3972.
5. *Reichl L.E., Li Haoming.* Self-similarity in quantum dynamics // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.42. P.4543.
6. *Ju-Yong Sh., Hai-Woong L.* Floquet analysis of quantum resonance in a driven nonlinear system // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol.50. P.902.
7. *Holthaus M.* On the classical-quantum correspondence for periodically time dependent systems // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1995. Vol.5. P.1143.
8. *Cocke S., Reichl L.E.* Static-field effects on the nonlinear quantum resonances and the ionization spectrum of a simple bound particle // *Phys. Rev. A.* 1995. Vol.52. P.4515.
9. *Farini A., Boccaletti S., Arcelli F.T.* Quantum-classical comparison in chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol.53. P.4447.
10. *Morrow G.O., Reichl L.E.* Planck's-constant dependence of the scaling of localization length in quantum dynamics // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol.57. P.5266.
11. *Demikhovskii V.Y., Kamenev D.I., Luna-Acosta G.A.* Quantum weak chaos in a degenerate system // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol.59. P.294.
12. *Mirbach B., Casati G.* Transition from quantum ergodicity to adiabaticity: dynamical localization in an amplitude modulated pendulum // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol.83. P.1327.
13. *Loinaz W., Newman T.J.* Quantum revivals and carpets in some exactly solvable systems // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. Vol.32. P.8889.
14. *Timberlake T., Reichl L.E.* Phase-space picture of resonance creation and avoided crossings // *Phys. Rev. A.* 2001. Vol.64. P.033404.
15. *Sankaranarayanan R., Lakshminarayan A., Sheorey V.B.* Quantum chaos of a particle in a square well: Competing length scales and dynamical localization // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol.64. P.046210.
16. *Emmanouilidou A., Reichl L.E.* Floquet scattering and classical-quantum correspondence in strong time-periodic fields // *Phys. Rev. A.* 2002. Vol.65. P.033405.
17. *Korsch H. J., Leyes W.* Quantum and classical phase space evolution: a local measure of derealization // *New J. Phys.* 2002. Vol.4. P.62.
18. *Lin W.A., Reichl L.E.* External field induced chaos in an infinite square well potential // *Physica D.* 1986. Vol.19. P.145.
19. *Fuka M.Z., McIver J.K., Becker W., Orszag M., Ramirez R.* Driven particle in an infinite square well: Representation and breakdown of the invariant tori in a multiple-resonance case // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol.51. P.1935.
20. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
21. *Дженкинс Г., Ватте Д.* Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971.
22. *Лихтенберг А., Либман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
24. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
25. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988.
26. *Рабинович М.И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.



## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Барсов Андрей Сергеевич** – Самарский государственный университет, кафедра общей и теоретической физики, студент. E-mail: barsoff\_andrey\_s@mail.ru

**Блашке Давид Бернارد** – Институт теоретической физики, Вроцлав, Польша; Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, профессор. E-mail: david@theor.jinr.ru

**Бойков Алексей Алексеевич** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, кафедра оптики и биофотоники, студент. E-mail: lazerson@inbox.ru

**Виницкий Сергей Ильич** – Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ведущий научный сотрудник. E-mail: vinitsky@theor.jinr.ru

**Горохов Александр Викторович** – Самарский государственный университет, кафедра общей и теоретической физики, профессор. E-mail: gorokhov@ssu.samara.ru

**Гусев Александр Александрович** – Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, лаборатория информационных технологий, научный сотрудник; Международный университет природы, общества и человека «Дубна», Дубна, Россия. E-mail: gooseff@jinr.ru

**Дербов Владимир Леонардович** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, зав. кафедрой теоретической и ядерной физики, профессор. E-mail: derbovvl@gmail.com

**Дмитриев Вадим Владимирович** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, кафедра теоретической и математической физики, доцент. E-mail: tmf@sgu.ru

**Зайко Юрий Николаевич** – Поволжская академия государственной службы им. П.А. Столыпина, Саратов, кафедра прикладной информатики и информационных технологий, доцент. E-mail: zyrnick@rambler.ru

**Иванов Евгений Алексеевич** – Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ведущий научный сотрудник. E-mail: eivanov@theor.jinr.ru

**Казарян Эдуард Мушегович** – Российско-Армянский (Славянский) университет, Ереван, Армения, физико-технический факультет, зав. кафедрой общей и теоретической физики, академик НАН РА, профессор. E-mail: shayk@ysu.am

**Лазерсон Александр Григорьевич** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, кафедра теоретической и математической физики, профессор. E-mail: lazerson@inbox.ru

**Первушин Виктор Николаевич** – Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ведущий научный сотрудник. E-mail: pervush@theor.jinr.ru

**Саркисян Айк Араевич** – Российско-Армянский (Славянский) университет, Ереван, Армения, декан физико-технического факультета, профессор. E-mail: shayk@ysu.am

**Семян Виталий Владимирович** – Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С.П. Королева, инженер. E-mail: veyvlet@mail.ru

**Серов Владислав Викторович** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, кафедра теоретической и ядерной физики, доцент. E-mail: derbovvl@gmail.com

**Смолянский Петр Игоревич** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, кафедра электроники, колебаний и волн, студент. E-mail: smol@sgu.ru

**Смолянский Станислав Александрович** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, зав. кафедрой теоретической и математической физики, профессор. E-mail: smol@sgu.ru

**Чертилин Александр Викторович** – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, кафедра теоретической и математической физики, студент. E-mail: tmf@sgu.ru

**Чулуунбаатар Очбадрах** – Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, лаборатория информационных технологий, старший научный сотрудник. E-mail: chuka@jinr.ru



## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Barsov Andrey Sergeevitch** – Samara State University, chair of general and theoretical physics, student. E-mail: barsoff\_andrey\_s@mail.ru

**Blaschke David Bernard** – Institute of theoretical physics, Wroclaw, Poland; Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, Bogoliubov laboratory of theoretical physics, professor. E-mail: david@theor.jjur.ru

**Boikov Alexey Alexeevich** – Saratov State University, chair of optics and biophotonics, student. E-mail: lazerson@inbox.ru

**Vinitsky Sergei Il'ich** – Institute of theoretical physics, Wroclaw, Poland; Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, Bogoliubov laboratory of theoretical physics, leader research. E-mail: vinitsky@theor.jjnr.ru

**Gorokhov Alexandr Viktorovich** – Samara State University, chair of general and theoretical physics, professor. E-mail: gorokhov@ssu.samara.ru

**Gusev Alexandr Alexandrovich** – Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, laboratory of information technologies, research; International University of Nature, Society and Man «Dubna», Dubna, Russia. E-mail: gooseff@jjnr.ru

**Derbov Vladimir Leonardovich** – Saratov State University, head of chair of theoretical and nuclear physics, professor. E-mail: derbovvl@gmail.com

**Dmitriev Vadim Vladimirovich** – Saratov State University, chair of theoretical and mathematical physics, reader. E-mail: tmf@sgu.ru

**Zayko Yuri Nikolaevich** – Stolypin's Volga Regional Academy of State Service, Saratov, chair of applied informatics and information technologies in control, reader. E-mail: zyrnick@rambler.ru

**Ivanov Evgeny Alexeevich** – N.N. Bogoliubov laboratory of theoretical physics of JINR, Dubna, Russia, leader research. E-mail: eivanov@theor.jjnr.ru

**Kazaryan Eduard Mushegovich** – Russian-Armenian (Slavic) University, Erevan, Armenia, physics-engineering department, head of chair of general and theoretical physics, academician NAS RA, professor. E-mail: shayk@ysu.am

**Lazerson Alexandr Grigor'evich** – Saratov State University, chair of theoretical and mathematical physics, professor. E-mail: lazerson@inbox.ru

**Pervuchshin Viktor Nikolaevich** – Institute of theoretical physics, Wroclaw, Poland; Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, Bogoliubov laboratory of theoretical physics, leader research. E-mail: pervush@theor.jjnr.ru

**Sarkisyan Ayk Araevich** – Russian-Armenian (Slavic) University, Erevan, Armenia, dean of physic-engineering department, professor. E-mail: shayk@ysu.am

**Semin Vitaly Vladimirovich** – S.P. Korolev Samara State Aerospace University, engineer. E-mail: veyvlet@mail.ru

**Serov Vladislav Viktorovich** – Saratov State University, chair of theoretical and nuclear physics, reader. E-mail: derbovvl@gmail.com

**Smolyansky Petr igorevich** – Saratov State University, chair of electronics, oscillations and waves, student. E-mail: smol@sgu.ru

**Smolyansky Stanislav Alexandrovich** – Saratov State University, head of chair of theoretical and mathematical physics, professor. E-mail: smol@sgu.ru

**Chertilin Alexandr Viktorovich** – Saratov State University, chair of theoretical and mathematical physics, student. E-mail: tmf@sgu.ru

**Chuluunbaatar Ochbadrah** – JINR, Dubna, Russia, laboratory of information technology, senior staff scientist. E-mail: chuka@jjnr.ru