



## Библиографический список

1. Свердлов Л.М., Ковнер М.А., Крайнов Е.П. Колебательные спектры многоатомных молекул. М., 1970. 559 с.
2. Березин В.И. Прямые и обратные задачи спектроскопии циклических и комплексных соединений: Дис. ... д-ра физ.-мат.наук. Саратов, 1983. 396 с.
3. Джалмухамбетова Е.А., Коломин В.И., Элькин М.Д. Моделирование геометрической структуры и спектров димеров с водородной связью // Южно-Рос. вестн. геологии, географии и глобальной энергии. 2006. № 7(20). С.117–124.
4. Элькин П.М., Пулин О.В., Джалмухамбетова Е.А. Теоретический анализ таутомерных форм пурина // Журн. прикл. спектр. 2008. Т.75, № 1. С. 23–27.
5. Тен Г.Н., Бурова Т.Г., Баранов В.И. Анализ ИК спектров и водородных связей урацила // Журн. структурной химии. 2001. Т. 42, № 4. С. 666–676
6. Волькенштейн М.В., Ельяшевич М.А., Степанов Б.И. Колебание молекул. М., 1949. Т. 2. 468 с.
7. Frisch M.J., Trucks G.W., Schlegel H.B. Gaussian 0.3. Revision A.7. Pittsburg PA: Gaussian Inc., 2003.
8. Элькин П.М., Пулин В.Ф., Джалмухамбетова Е.А. Структурно-динамические модели и ангармонический анализ колебательных состояний замещенных урацила // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2005. № 4(9) С. 36–45.
9. Элькин П.М., Эрман М.А., Пулин О.В. Анализ колебательных спектров метилзамещенных урацила в ангармоническом приближении // Журн. прикл. спектр. 2006. Т. 73, № 4. С. 431–436.
10. Пулин В.Ф., Элькин М.Д., Березин В.И. Исследование динамики молекулярных соединений различных классов. Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2002. 548 с.
11. Мясоедов Б.Ф., Грибов Л.А., Павлючко А.И. Фрагментарные методы расчета спектров фосфорорганических соединений // Журн. структурной химии. 2006. Т. 47, № 3. С. 449–456.
12. Березин К.В. Квантовомеханические модели и решение на их основе прямых и обратных спектральных задач для многоатомных молекул: Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. Саратов, 2004. 246 с.

УДК 517.9

## ВЛИЯНИЕ ЗАДЕРЖКИ В КАНАЛЕ СВЯЗИ НА ПОЛНУЮ СИНХРОНИЗАЦИЮ ХАОСА

В.В. Астахов, С.В. Астахов, Е.И. Неходцева, А.В. Шабунин

Саратовский государственный университет,  
кафедра радиофизики и нелинейной динамики  
E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru

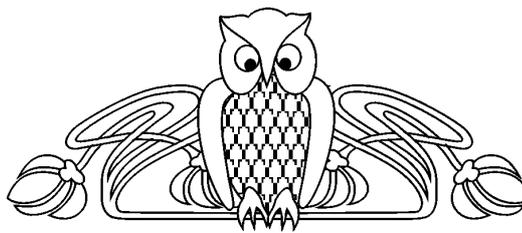
В данной работе рассматривается влияние задержки в канале связи на синхронизацию регулярных и хаотических колебаний как в отображениях с дискретным временем, так и в потоковых системах. Установлено, что в дискретных системах введение задержки препятствует синхронизации хаоса, но допускает синхронизацию периодических и квазипериодических колебаний. В системах с непрерывным временем в режиме хаотического аттрактора введение малой задержки не вносит существенных изменений в динамику, однако увеличение времени задержки ведет к обратному каскаду бифуркаций удвоения периода.

**Ключевые слова:** синхронизация, синхронизация хаоса, хаос, переход к хаосу, связь с задержкой, кубическое отображение, генератор с инерционной нелинейностью.

### Influence of Time-delay in the Coupling Channel on the Complete Synchronization of Chaos

V.V. Astakhov, S.V. Astakhov, E.I. Nekhodtseva,  
A.V. Shabunin

In the current work the influence of delay in a coupling channel on the synchronization of regular and chotic oscillations in discrete maps and continuous time systems is studied. It is established that introduction of time delay in a discrete system prevents synchronization of chaos but allows synchronization of periodic and quasiperiodic oscillations. In a continuous time system with chaotic attractor the introduction of a small delay doesn't make essential changes in its dynamics however the increasing of delay leads to the reverse period doubling cascade.



**Key words:** synchronization, synchronization of chaos, chaos, transition to chaos, delayed coupling, cubic map, oscillator with inertial nonlinearity.

### Введение

Исследование явления синхронизации хаоса является актуальной проблемой, имеющей большое фундаментальное и прикладное значение. Для взаимодействующих хаотических систем выделяют следующие виды синхронизации: полную, фазовую, обобщенную синхронизацию, а также синхронизацию с задержкой. Возможность реализации грубых, устойчивых режимов синхронизации хаоса существенным образом зависит от типа и величины связи. Часто для многих задач естествознания является принципиальным учет времени задержки в каналах связи. Установлено, что задержка при взаимодействии систем существенным образом влияет на их динамику [1–3]. Задержка может индуцировать подавление колебаний во взаимодействующих идентичных осцилляторах [1,2] или приводить к возникновению бистабильности между синхронными и несинхронными состояниями [3]. Задержка в



цепочке локально связанных осцилляторов может приводить к уменьшению областей существования сложных хаотических пространственно-временных состояний [4].

В настоящей работе мы показываем, что задержка в канале связи между системами с дискретным временем приводит к потере синхронизации хаоса. При этом увеличение времени задержки в канале связи между системами с непрерывным временем приводит к регуляризации синхронных режимов.

### Система с дискретным временем

Рассмотрим систему двух связанных с задержкой кубических отображений с запаздывающей связью в следующем виде:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon[f(y_{n-k}) - f(x_n)], \\ y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon[f(x_{n-k}) - f(y_n)], \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = (a-1)x - ax^3, \quad (2)$$

где  $x_n$  и  $y_n$  – динамические переменные первой и второй подсистемы,  $a$  – управляющий параметр парциальной системы,  $\varepsilon$  – коэффициент связи, индексы  $n$  и  $k$  – дискретное время и интервал задержки соответственно.

Каждое из отображений (1) в интервале значений  $a$  от 2 до 3.6 представляет собой нелинейную бистабильную систему с дискретным временем, которая при увеличении параметра  $a$  демонстрирует усложнение колебательных режимов и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. В заkritической области наблюдается каскад бифуркаций слияния лент хаотического аттрактора и объединение двух симметричных хаотических множеств в один аттрактор (рис. 1).

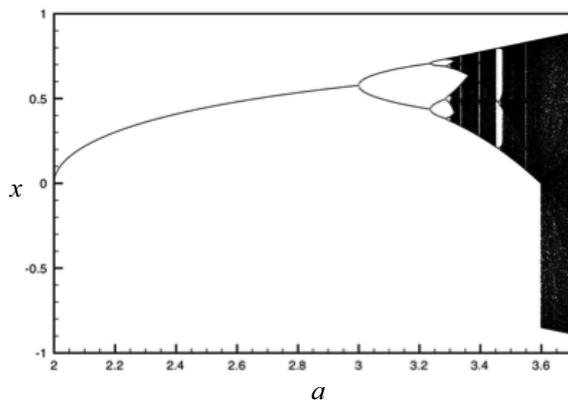


Рис. 1. Переход к хаосу в одиночном отображении системы (1)

Поведение системы (1) в случае  $k=0$ , когда взаимодействие между подсистемами происходит без задержки, детально исследовано и описано в

работах [5,6]. В частности, показано, что существуют интервалы значений коэффициента связи, где наблюдается явление полной синхронизации хаоса. Формирование синхронного хаотического аттрактора происходит через каскад бифуркаций удвоения периода симметричных орбит. При выходе из области синхронизации происходит формирование фазовой мультистабильности. Потеря синхронизации и формирование мультистабильности происходят в результате бифуркаций на базе седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор.

Зафиксируем значение управляющего параметра  $a=3.34$ , что соответствует хаотическому аттрактору в одиночном отображении. Карта режимов системы (1) представлена на рис. 2.

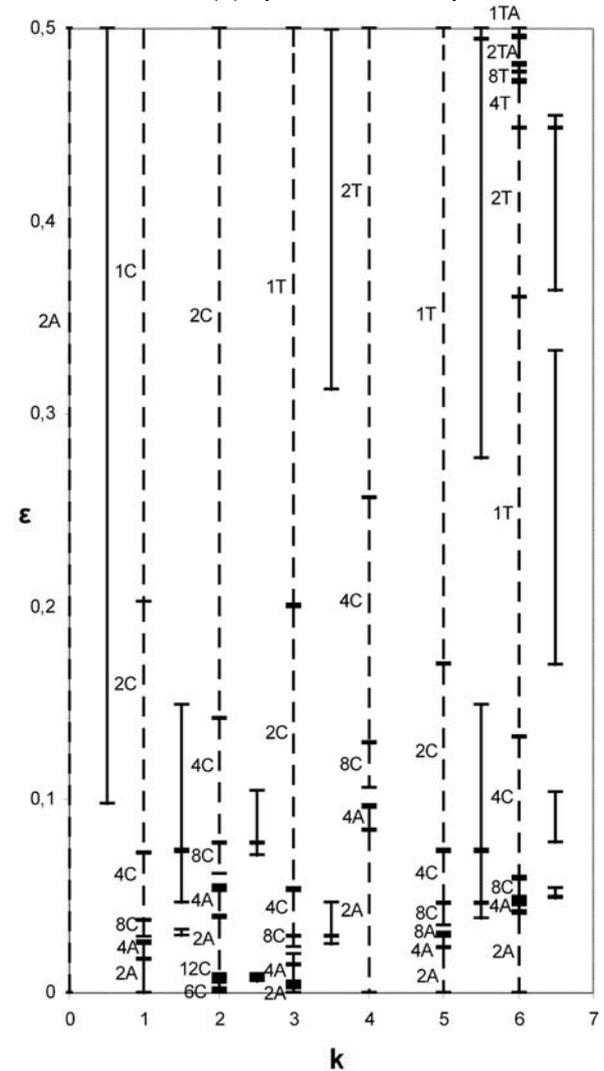


Рис. 2. Карта синхронных режимов системы (1) на плоскости управляющих параметров ( $k, \varepsilon$ ). Штрихами показаны области существования седловых синхронных предельных множеств, отрезками сплошных линий – области существования синхронных аттракторов (C – периодическая орбита, T – замкнутая инвариантная кривая, A – хаотическое предельное множество)



Рассмотрим случай минимальной задержки  $k=1$ . Тогда система (1) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = f(x_1(n)) + \varepsilon[f(y_2(n)) - f(x_1(n))], \\ y_1(n+1) = f(y_1(n)) + \varepsilon[f(x_2(n)) - f(y_1(n))], \\ y_2(n+1) = y_1(n), \\ x_2(n+1) = x_1(n). \end{cases} \quad (3)$$

В случае полной синхронизации ( $x_1(n) = y_1(n) = S_1(n)$ ,  $x_2(n) = y_2(n) = S_2(n)$ ) динамика системы в симметричном подпространстве объединенного фазового пространства описывается двумерным дискретным отображением:

$$\begin{cases} S_1(n+1) = (1-\varepsilon)f(S_1(n)) + \varepsilon f(S_2(n)), \\ S_2(n+1) = S_1(n), \end{cases} \quad (4)$$

$$f(S) = (a-1)S - aS^3.$$

Система (4) имеет три решения в виде неподвижных точек  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  с координатами  $S_1 = S_2 = 0$ ,  $S_1 = S_2 = \sqrt{\frac{a-2}{a}}$  и  $S_1 = S_2 = -\sqrt{\frac{a-2}{a}}$  соответственно. Возможные бифуркации этих неподвижных точек представлены кривыми на плоскости параметров на рис. 3.

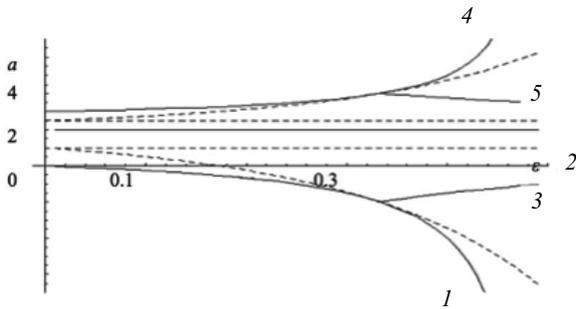


Рис. 3. Аналитически полученные бифуркационные линии системы (3): 1 – бифуркация удвоения периода неподвижной точки  $C_0$ , 2 – бифуркация вил неподвижной точки  $C_0$ , 3 – бифуркация Неймарка неподвижной точки  $C_0$ , 4 – бифуркации удвоения периода неподвижных точек  $C_1$  и  $C_2$ , 5 – бифуркация Неймарка неподвижных точек  $C_1$  и  $C_2$

Бифуркационные кривые, полученные аналитически, полностью соответствуют бифуркациям, наблюдаемым в численном эксперименте (рис. 4).

Таким образом, для минимального времени задержки ( $k=1$ ) и небольших значений коэффициента связи ( $\varepsilon < \frac{1}{3}$ ) синхронное хаотическое множество формируется через каскад бифуркаций удвоения периода, а при больших значениях

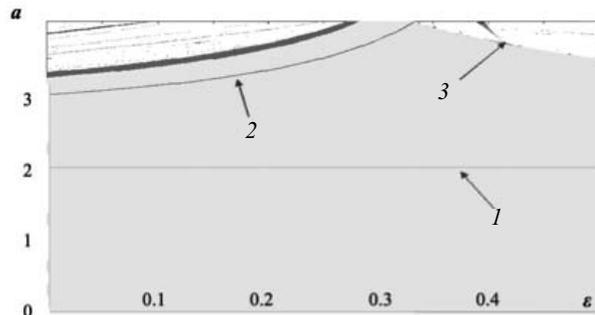


Рис. 4. Карта режимов системы (3), построенная по результатам численного эксперимента: 1 – бифуркация вил неподвижной точки  $C_0$ , 2 – бифуркация удвоения периода неподвижной точки  $C_1$ , 3 – бифуркация Неймарка неподвижной точки  $C_1$

коэффициента связи – через разрушение квазипериодических колебаний.

Рассмотрим динамику системы при больших задержках в канале связи (см. рис. 2). При увеличении величины  $k$  до 2 поведение системы практически не изменяется. Отличие состоит только в том, что обратная последовательность бифуркаций удвоения периода в симметричном подпространстве заканчивается орбитой периода 2 (при  $k=1$  – орбитой периода 1). Области существования устойчивых синхронных режимов разделены областями существования неустойчивых синхронных режимов.

Дальнейшее увеличение времени задержки ( $k=3,4,5,6$ ) меняет поведение системы существенным образом. Во-первых, при величине задержки связи  $k=4$  устойчивых режимов синхронизации не наблюдается во всем исследуемом интервале значений коэффициента связи. Во-вторых, при значениях  $k=3,5,6$ , помимо устойчивых режимов синхронизации периодических движений, наблюдаются устойчивые режимы полной синхронизации квазипериодических колебаний. Как показано в [7], при больших значениях  $k$  можно наблюдать формирование синхронного хаотического множества  $17A$  через каскад бифуркаций удвоения замкнутой инвариантной кривой.

### Потоковая система

Рассмотрим генератор с инерционной нелинейностью [8] в качестве модели хаотической системы с непрерывным временем. Введем связь между двумя идентичными генераторами, как это показано на рис. 5.

Полученная система описывается следующими уравнениями:

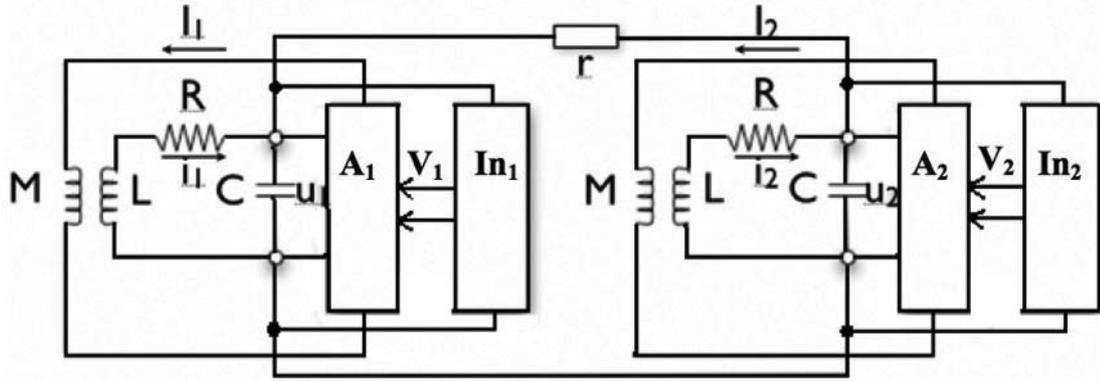


Рис. 5. Система из двух связанных хаотических генераторов

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \frac{MS_0 - RC}{LC}u + W_1 + \frac{R}{r}(W_1 - W_2) - \\ - \frac{1}{Cr}(u_1 - u_2) - \frac{Mb}{LC}u_1V_1 - \frac{MS_1}{LC}u_1^3, \\ \frac{dW_1}{dt} = -\frac{1}{LC}u_1, \\ \frac{dV_1}{dt} = -\gamma V_1 + \varphi(u_1), \end{cases} \quad (5)$$

где  $W = A - \frac{1}{LC} \int u dt$ ,  $A$  – константа. В безразмерных переменных система может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_{1,2}}{d\tau} = mx_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2} + y_{1,2} - dx_{1,2}^3 + \\ + \varepsilon[(x_{2,1} - x_{1,2}) - (y_{2,1} - y_{1,2})], \\ \frac{dy_{1,2}}{d\tau} = -x_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{d\tau} = -gz_{1,2} + g\Phi(x_{1,2}), \end{cases} \quad (6)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Введем задержку в канал связи следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_{1,2}(\tau)}{d\tau} = mx_{1,2}(\tau) - x_{1,2}(\tau)z_{1,2}(\tau) + y_{1,2}(\tau) - dx_{1,2}^3(\tau) + \\ + \varepsilon[(x_{2,1}(\tau - \tau_d) - x_{1,2}(\tau)) - (y_{2,1}(\tau - \tau_d) - y_{1,2}(\tau))], \\ \frac{dy_{1,2}(\tau)}{d\tau} = -x_{1,2}(\tau), \\ \frac{dz_{1,2}(\tau)}{d\tau} = -gz_{1,2}(\tau) + g\Phi(x_{1,2}(\tau)). \end{cases} \quad (8)$$

В отсутствие задержки при фиксированных параметрах  $g = 0.7$ ,  $d = 0$  при увеличении пара-

метра  $m$  в синхронном подпространстве объединенного фазового пространства системы (8) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Синхронизация хаоса наблюдается при  $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$ , где  $\varepsilon_0$  – некоторое пороговое значение. Кроме того, следует отметить существование области потери синхронизации периодических колебаний на плоскости параметров  $(\varepsilon, m)$  (рис. 6).

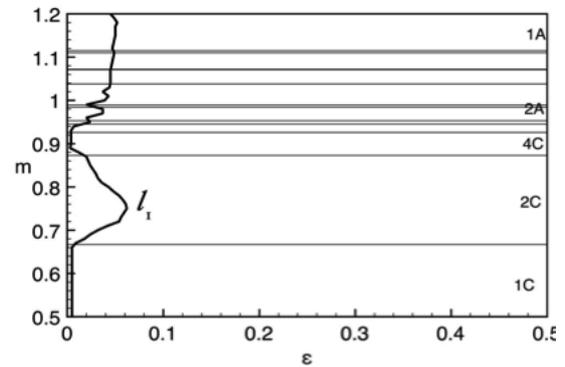


Рис. 6. Карта синхронных режимов системы (6). Кривая  $I_1$  разделяет области синхронизации (справа) и трансверсальной неустойчивости (слева)

Рассмотрим поведение системы (8) при фиксированном значении параметра  $m=1.1$  и варьируемых величинах коэффициента связи  $\varepsilon$  и задержки  $\tau_d$ . Карта режимов, построенная по результатам численного эксперимента, представлена на рис. 7.

Для  $\tau_d = 0$  и  $\varepsilon = 0$  одиночный осциллятор демонстрирует хаотический аттрактор, соответствующий синхронному хаотическому множеству 1A в объединенном фазовом пространстве системы (8). Это синхронное хаотическое множество неустойчиво при  $\varepsilon < 0.05$  и превращается в хаотический аттрактор при  $\varepsilon > 0.05$ . Введение малой задержки не вызывает качественных изменений в динамике системы. Однако увеличение времени задержки при фиксированной величине коэффициента связи вызывает обратный каскад бифуркаций слияния

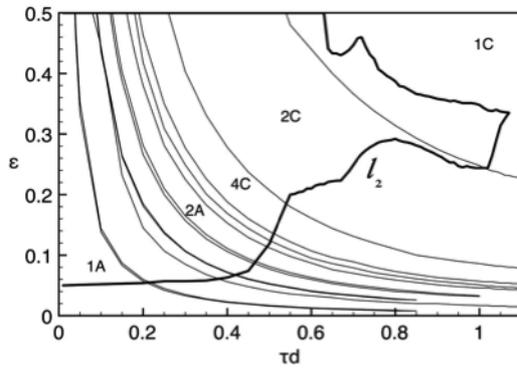


Рис. 7. Карта синхронных режимов системы (8). Кривая  $I_2$  разделяет область синхронизации (слева) и область трансверсальной неустойчивости (справа)

лент и обратный каскад бифуркаций удвоения периода, заканчивающийся циклом периода 1. Кривая  $I_2$  на рис. 7 ограничивает область полной синхронизации. Вне этой области эти режимы все еще существуют, но уже неустойчивы.

### Заключение

Представленные в данной работе результаты свидетельствуют о том, что введение задержки в канале связи дискретной хаотической системы приводит к потере полной синхронизации хаоса [7]. Однако для систем с непрерывным временем существует интервал значений  $\tau_d$ , при которых синхронное хаотическое множество остается устойчивым. Более того, существует типичный сценарий, по которому синхронизация хаоса сменяется синхронизацией периодических ко-

УДК 539.194

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИССОЦИАЦИЯ БРИЗЕРОВ УРАВНЕНИЯ СИНОС–ГОРДОНА ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

А.Г. Лавкин, М.Б. Мысенко, И.Н. Антонов

Саратовский государственный университет,  
кафедра теоретической и математической физики  
E-mail: TMF@SGU.RU

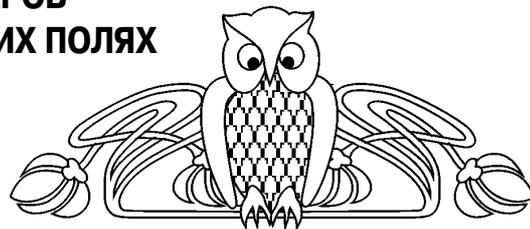
В работе исследуется методом максимальных ляпуновских показателей распад бризера Синус–Гордона в адиабатическом приближении во внешних полях. Определена зависимость между скоростью диссоциации бризера и значением максимального ляпуновского показателя. В работе также рассмотрены другие численные методы исследования хаотизации поведения различных динамических систем.

**Ключевые слова:** бризер уравнения Синус–Гордона; стохастическая диссоциация; адиабатическое приближение; максимальный показатель Ляпунова; хаотичность.

лебаний через обратный каскад бифуркаций удвоения периода (см. рис. 7). При превышении величины  $\tau_d$  определенного порогового значения происходит потеря синхронизации периодических колебаний.

### Библиографический список

1. Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L. Time Delay Induced Death in Coupled Limit Cycle Oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 5109.
2. Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L. Experimental Evidence of Time-Delay-Induced Death in Coupled Limit-Cycle Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 3381.
3. Yeung M.K.S., Strogatz S.H. Time Delay in the Kuramoto Model of Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 648.
4. Chung T.-H., Kim S. Spatio-Temporal Dynamics in Locally Coupled Ginzburg-Landau Oscillator Chain with Time Delay // Stochastic Dynamics and Pattern Formation in Biological and Complex Systems / Ed. by S. Kim, K.J. Lee, W. Sung. Berlin: Springer-Verlag, 2000. P. 67–74.
5. Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V. In-phase and Anti-phase Complete Chaotic Synchronization in Symmetrically Coupled Discrete Maps // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2002. Vol. 7. P. 215.
6. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 2. С. 3.
7. Астахов В.В., Неходцева Е.И., Астахов С.В., Шабунин А.В. Влияние задержки в канале связи на режимы полной синхронизации хаотических систем с дискретным временем // Изв. вузов: Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 5. С. 61.
8. Anishchenko V. Dynamical Chaos: Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995. 400 p.



### The Sine–Gordon Brizer Stochastic Dissoziation in an External Fields

A.G. Lavkin, M.B. Mysenko, I.N. Antonov

It is investigated, the Sine–Gordon brizer stochastic dissoziation in the external fields by the maximal Lyapunov parameters method in adiabatic approach. Dependence between the Sine-Gordon brizer dissoziation speed and the maximal Lyapunov parameters values is established.