

Рис. 7. Карта синхронных режимов системы (8). Кривая I_2 разделяет область синхронизации (слева) и область трансверсальной неустойчивости (справа)

лент и обратный каскад бифуркаций удвоения периода, заканчивающийся циклом периода 1. Кривая I_2 на рис. 7 ограничивает область полной синхронизации. Вне этой области эти режимы все еще существуют, но уже неустойчивы.

Заключение

Представленные в данной работе результаты свидетельствуют о том, что введение задержки в канале связи дискретной хаотической системы приводит к потере полной синхронизации хаоса [7]. Однако для систем с непрерывным временем существует интервал значений τ_d , при которых синхронное хаотическое множество остается устойчивым. Более того, существует типичный сценарий, по которому синхронизация хаоса сменяется синхронизацией периодических ко-

УДК 539.194

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИССОЦИАЦИЯ БРИЗЕРОВ УРАВНЕНИЯ СИНУС–ГОРДОНА ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

А.Г. Лавкин, М.Б. Мысенко, И.Н. Антонов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретической и математической физики
E-mail: TMF@SGU.RU

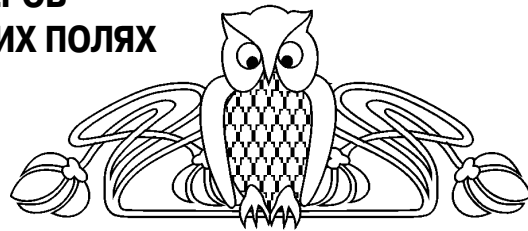
В работе исследуется методом максимальных ляпуновских показателей распад бризера Синус–Гордона в адиабатическом приближении во внешних полях. Определена зависимость между скоростью диссоциации бризера и значением максимального ляпуновского показателя. В работе также рассмотрены другие численные методы исследования хаотизации поведения различных динамических систем.

Ключевые слова: бризер уравнения Синус–Гордона; стохастическая диссоциация; адиабатическое приближение; максимальный показатель Ляпунова; хаотичность.

лебаний через обратный каскад бифуркаций удвоения периода (см. рис. 7). При превышении величины τ_d определенного порогового значения происходит потеря синхронизации периодических колебаний.

Библиографический список

1. Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L. Time Delay Induced Death in Coupled Limit Cycle Oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 5109.
2. Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L. Experimental Evidence of Time-Delay-Induced Death in Coupled Limit-Cycle Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 3381.
3. Yeung M.K.S., Strogatz S.H. Time Delay in the Kuramoto Model of Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 648.
4. Chung T.-H., Kim S. Spatio-Temporal Dynamics in Locally Coupled Ginzburg-Landau Oscillator Chain with Time Delay // Stochastic Dynamics and Pattern Formation in Biological and Complex Systems / Ed. by S. Kim, K.J. Lee, W. Sung. Berlin: Springer-Verlag, 2000. P. 67–74.
5. Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V. In-phase and Anti-phase Complete Chaotic Synchronization in Symmetrically Coupled Discrete Maps // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2002. Vol. 7. P. 215.
6. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 2. С. 3.
7. Астахов В.В., Неходцева Е.И., Астахов С.В., Шабунин А.В. Влияние задержки в канале связи на режимы полной синхронизации хаотических систем с дискретным временем // Изв. вузов: Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 5. С. 61.
8. Anishchenko V. Dynamical Chaos: Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995. 400 p.



The Sine–Gordon Brizer Stochastic Dissoziation in an External Fields

A.G. Lavkin, M.B. Mysenko, I.N. Antonov

It is investigated, the Sine–Gordon brizer stochastic dissoziation in the external fields by the maximal Lyapunov parameters method in adiabatic approach. Dependence between the Sine-Gordon brizer dissoziation speed and the maximal Lyapunov parameters values is established.



It is discussed also, the efficiency of the various numerical methods of research of the determined chaos of dynamic systems.

Key words: Sine-Gordon brizer; stochastic dissoziation; adiabatic approach; maximal Lyapunov parameter; chaotic character.

Введение

Весьма широкие физические приложения солитонов уравнения Синус–Гордона (СГ)

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \sin(\Phi) = 0 \quad (1)$$

хорошо известны. Это математическое моделирование самонаведенной прозрачности при распространении ультракоротких лазерных импульсов через двухуровневую систему, динамики флюксонов – квантов потока магнитного поля в джозефсоновской линии, динамики дислокаций в кристаллах и многие другие применения данной полевой модели.

Возмущенное уравнение СГ имеет вид [1]

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \sin(\Phi) = \varepsilon g. \quad (2)$$

Параметры солитона СГ в адиабатическом и следующем приближениях могут быть определены с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР).

Хаотичность динамики систем из солитонов СГ во внешнем монохроматическом поле численно моделировалась в работе [2] в максимально упрощенной длинноволновой модели. Методом сечений Пуанкаре и частотным методом показано, что переход системы к хаосу с ростом амплитуды и частоты внешнего поля происходит через удвоение периода внешнего возмущения.

В работе [3] моделировался случай гармонического внешнего поля методами качественной теории дифференциальных уравнений. С помощью функции Мельникова показано, что диссоциации бризера СГ соответствует развитая хаотичность его динамики и трансверсальное пересечение сепаратрис фазового пространства системы.

Хаотичность диссоциации бризера СГ в монохроматическом однородном внешнем поле моделировалась в [4] методом перекрытия резонансов в рамках простой квазичастичной модели. Была численно показана стабилизирующая роль диссипативных процессов (потери энергии бризером на излучение и т.п.) и возможность диссоциации бризера СГ при параметрическом его возбуждении.

В нашей работе рассмотрена динамика бризера СГ под действием неоднородных возмущений, моделирующих, например, влияние на бризер дефектов конденсированных сред. Показано, что бризер СГ может диссоциировать в случайных

полях, а шумовые возмущения солитонных ансамблей приводят к хаотическим резонансам и к потерям энергии на излучение.

Хаотизация динамики бризера СГ во внешнем поле

Рассмотрим [5] хаотизацию динамики бризера СГ во внешнем поле. Возмущенное уравнение СГ (2) в этом случае имеет вид

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \sin(\Phi) = \varepsilon R(\Phi), \quad (3)$$

где $\varepsilon R(\Phi)$ и есть возмущение. Параметры бризерного решения уравнения (3)

$$\Phi(x, t) = -4 \operatorname{arctg} \left(\frac{v \cos(\varphi)}{\eta \operatorname{ch}(z)} \right) \quad (4)$$

в адиабатической модели подчиняются следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{\varepsilon \sqrt{H}}{4 \cos \gamma} I_1, \quad \dot{V} = -\frac{\varepsilon \sqrt{H^3}}{4 \cos \gamma} I_2, \\ \dot{X}_0 &= V + \frac{\varepsilon H (I_3 - VI_4 \operatorname{tg} \gamma)}{(2 \sin \gamma)^2}, \\ \dot{\theta} &= \sqrt{H} \cos \gamma - \varepsilon \sqrt{H} (VI_3 \operatorname{ctg} \gamma + \\ &+ HI_4 \cos^2 \gamma - I_5) (4 \sin \gamma \cos^2 \gamma), \end{aligned} \quad (5)$$

которая получается при решении уравнения (3) методом МОЗР [4]. Здесь точкой обозначена производная по времени, $\gamma = \operatorname{arctg}(v/\eta)$ – характерная амплитуда СГ-бризера, V – его скорость ($H = 1 - V^2$), $d\theta/dt$ – частота собственных пульсаций бризера,

$\theta = \varphi + \frac{\eta}{v} VZ$, $Z = \frac{v(x - x_0(t))}{|\eta + iv|H}$, $x_0(t)$ – координата центра бризера. Интегралы $I_1 - I_5$ записываются следующим образом ($B = ch^2 Z + tg^2 \gamma \cos^2 \varphi$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch(z) \sin \varphi}{B} R(\Phi(z)) dz, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch(z) \sin \varphi}{B} R(\Phi(z)) dz, \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z ch(z) \sin \varphi}{B} R(\Phi(z)) dz, \\ I_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z ch(z) \cos \varphi}{B} R(\Phi(z)) dz, \\ I_5 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch(z) \cos \varphi}{B} R(\Phi(z)) dz. \end{aligned} \quad (6)$$



Рассмотрим динамику бризера СГ в случае, когда возмущающий член в уравнении (3) не зависит от пространственной координаты и имеет вид

$$\epsilon R(\Phi) = -F(t) - \alpha \Phi_t, \quad (7)$$

где $F(t)$ – внешнее пространственно-однородное

$$\dot{\gamma} = -\frac{\pi F \sin \theta}{4\sqrt{M} \cos \gamma} - \alpha \frac{tg \gamma \sin^2 \theta}{M} \left(1 + \frac{ctg \gamma arsh(tg \gamma \cos \theta)}{\sqrt{M} \cos \theta}\right), \quad (8)$$

$$\dot{\theta} = \cos \gamma - \frac{\pi F}{4 \sin \gamma} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{M} \cos^2 \gamma} - ctg(\gamma) arsh(tg \gamma \cos \theta) \right) - \alpha \frac{\cos \theta \sin \theta}{M \cos^2 \gamma} - \alpha \frac{tg(\gamma) arsh(tg \gamma \cos \theta)}{\sqrt{M^3}} \sin^3 \theta.$$

Особые точки и предельные циклы фазовых траекторий (8) на (γ, θ) – плоскости численно исследовались в работе [6] в случае ступенчатой зависимости $F(t)$ внешнего поля от времени при мгновенном и адиабатическом его включении. Случай гармонического внешнего поля $F(t) = A \sin(\omega t)$ изучался в [3] с помощью качественной теории дифференциальных уравнений. В данной работе динамика бризера СГ в ступенчатом и гармоническом внешних полях численно моделируется в адиабатической модели на основе уравнений (8) методом максимальных ляпуновских показателей. Кроме того, показывается, что величиной максимального ляпуновского показателя характеризуется скорость развала (диссоциации) бризера СГ во внешнем поле. Отметим еще раз, что диссоциация бризера СГ имеет место и при параметрическом его возбуждении [4].

Определенные заключения о динамике бризера СГ под действием возмущения (7) в адиабатической модели можно сделать на основе упрощенного квазичастичного подхода [7], рассматривая бризер как ангармонический осциллятор с потенциалом $U(r) = -8e^{-|r|} - \frac{\pi}{2} F(t)r + \alpha |V_{отн}|$, где r – расстояние между солитоном и антисолитоном, $V_{отн}$ – скорость их относительного движения.

Энергия бризера СГ отрицательна ($E = -2tg^2 \gamma$), и в отсутствии внешнего поля солитон-антисолитон образуют связанную систему, осциллирующую с частотой $\sim \sqrt{E}$ и амплитудой $\sim \ln\left(\frac{8}{|E|}\right)$. Внешнее поле, превышающее критическое значение $F_{кр}$, определяемое уравнением

$$E = \frac{\pi}{2} F_{кр} \left(\ln \frac{\pi F_{кр}}{16} - 1 \right),$$

вызывает диссоциацию бризера. Например, для $E \approx -0.16 F_{кр} \approx 0.015$, что

поле, а α характеризует интенсивность диссипативных процессов (потери энергии бризером на излучение и т.п.) [5]. В этом случае интегралы I_2 и I_3 тождественно равны нулю, а $V(t) = \text{const}$. Иными словами, возмущение (7) не выводит бризер из состояния покоя. Система уравнений (5) при $V(0)=0$ существенно упрощается ($M=1+tg^2 \gamma \cos^2 \theta$):

согласуется с результатами непосредственного решения уравнения Синус–Гордона (3).

Диссипативные процессы ($\alpha \neq 0$) увеличивают $F_{кр}$ и тем самым стабилизируют бризер от развала внешним полем. При достаточно интенсивной диссипации бризер СГ коллапсирует, не успев диссоциировать. Это типичная ситуация – стабилизирующий и дестабилизирующий факторы могут меняться ролями.

Моделирования нерегулярной динамики бризеров

Рассмотрим динамику бризера СГ, когда внешнее поле $F(t)$ зависит от времени ступенчатым образом, используя метод максимальных ляпуновских показателей. При этом, как и в [6], ограничимся начальными условиями:

$$ctg^2 \gamma(0) = 0.0785, \quad \theta(0) = \left(K + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad K = 1. \quad (9)$$

Соответственно бризер имеет начальную энергию $E \approx -0.16$ и находится в высоковозбужденном состоянии.

На рис. 1 представлена временная зависимость инкремента неустойчивости $\lambda_{max}(t)$ бризера СГ при мгновенном и адиабатическом включении в момент времени $t=0$ внешнего поля при $\alpha=0$. Видно, что для одной и той же амплитуды $F(t)$ максимальные ляпуновские показатели при мгновенном и адиабатическом включении внешнего поля совпадают. Это свидетельствует о равенстве $F_{кр}$ в обоих случаях и согласуется с данными работы [6] при целых K в уравнении (9). Вследствие чего ниже моделируется только случай мгновенного включения внешнего поля.

На рис. 2 показана зависимость максимального ляпуновского показателя от амплитуды ступенчатого внешнего поля в отсутствие и при наличии диссипации ($\alpha=0.005$). Видно, что

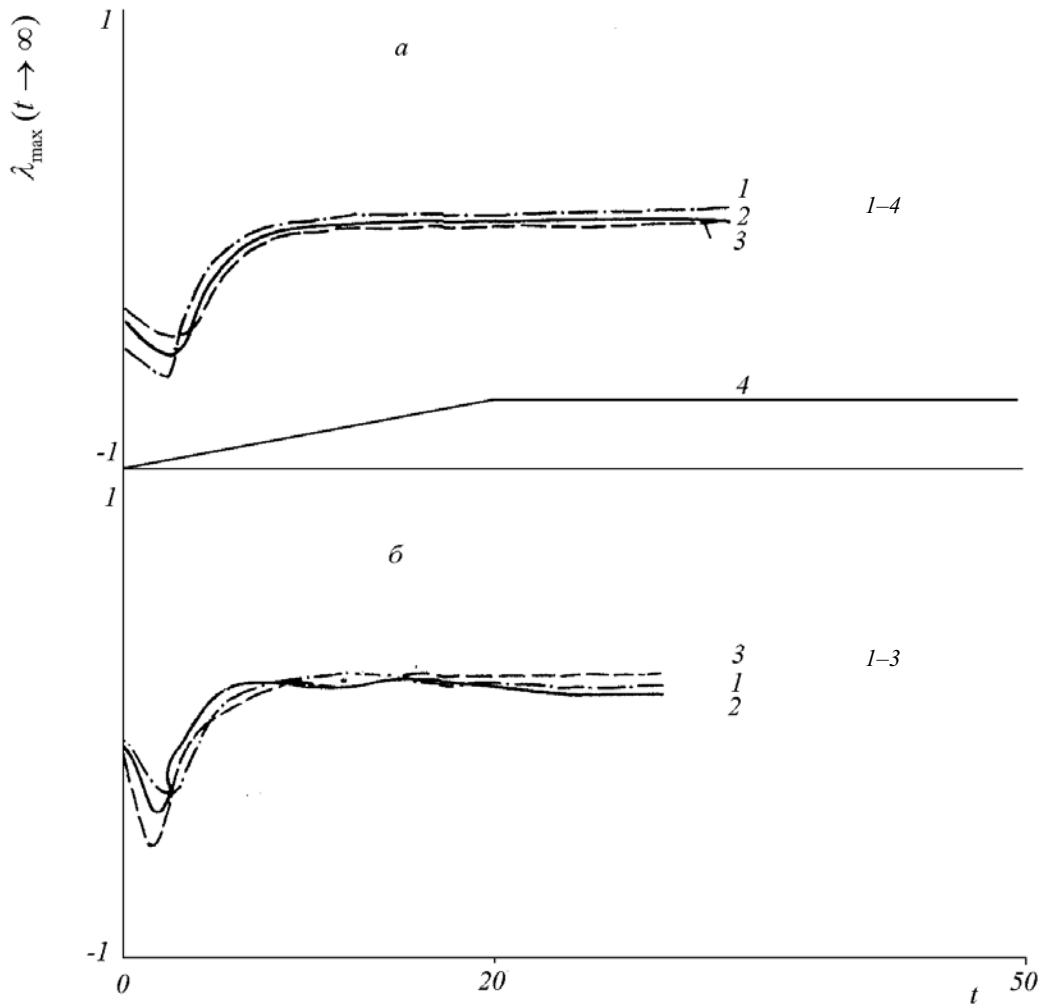


Рис. 1. Зависимость $\lambda_{\max}(t)$: *a* – для ступенчатого внешнего поля при $\alpha=0$ (1, 2 – мгновенное, 3 – адиабатическое включение внешнего поля с амплитудой, равной 0.0136; 0.005; 0.005 соответственно, 4 – $F(t)$ при адиабатическом включении внешнего поля), *б* – для гармонического внешнего поля $F(t)=A \cdot \sin(\omega t)$, $\alpha=0.005$ (1 – $A=0.0165$, $\omega=0.15$; 2 – $A=0.02$, $\omega=0.5$; 3 – $A=0.03$, $\omega=1$)

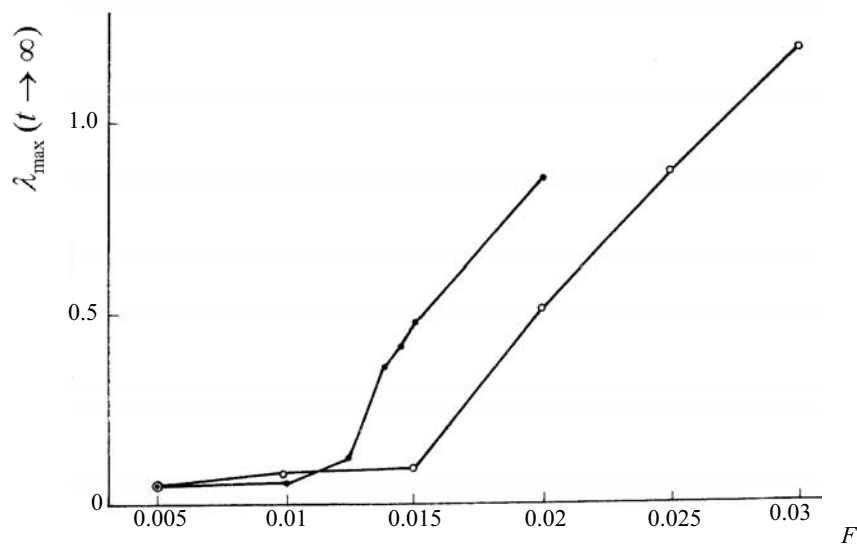


Рис. 2. Зависимость $\lambda_{\max}(t \rightarrow \infty)$ от амплитуды внешнего поля: ● – $\alpha=0$, ○ – $\alpha=0.005$



максимальные ляпуновские показатели положительны и динамика бризера СГ хаотична. При этом переход к развитой хаотичности, при которой $\lambda_{max}(t \rightarrow \infty) \approx 0.5$ и скорость диссоциации бризера высока, происходит в отсутствие диссипации при $F_{кр} \approx 0.015$. При наличии диссипации ($\alpha = 0.005$) соответствующее значение $F_{кр} \approx 0.02$ заметно больше. Эти выводы находятся в согласии с данными работ [4, 6].

Из рис. 2 также следует, что динамика бризера СГ хаотична и при $F < F_{кр}$. Здесь максимальные ляпуновские показатели определенно положительны, но по величине значительно меньше, чем при $F > F_{кр}$. Последнее означает, что скорость диссоциации бризера чрезвычайно мала.

Учитывая регулярность динамики стабильных систем [7], для которых $\lambda_{max}(t \rightarrow \infty) = 0$, можно ожидать обратную зависимость времени диссоциации τ бризера СГ от величины максимального ляпуновского показателя:

$$\tau \approx \frac{1}{[\lambda_{max}(t \rightarrow \infty)]^x} \quad (10)$$

Скорость диссоциации бризера можно оценить [8, 9] по времени τ , когда расстояние между солитонами и антисолитонами в момент развала

бризера достигает определенной величины L . На рис. 3, а представлена зависимость τ от амплитуды ступенчатого внешнего поля ($L = 2.75$) в отсутствие и при наличии диссипации [10]. Аппроксимирующие кривые (10) на этом рисунке проведены с использованием данных, представленных на рис. 2. Видно, что удовлетворительное описание при $\alpha = 0$ достигается, если $x = 0.28$, а при $\alpha = 0.005$, если $x = 0.64$.

Теперь промоделируем с помощью метода максимальных ляпуновских показателей динамику бризера СГ в гармоническом внешнем поле $F(t) = A \cdot \sin(\omega t)$. Этот вопрос изучался в работе [3] методами качественной теории дифференциальных уравнений с использованием функции Мельникова и анализа трансверсальности пересечения сепаратрис фазовых траекторий.

На рис. 3, б плавной кривой показана граница между областью хаотичной динамики бризера СГ (выше кривой), когда он достаточно быстро диссоциирует, и областью его регулярной динамики (ниже кривой) [3]. На рис. 1, б изображена зависимость $\lambda_{max}(t)$ при $\alpha = 0.005$ в трех точках граничной кривой, показанной на рис. 3, б: $A_1 = 0.0165, \omega_1 = 0.15; A_2 = 0.02, \omega_2 = 0.5; A_3 = 0.03, \omega_3 = 1$. Видно, что соответствующие

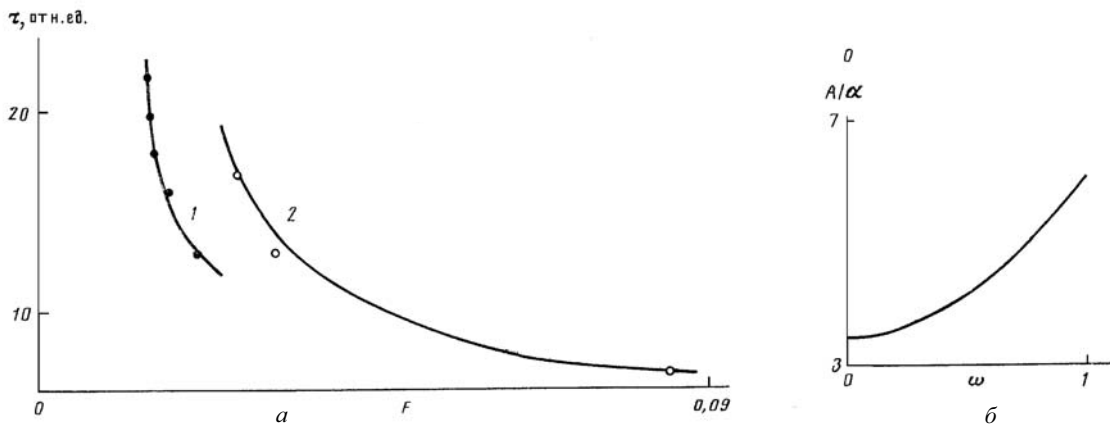


Рис. 3. Зависимость времени диссоциации бризера СГ от амплитуды внешнего поля: а – точки \bullet – $\alpha = 0$, \circ – $\alpha = 0.005$, кривая 1 – $\tau \sim \lambda_{max}^x(t \rightarrow \infty)$ при $x = 0.28$, кривая 2 – $\tau \sim \lambda_{max}^x(t \rightarrow \infty)$ при $x = 0.64$; б – граница между областями регулярной и хаотичной динамики бризера СГ в гармоническом внешнем поле $A \cdot \sin(\omega t)$ при наличии диссипации

значения максимального ляпуновского показателя положительны и малы по величине 0.06; 0.04; 0.13, причем в третьей точке его величина заметно отличается от первых двух. Это говорит о том, что на данной кривой динамика бризера СГ слабохаотична, а выбранный в работе [3] критерий развала (степени хаотичности) бризера СГ в области частот $\omega \approx 1$ не вполне эквивалентен критерию, использованному там при более низких частотах.

Заключение

В данной работе методом максимальных ляпуновских показателей численно исследована диссоциация бризера СГ во внешних однородных полях в отсутствие и при наличии диссипации. Показана хаотичность процесса диссоциации, установлена связь скорости диссоциации бризера СГ с величиной максимального ляпуновского показателя.



Библиографический список

1. Парментье Р. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1991. С. 185.
2. Yeh W., Kao Y. Universal Scaling and Chaotic Behavior of a Josephson-Junction Analog // Physical Review Letters. 1982. Vol. 49. P. 1888.
3. Ariyasu J., Bishop A. Determination of the onset of spatiotemporal complexity induced by soliton competition in a perturbed sine-Gordon chain // Physical Review. 1989. Vol. A39. P. 6409.
4. Абдуллаев Ф.Х. Динамический хаос солитонов. Ташкент: ФАН, 1990.
5. Лавкин А.Г. Исследование диссоциации бризера синус-Гордона во внешнем поле // Ядерная физика. 1991. Т. 54. С. 1290.

6. Карпман В.И. Особые точки и предельные циклы фазовых траекторий бризеров уравнения Синус–Гордона // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1983. Т. 84. С. 289.
7. Barashenkov I.V., Smirnov Yu.S., Alexeeva N.V. Bifurcation to multisoliton complexes in the ac-driven, damped nonlinear Schrödinger equation // Physical Review. 1998. Vol. E57. P. 2350.
8. Лавкин А.Г. Исследование диффузионной диссоциации классической гетерополярной молекулы в поле поляризованного ИК излучения // Опт. и спектр. 1991. Т. 70. С. 1021.
9. Матрасулов Д.У. Хаос в сверхкритическом атоме // Ядерная физика. 2001. Т. 64. С. 299.
10. Карпман В. Preprint IZMIRAN. № 52A, 1981.

УДК 539.194

НЕРЕГУЛЯРНАЯ ДИНАМИКА ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА В ТЕРМОСТАТЕ

А.Г. Лавкин, М.Б. Мысенко, И.Н. Антонов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретической и математической физики
E-mail: TMF@sgu.ru

Исследуется хаотичность калибровочных полей в модели Янга–Миллса в формализме ланжевеновских источников в термостате. Методом максимальных ляпуновских показателей показано, что с ростом температуры возрастает и радиус корреляции (конфайнмента), то есть имеет место фазовый переход адронная материя – кварк-глюонная плазма. Причиной этого фазового перехода является стабилизация динамики полей глюонов флуктуациями термостата.

Ключевые слова: калибровочное поле, поле Янга–Миллса, конфайнмент, квантовая хромодинамика, кварк-глюонная плазма, метод источников Ланжевена.

The Irregular Dynamics of the Yang–Mills Fields in Thermostat

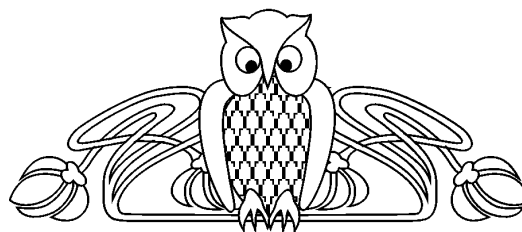
A.G. Lavkin, M.B. Mysenko, I.N. Antonov

Dynamics of the homogeneous SU (2) Yang–Mills fields in thermostats and at their stochastic quantization are investigated by the Langeven's sources method.

It is shown, that with growth of temperature the phase transition confinement-deconfinement in chromodynamics takes place, and quantization of the Yang–Mills fields results in increase of radius of correlation (confinement) colors.

Key words: gage field, Yang–Mills field, confinement, quantum chromodynamics, quark-gluon plasma, Langeven's sources method.

Актуальность исследования хаотичности калибровочных полей в модели Янга–Миллса (ЯМ) связана с возможностью нетрадиционной интерпретации конфайнмента носителей цветных



зарядов (кварков и глюонов) в физике высоких энергий.

Наиболее доступны для исследования на хаотичность пространственно – однородные и плоские калибровочные поля ЯМ. Причем плоские волны ЯМ могут быть сведены к однородному случаю, так как они получаются из однородных с помощью преобразования Лоренца. Это преобразование всегда существует, в отличие, например, от линейной безмассовой электродинамики, именно благодаря нелинейности свободных неабелевых калибровочных полей ЯМ [1].

Несмотря на то, что эти модели полей ЯМ являются крайним упрощением для реальных пространственно-неоднородных полей, их исследования представляют значительный интерес вследствие следующих обстоятельств.

- Условие однородности означает длинноволновое приближение (или сильные поля) $\lambda \gg \gg A^{-1}$ (λ , A – безразмерные длина волны и амплитуда поля) и можно надеяться, что изучение таких моделей полезно для получения информации об инфракрасном режиме квантовой хромодинамики (КХД) – наиболее неясном ее пункте.

- Однородные модели важны при рассмотрении проблемы квантования калибровочных полей в модели ЯМ. Поскольку хаотичность