



4. Херман Д.В. Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. М.: Наука, 1990.
 5. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
 6. Chacon R. Inhibition of chaos in Hamiltonian systems by periodic pulses // Physical Review. 1994. Vol. E50, pt.A. P. 750.
 7. Matias M., Gitemes J. Chaos suppression in flows using proportional pulses in the system variables // Physical Review. 1998. Vol. E54. P. 198.

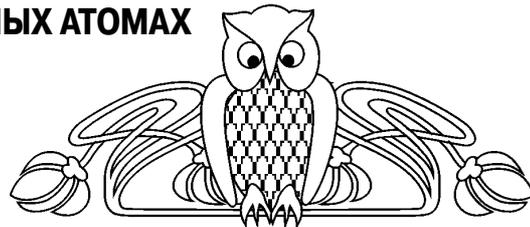
8. Лавкин А.Г. Функции Ляпунова и стохастичность классических SU (2)-полей Янга–Миллса // Ядерная физика. 1991. Т. 53. С. 313.
 9. Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // Успехи физических наук. 1989. Т. 158. С. 93.
 10. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Наука, 2001.

УДК 621.382.029.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПРАВОК К ТОНКОМУ СДВИГУ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМАХ

О.А. Бойкова, Н.А. Бойкова, С.В. Клещевская, Ю.Н. Тюхтяев

Саратовский государственный университет,
 кафедра теоретической и ядерной физики
 E-mail: alex2222@gmail.com



$$v_{1S-2S}^L = 2\,466\,061\,413\,187.34(84) \text{ кГц}, \quad (1)$$

то в 2000 году –

$$v_{1S-2S}^L = 2\,466\,061\,413\,187\,103(46) \text{ Гц}. \quad (2)$$

Это позволяет с рекордной точностью определить значение такой фундаментальной величины, как постоянная Ридберга.

Заметим, что при обосновании рекомендуемого CODATE значения этой универсальной мировой константы [1] учитывались, в частности, теоретические разработки [2]. С другой стороны, за последнее время расширился список обзоров, анализирующих теоретически результаты [3–6].

Тонкое и сверхтонкое расщепление спектров водородоподобных атомов являются чисто квантовоэлектродинамическими эффектами, которые не рассматриваются в классической электродинамике и описываются в квантовой электродинамике. Теоретические исследования указанных эффектов имеют фундаментальное значение, так как на достаточно простой модели двух заряженных взаимодействующих частиц (e^-e^+ , π^+e^- , p^+e^- , μ^+e^-) позволяют проверить методы квантовой теории с высокой точностью. Развитие квантовоэлектродинамических методов оказывает влияние на теорию сильных взаимодействий – квантовую хромодинамику. Так, в квантовой хромодинамике различие масс пионов определяется как сверхтонкое расщепление уровней энергии связанной системы кварк – антикварк в пределе асимптотической свободы, когда константа связи много меньше единицы. В этом случае описание сверхтонкой структуры может быть выполнено методами,

Рассматривается метод расчёта величины тонкого сдвига уровней энергии водородоподобных атомов на основе релятивистски модернизированного квазипотенциального уравнения. Развита соответствующая теория возмущений, позволяющая рассчитывать сдвиги уровней энергии водородоподобных атомов с высокой точностью. Рассчитаны логарифмические поправки порядка $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ для однофотонных взаимодействий и подтверждён более ранний результат.

Ключевые слова: связанное состояние, тонкий сдвиг, уровень энергии, водородоподобный атом, кулоновское взаимодействие, логарифмическая поправка.

The Research of Corrections to the Fine Shift of Energy Levels in the Hydrogen-Like Atoms

O.A. Boikova, N.A. Boikova, S.V. Kleshchevskaya, Y.N. Tyukhtyaev

The method of calculation of the value the thin shifts of energy levels of bound states on a basis relativistic upgraded quasipotential equation is considered. The appropriate perturbation theory permitting to calculate shifts of the energy levels in hydrogen-like atoms with a high accuracy is advanced. We obtained logarithmic corrections about $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ by one photon interaction are obtained, and earlier conventional result is confirmed.

Key words: the bound state, the fine shift, the energy level, the hydrogen-like atoms, the Coulomb interaction, the logarithmic correction.

В последние годы интерес к исследованиям спектров водородоподобных атомов проявился достаточно отчетливо. Благодаря переходу от методов радиочастотной спектроскопии к исследованию возможностей бездоплеровской двухфотонной спектроскопии точность экспериментальных данных существенно возросла.

Интервал $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ измерен в настоящее время [1,2] в атоме водорода с точностью до десятка Гц. Если в 1997 году его значение составляло



проверенными в квантовой электродинамике на водородоподобных системах. Результаты проведенных расчетов совпадают с экспериментальными значениями с высокой степенью точности. Таким образом, появляется возможность на достаточно простой модели проверить методы квантовой теории с высочайшей точностью и получить высокоточное значение фундаментальных физических констант.

Квазипотенциальный подход дает два способа вычисления значения тонкого сдвига водородоподобного атома с точностью до пятого порядка по константе тонкой структуры α . Один из них не учитывает зависимости квазипотенциала от внешних импульсов, в другом квазипотенциал $V(\bar{p}, \bar{q}, E)$ рассматривается как функция импульсов и энергии.

Метод, не учитывающий зависимости квазипотенциала от внешних импульсов, сопровождается появлением расходимостей, которые устраняются в суммарном выражении. В связи с этим возникает необходимость введения нефизического параметра обрезания. Данный метод не дает возможности полного вычисления поправок более высокого порядка, чем α^5 .

Суть явления отдачи – учет конечности массы ядра. Характеристика конечности массы – параметр отношения масс частиц $\beta = m_1/m_2$ (для водорода – $5.446170232(12) \cdot 10^{-4}$, для мюония – $4.83633210(15) \cdot 10^{-3}$). Если положить $\beta=0$, то масса ядра становится бесконечной и мы имеем одночастичную задачу о движении частицы массы m . Если $\beta=1$, то рассматривается задача о позитронии, а если $0 < \beta < 1$, то получаем более общий случай водородоподобного атома.

Основное уравнение квазипотенциального подхода имеет вид

$$(E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p}) \Psi_E(\bar{q}) = \int \frac{V(\bar{p}, \bar{q}, E)}{(2\pi)^3} \Psi_E(\bar{q}) d^3q, \quad (3)$$

где E – собственное значение полной энергии, $\varepsilon_{ip} = \sqrt{p^2 + m_i^2}$, $i=1,2$, m_i – масса i -й частицы водородоподобного атома; $\Psi_E(\bar{q})$ – волновая функция, квазипотенциал $V(\bar{p}, \bar{q}, E)$ представляется в виде $V = T_+(I + FT_+)^{-1}$, операция $(\dots)_+ = u_1^* u_2^* \gamma_{10} \gamma_{20} (\dots) u_1 u_2$ означает проектирование на состояния с положительными энергиями; u_i – дираковский биспинор, записанный в двухкомпонентной форме; γ_{i0} – матрицы Дирака; амплитуда рассеяния $T(\bar{p}, \bar{q}, E) = T(\bar{p}, \bar{q}, p_0, q_0, E)|_{p_0=q_0=0}$, $F^{-1} = (2\pi)^3 \delta^3(\bar{p} - \bar{q})(E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})$. Параметры \bar{p} , \bar{q} , E можно считать независимыми.

Для прецизионных исследований необходимо учесть зависимость квазипотенциала от импуль-

сов \bar{p} , \bar{q} и энергии E . Используя обычное разложение амплитуды рассеяния T в ряд по степеням постоянной тонкой структуры α

$$T_+ = T_+^{(2)} + T_+^{(4)} + \dots, \quad (4)$$

получим

$$V = T_+(1 - FT_+ + FT_+FT_+ - \dots) \quad (5)$$

или в низших порядках теории возмущений

$$V = V^{(2)} + V^{(4)} = T_+^{(2)} + T_+^{(4)} - T_+^{(2)}FT_+^{(2)}. \quad (6)$$

Отсюда

$$V^{(2)} = T_+^{(2)}, \quad V^{(4)} = T_+^{(4)} - T_+^{(2)}FT_+^{(2)}. \quad (7)$$

Амплитуда рассеяния строится с помощью фейнмановской диаграммной техники. В случае кулоновской калибровки

$$T_+^{(2)} = (K_c)_+ + (K_T)_+, \quad (8)$$

где ядра $(K_c)_+$ и $(K_T)_+$ описывают обмен одним кулоновским и одним поперечным фотонами соответственно. Двухфотонные взаимодействия с амплитудой $T_+^{(4)} = (T_{par})_+^{(4)} + (T_{cr})_+^{(4)}$ представляются диаграммами двух типов (рис. 1, 2).

Специфика теоретических исследований эффектов отдачи определяется необходимостью использования двухчастичной релятивистской теории для определения тонкого сдвига уровней энергии водородоподобных атомов. Впервые это было сделано на основе уравнения Бете–Солпитера [7]

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{mM} \frac{1}{n^3} \left\{ \frac{2}{3} \delta_{l0} \ln \alpha^{-1} - \frac{8}{3} \ln[k_0(n)] - \frac{1}{9} \delta_{l0} - \frac{7}{3} a_n + \frac{2}{M^2 - m^2} \delta_{l0} \left(m^2 \ln \frac{M}{\mu} - M^2 \ln \frac{m}{\mu} \right) \right\}, \quad (9)$$

где

$$a_n = -2 \left[\ln \frac{2}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + 1 - \frac{1}{2n} \right] \delta_{l0} + \frac{1 - \delta_{l0}}{l(l+1)(2l+1)},$$

Z – заряд ядра, $\mu = \frac{mM}{m+M}$ – приведённая масса, n – главное квантовое число, $\ln[k_0(n)]$ – логарифм Бете, l – орбитальное квантовое число.

Из формулы (9) следует, что поправки на отдачу определяются малыми параметрами $Z\alpha$

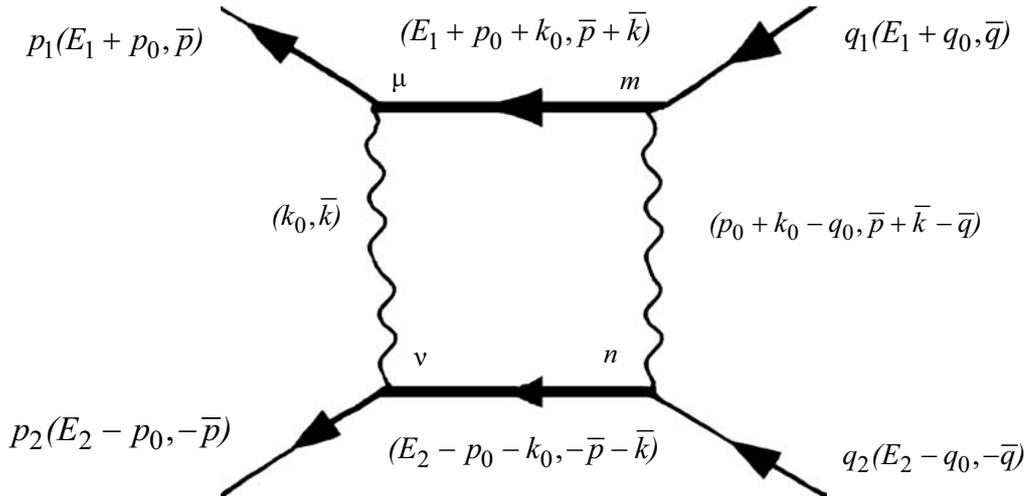


Рис. 1. Диаграмма параллельного обмена

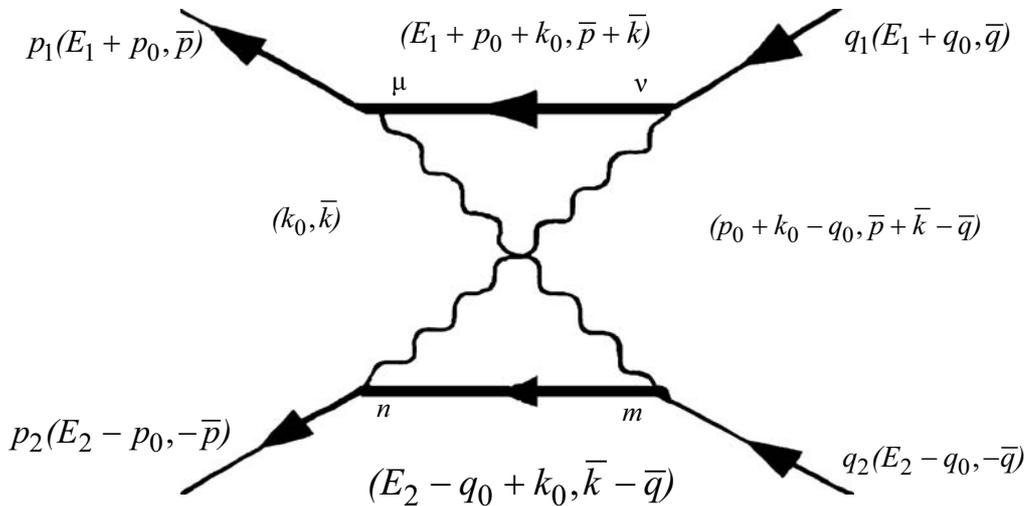


Рис. 2. Диаграмма перекрестного обмена

и $\beta = m/M$. В случае логарифмической зависимости имеем:

$$\begin{aligned} \ln \alpha^{-1} &\approx 4.92, \\ \ln \beta^{-1} &\approx 5.33 \text{ (для мюония),} \\ \ln \beta^{-1} &\approx 7.52 \text{ (для водорода).} \end{aligned}$$

Большая величина логарифмических вкладов заставляет обратить на их исследование особое внимание. Поправки $\frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}$, рассчитанные для мюония [8], а затем Феллом для позитрония [9] привлекли внимание многих теоретиков.

Теория возмущений для исследования эффектов отдачи в водородоподобных атомах такова, что члены ряда по константе тонкой структуры α зависят от параметра отношения масс частиц β . В качестве примера обсудим вычисление логарифмической по α поправки шестого порядка по константе тонкой структуры к тонкому сдвигу

уровней энергии водородоподобных атомов. Сначала проанализируем выражение для квази-потенциала, отвечающего однофотонному взаимодействию частиц.

Рассмотрим кулоновскую часть взаимодействия, опуская слагаемые, отвечающие за сверхтонкий сдвиг:

$$\begin{aligned} \Delta E_C &= \langle \Phi_C^*(\vec{p}) | (K_C)_+ - v_C | \Phi_C(\vec{q}) \rangle = \\ &= \langle \Phi_C^* | v_C N_p N_q \left(1 + \frac{\vec{p}\vec{q}}{M_{1p} M_{1q}} + \frac{\vec{p}\vec{q}}{M_{2p} M_{2q}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{M_{1p} M_{1q} M_{2p} M_{2q}} \right) - v_C | \Phi_C(\vec{q}) \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Phi_C(\vec{q}) N_p = N_{m_1 p} N_{m_2 p}$ – кулоновская волновая

функция, $N_{m_i p} = \sqrt{\frac{M_{ip}}{2\varepsilon_{ip}}}$, $M_{ip} = \varepsilon_{ip} + m_i$, $i = 1, 2$.



Воспользуемся разложением радикалов ε_{ip} и нормировочных множителей $N_{m_i p}$ по степеням \bar{p}^2/m_i^2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ip} &= m_i \left(1 + \frac{p^2}{2m_i^2} - \frac{p^4}{8m_i^4} + \dots \right), \\ N_{m_i p} &= 1 - \frac{p^2}{8m_i^2} + \frac{11p^4}{128m_i^4} - \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда с точностью до членов порядка $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ мы имеем право записать

$$\begin{aligned} [(K_C)_+ - \nu_C]^{lead} &= \frac{\pi\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) - \\ -4\pi\alpha \left\{ \frac{(\bar{p}-\bar{q})^2}{64m_1^2 m_2^2} + \frac{3}{64} \left(\frac{1}{m_1^4} + \frac{1}{m_2^4} \right) (p^2 + q^2) \right\} - \\ - \frac{5}{32} \frac{\pi\alpha}{(\bar{p}-\bar{q})^2} \left(\frac{1}{m_1^4} + \frac{1}{m_2^4} \right) (p^2 - q^2)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение с точностью до $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ совпадает с потенциалом, исследовавшимся в работе [10]:

$$V_C(\bar{p}, \bar{q}) = V_C^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}) + V_C^{(4)}(\bar{p}, \bar{q}),$$

где $V_C^{(2)}(\bar{p}, \bar{q})$ – часть ядра Брейта, позволяющая вычислять поправки, пропорциональные α^4 ,

$$\begin{aligned} V_C^{(4)}(\bar{p}, \bar{q}) &= -4\pi\alpha \left\{ \frac{(\bar{p}-\bar{q})^2}{64m_1^2 m_2^2} + \right. \\ &+ \frac{3}{64} \left(\frac{1}{m_1^4} + \frac{1}{m_2^4} \right) (p^2 + q^2) \left. \right\} - \\ &- \frac{5}{32} \frac{\pi\alpha}{(\bar{p}-\bar{q})^2} \left(\frac{1}{m_1^4} + \frac{1}{m_2^4} \right) (p^2 - q^2)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Соответствующий сдвиг, пропорциональный $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$, записывается в виде

$$\begin{aligned} \delta E'_C &= \langle \Phi_C^*(\bar{p}) | V_C^{(4)}(\bar{p}, \bar{q}) | \Phi_C(\bar{q}) \rangle = \\ &= \varepsilon \mu^2 \frac{5}{4} \left(\frac{m_1}{m_3^2} + \frac{m_2}{m_3^2} \right), \quad \varepsilon = \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где μ – приведенная масса. Результат (14) представим, как

$$\delta E'_C = \frac{5}{4} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{1}{\beta} \ln \alpha^{-1} - \frac{5}{2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}, \quad (15)$$

где $\frac{1}{\beta} \ln \alpha^{-1} = \begin{cases} 9034,32 & \text{(для водорода)} \\ 1017,35 & \text{(для мюония)} \end{cases}$.

Отметим, что неравенство $\delta E'_C(\alpha^6) \gg \delta E'_C(\alpha^5)$ ведет к нарушению сходимости ряда теории возмущений.

Обратимся теперь к обмену одним поперечным фотоном. При вычислении логарифмической по константе тонкой структуры поправки порядка α^6 , можно исходить из выражения

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_T &= \frac{4}{\pi^4} \frac{\alpha^6 \mu^5}{m_1 m_2} \int \frac{N_p d^3 p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\ &\times \int \frac{N_q d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \frac{(\bar{p}\bar{q})}{(\bar{p}-\bar{q})^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда после простых преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_T(\alpha^6 \ln \alpha^{-1}) &= \frac{4}{\pi^4} \frac{\alpha^6 \mu^5}{m_1 m_2} \int \frac{d^3 p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \times \\ &\times \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)} \frac{1}{8(q^2 + m_1^2)} \frac{1}{(\bar{p}-\bar{q})^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{или} \quad \Delta \tilde{E}_T(\alpha^6 \ln \alpha^{-1}) = 2 \frac{\alpha^6 \mu^5}{m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}. \quad (18)$$

Величина этой поправки (18) в тонкий сдвиг совпадает с суммарным результатом диаграмм (а)–(b)–(c)–(d)–(e)–(f) работы [8]. Логарифмический по константе тонкой структуры вклад обусловлен интегралом

$$\begin{aligned} i &= \int \frac{d^3 p}{(p^2 + \alpha^2 \mu^2)} \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)} \frac{1}{(\bar{p}-\bar{q})^2} \approx \\ &\approx 4\pi^4 \ln \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Легко увидеть, что этот интеграл расходится. Его вычисление согласно [11] относится к «логарифмическому промежутку» $\mu\alpha \leq p \leq \mu$. Именно в этом промежутке интегрирования получаем численное значение (19). Отметим также, что логарифмический по константе тонкой структуры вклад в случае двухфотонного обмена поперечными фотонами определяется тем же интегралом [12].

В работах [8, 12] отмечено, что логарифмические по α вклады, обусловленные однофотонным и двухфотонным обменами поперечным фотоном, равны по величине и противоположны по знаку. Но это не значит, что разность соответствующих интегралов не приводит к поправкам более высокого порядка по α .

Таким образом, вопрос о вкладах шестого порядка по α решается релятивистскими методами. Для получения поправок высших порядков требуется уточнение исходного аналитического выражения для тонкого сдвига на основе модифицированного квазипотенциального уравнения.

**Библиографический список**

1. *Mohr P.J., Taylor B.N.* CODATE recommended values of the fundamental physics constants. 2000 // *Rev. Mod. Phys.* 2000. Vol. 72, № 2. P. 5496–5499.
2. *Бойкова Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.* О вкладах порядка $\alpha^6 \ln(m_2/m_1)$ в тонкий сдвиг S-уровней энергии мюония // *Ядерная физика.* 1998. Т. 61, № 5. С. 866–870.
3. *Fulton T., Martin P.C.* Two-body system in quantum electrodynamics. Energy levels of positronium // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 95, № 3. P. 811–822.
4. *Grotch H., Yennie D.R.* Effective potential model for calculating nuclear corrections to the energy levels of hydrogen // *Rev. Mod. Phys.* 1969. Vol. 41, № 2. P. 350–374.
5. *Ньюнко Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.* Влияние движения ядра на тонкую структуру водорода / Сообщение ОИЯИ Р2-7493. Саратов, 1973. 16 с.
6. *Doncheski M., Grotch H., Erickson G.W.* Pure recoil cor-

- rections to the Lamb shift in hydrogenic atoms // *Phys. Rev.* 1991 Vol. 43, № 5. P. 2152–2170.
7. *Salpeter E.E., Bethe H.A.* Relativistic equation for bound state problems // *Phys. Rev.* 1951. Vol. 84, № 6. P. 1232–1242.
8. *Khriplovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovsky A.S.* Corrections of $(\alpha^6 \ln \alpha)$ in two-body QED problem // *Phys. Lett. B.* 1992. Vol. 282. P. 237–242.
9. *Fell R.N.* Order $\alpha^4 \ln \alpha^{-1} f_{RYD}$. Corrections to the $n=1$ and $n=2$. Energy levels of positronium // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68. P. 25–28.
10. *Khriplovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovsky A.S.* Logarithmic corrections in the two-body QED problem // *Physica Scripta.* 1993. Vol. 146. P. 252–260.
11. *Fell R.N.* Corrections of $(\alpha^6 \ln \alpha)$ / Preprint BUM 01742. Massachusetts, 1992.
12. *Fell R.N., Khriplovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovsky A.S.* On the recoil corrections in hydrogen // *Phys. Lett. A.* 1993. Vol. 181. P. 172–174.

УДК 535.343.9; 530.145

ABSORPTION AS AN INDICATION OF VACUUM e^+e^- PAIR CREATION IN A STRONG NONSTATIONARY ELECTRIC FIELD

D.B. Blaschke^{a,b,c}, S.V. Ilyine^d, G. Röpke^c, S.A. Smolyansky^d^a Institute of Theoretical Physics, University of Wrocław, 50–204 Wrocław, Poland^b Bogoliubov Laboratory for Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, RU-141980 Dubna, Russia^c Institut für Physik, Universität Rostock, D-18051 Rostock, Germany^d Saratov State University, RU-410026 Saratov, Russia

E-mail: isv-new@mail.ru

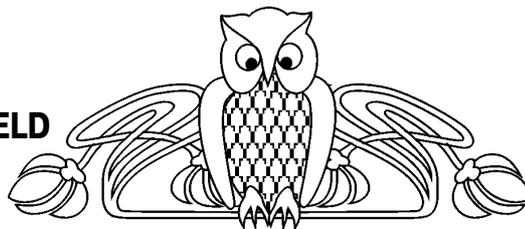
We discuss the high frequency conductivity and absorption coefficient of an electron – positron plasma (EPP) created from the vacuum in a strong nonstationary electric field (nonstationary Schwinger mechanism). It is shown that the basic contribution here is due to vacuum polarization effects. For subcritical linearly polarised fields, we obtain the general expression for the induced conductivity and the absorption coefficient, which is investigated in a wide range of frequencies from the optical to the γ -ray region.

Key words: electron-positron plasma; Schwinger mechanism; vacuum creation; X-ray laser; quasiparticle; optical properties.

Поглощение как Индикатор Вакуумного Рождения e^+e^- Пар в Сильных Нестационарных Электрических Полях

Д.Б. Бляшке, С.В. Ильин, Г. Рёпке, С.А. Смолянский

Обсуждаются коэффициенты высокочастотной проводимости и поглощения электрон-позитронной плазмы, рождающейся из вакуума в сильных нестационарных электрических полях (нестационарный механизм Швингера). Показано, что основной вклад обусловлен вакуумными поляризационными эффектами. Для субкритических линейно поляризованных полей, получены



основные выражения для индуцированной проводимости и коэффициента поглощения, которые исследованы в широком диапазоне частот.

Ключевые слова: электрон-позитронная плазма, механизм Швингера, вакуумное рождение, рентгеновский лазер, квазичастица, оптические свойства.

1. Introduction

The formation of a relativistic EPP created from the vacuum under the action of an ultrashort optical laser pulse is one of the topics of modern fundamental physics and forthcoming experimental efforts [1,2]. It has been estimated that a zetawatt laser with intensity 10^{28} W/cm² could be built. That would allow to approach the Schwinger limit of the electric field for electron-positron pair creation $E_c = m^2/e = 1.3 \times 10^{16}$ V/cm. Vacuum creation of light mesons becomes also possible for such subcritical fields [3]. It is discussed as one of the perspectives at the X-ray laser [4,5]. Thus the experimental observation of vacuum EPP has become an actual problem. Some of the observable effects have been discussed before in the literature, see, e. g., Ref. [6,7].

In the present work, we avoid to detail methods of the generation of acoherent quasiclassical time dependent electric field and rather focus on the discussion of the optical properties of the created EPP. We