

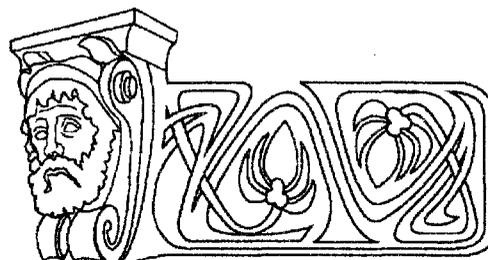


УДК 538.56:517.33

РАЗРУШЕНИЕ КЛАСТЕРНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ И ХАОС В НЕОДНОРОДНОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

В.С. Анищенко, А.А. Акопов, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова

Саратовский государственный университет,
Институт нелинейной динамики
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



В работе показано, что в неоднородной автоколебательной среде разрушение идеальных кластеров частотной синхронизации, вызванное как изменением управляющего параметра, так и воздействием шума, ведет к возникновению хаотического во времени поведения. Исследуются механизмы формирования хаоса в обоих указанных случаях. Показано, что переход к хаосу в детерминированной среде при вариации параметров может происходить в результате жесткой (субкритической) бифуркации удвоения периода и сопровождаться перемежаемостью. Возникновение хаотической динамики при воздействии шума связано с существованием непритягивающих хаотических движений в окрестности регулярного режима.

CLUSTER SYNCHRONIZATION DESTRUCTION AND CHAOS IN AN INHOMOGENEOUS ACTIVE MEDIUM

V.S. Anishchenko, A.A. Akopov, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova

We show that in an inhomogeneous self-sustained oscillatory medium the destruction of perfect clusters of partial synchronization, that is induced both by varying the control parameter and by noise, leads to the onset of chaotic behavior. We study the mechanisms of chaos formation in both cases. It is demonstrated that as parameters change, the transition to chaos in the deterministic medium can result from a hard (subcritical) period-doubling bifurcation and can be accompanied by intermittency. The noise-induced initiation of chaotic dynamics can be related with the existence of non-attracting chaotic motions in the vicinity of a regular regime.

ВВЕДЕНИЕ

Хаотические и турбулентные режимы колебаний в непрерывных активных средах давно привлекают внимание исследователей. Одной из базовых моделей автоколебательной среды является уравнение Гинзбурга–Ландау, которое в широкой области вариации параметров имеет решения в виде хаотических во времени и нерегулярных в пространстве колебаний [1–4]. Многочисленные исследования динамики активных сред до настоящего времени базировались в основном на однородных детерминированных моделях, то есть не предполагалась зависимость параметров среды от пространственных координат, а также не учитывалось наличие шума. Исключения составляют немногие работы, в которых использовались модели неоднородной автоколебательной среды с дискретной пространственной координатой (цепочки и решетки неидентичных автогенера-

торов) [5–8]. Непрерывная модель неоднородной автоколебательной среды рассматривалась в [9]. В этих работах в основном исследовались вопросы, связанные с глобальной и частичной (кластерной) синхронизацией в распределенной системе. Образование частотных кластеров наблюдалось экспериментально в некоторых реальных распределенных автоколебательных системах, например, при исследовании гастрозлектрической активности [10] и в поверхностной реакции Белоусова–Жаботинского, протекающей при наличии температурного градиента [11]. Моделирование неоднородных автоколебательных сред цепочками автогенераторов показывает, что разрушение идеальных частотных кластеров ведет к нерегулярным во времени колебаниям [8]. Линейный анализ возмущения аналогичных колебаний в непрерывной неоднородной среде, впервые проведенный в [12], выявил наличие экспоненциальной неустойчивости, что доказывает факт возникновения динамического хаоса. Однако бифуркационный механизм возникновения хаотических автоколебаний в неоднородной среде при разрушении идеальных кластеров не был установлен. Не были исследованы эффекты, связанные с воздействием на непрерывную неоднородную среду случайных сил. В то же время неоднородность и случайные воздействия неизбежно присутствуют в любой реальной среде. По этой причине важно определить, какое совместное влияние они могут оказать на ее динамику. Например, может ли шум в неоднородной среде приводить к хаотическому поведению, если в отсутствие шума динамика среды является регулярной? В настоящей работе мы показываем, что это возможно. Мы также устанавливаем связь хаотического поведения с разрушением кластеров частотной синхронизации элементов среды и анализируем механизмы возникновения хаоса в детерминированной среде при вариации управляющего параметра и в случае воздействия на среду некоррелированных случайных сил.



1. МОДЕЛЬ СРЕДЫ И МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуемая автоколебательная среда задается уравнением Гинзбурга–Ландау с вещественными параметрами и частотой колебаний, линейно зависящей от пространственной координаты:

$$a_t = iv(x)a + \frac{1}{2}(1 - |a|^2)a + ga_{xx} + \sqrt{2D}\xi(x,t), \quad (1.1)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $a(x,t)$ – комплексная амплитуда колебаний, независимые переменные t и $x \in [0, l]$ есть соответственно время и нормированная пространственная координата, a_t – первая производная по времени, a_{xx} – вторая производная по пространственной координате, $\xi(x,t) = n_1(x,t) + in_2(x,t)$ – нормированная случайная сила, действующая в каждой точке среды. Предполагалось, что мнимая и вещественная составляющие случайной силы n_1 и n_2 представляют собой статистически независимые гауссовские воздействия, некоррелированные как во времени, так и в пространстве:

$$\langle n_{j,k}(x,t) \rangle = 0, \\ \langle n_j(x_1, t_1) n_k(x_2, t_2) \rangle = \delta_{jk} \delta(x_2 - x_1) \delta(t_2 - t_1), \\ j, k = 1, 2, \text{ где } \delta_{jk} \text{ – символ Кронеккера,}$$

$\delta(\dots)$ – функция Дирака, скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают статистическое усреднение. Параметр D характеризует интенсивность случайной силы, которую мы считаем постоянной во времени и в пространстве. Длина среды в численных экспериментах фиксировалась постоянной: $l = 50$. Коэффициент диффузии g полагался одним и тем же во всех точках среды. Колебания в различных точках среды при $g \rightarrow 0$ имеют разные частоты, задаваемые функцией

$$v(x) = x \frac{\Delta}{l}, \text{ где } \Delta \text{ – максимальная расстройка (расстройка граничных точек среды).}$$

Модель среды (1.1) с линейной расстройкой можно рассматривать как предельный случай неоднородной цепочки квазигармонических автогенераторов [8, 13] при переходе к непрерывной пространственной координате. Аналогичная модель среды исследовалась в работе [9]. Граничные условия

задавались в виде $a_x(x,t)|_{x=0,l} \equiv 0$. Начальное состояние среды выбиралось случайным образом вблизи некоторого однородного распределения $a_0 = \text{const}$.

Уравнение (1.1) численно интегрировалось методом конечных разностей с учетом белого аддитивного шума [14] по неявной схеме с использованием прямой и обратной прогонки.

Вычислялись вещественная амплитуда $A(x,t)$ и фаза $\phi(x,t)$ колебаний:

$$A(x,t) = |a(x,t)| = \sqrt{\text{Re}(a)^2 + \text{Im}(a)^2}, \\ \phi(x,t) = \arg a(x,t) = \text{arctg} \frac{\text{Im}(a)}{\text{Re}(a)} \pm \pi k,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Добавление величины $\pm \pi k$ производится исходя из непрерывности изменения фазы во времени. Средняя частота колебаний в точке среды с координатой x рассчитывалась по формуле

$$\Omega(x) = \langle \dot{\phi}_t(x,t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi(x, t_0 + T) - \phi(x, t_0)}{T}. \quad (1.2)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по времени. Для анализа временной динамики в фиксированных точках среды рассчитывались автокорреляционные функции (АКФ) колебаний $A(t)$:

$$\psi_A(\tau) = \langle A(t)A(t+\tau) \rangle - \langle A(t) \rangle^2 \quad (1.3)$$

(усреднение производилось по времени в предположении стационарности и эргодичности), а также спектры мощности флуктуаций $\tilde{A}(t) = A(t) - \langle A(t) \rangle$. Чтобы более наглядно представить характер колебаний $\tilde{A}(t)$, строились проекции фазовой траектории на плоскость переменных $(\tilde{A}, H\tilde{A})$, где $H\tilde{A}(t)$ – сопряженный по Гильберту процесс:

$$H\tilde{A}(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(x,\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (1.4)$$

Кроме того, для различных режимов колебаний среды были рассчитаны значения старшего ляпуновского показателя λ_1 . Для этого совместно с уравнением (1.1) интегри-



ровалось линеаризованное уравнение для малого возмущения $u(x, t)$ комплексной амплитуды $a(x, t)$:

$$u_t = iv(x)u + \frac{1}{2}(1 - 2|a|^2)u - \frac{1}{2}a^2 u^* + gu_{xx}, \quad (1.5)$$

где u^* – комплексно-сопряженная с u величина. Старший ляпуновский показатель вводился как средний по времени показатель экспоненциального роста евклидовой нормы возмущения $\|u(x, t)\|$, которая с учетом дискретизации пространственной координаты сводилась к сумме конечного числа слагаемых:

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\| &= \\ &= \left(\int_0^l ((\operatorname{Re} u(x, t))^2 + (\operatorname{Im} u(x, t))^2) dx \right)^{1/2} \approx \\ &\approx \left(\sum_{k=1}^m (\operatorname{Re} u(x_k, t))^2 + (\operatorname{Im} u(x_k, t))^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где m – число шагов интегрирования h_x на длине системы.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЖИМОВ ИДЕАЛЬНЫХ И НЕИДЕАЛЬНЫХ ЧАСТОТНЫХ КЛАСТЕРОВ

Рассмотрим основные характеристики колебательных режимов среды (1) в чисто детерминированном случае ($D = 0$). В отличие от более общего случая модели Гинзбурга–Ландау с комплексными параметрами, в однородной среде, задаваемой уравнением (1), возникновение хаотических колебаний невозможно. Без частотной расстройки в (1) наблюдается только однородный режим. Введение частотной расстройки вызывает изменение средней частоты колебаний вдоль пространственной координаты x . В некоторой области значений Δ и g наблюдаются режимы частичной синхронизации, сопровождающиеся формированием частотных кластеров.

Меняя значения параметров, можно получить идеальные и неидеальные кластеры. В режиме идеальных кластеров среда делится на M кластеров (областей), в каждом из которых наблюдается строго одинаковая средняя частота колебаний Ω_i , где $i = 1, 2, \dots, M$ – номер кластера. Следует обратить внимание на то, что речь идет именно о средних значениях частоты колебаний. Спектр колебаний в каждой точке пространства будет

содержать один и тот же набор частотных компонент, но спектральные мощности этих компонент будут перераспределяться в зависимости от того, в каком кластере исследуются колебания. В режиме неидеальных кластеров имеет место непрерывная зависимость средней частоты от пространственной координаты. В этом случае понятие кластеров является достаточно условным. Кластерами можно назвать области пространства, для которых средние частоты колебаний близки (пологие участки зависимости $\Omega(x)$). За частоту j -го кластера можно принять значение $\Omega(x)$, соответствующее середине пологого участка. В случае неидеальных кластеров в среде имеются также межкластерные области, соответствующие быстрым изменениям средней частоты в пространстве. Аналогичные кластеры наблюдались ранее в цепочке диссипативно связанных автогенераторов [8]. Однако в этом случае в режиме неидеальных кластеров средняя частота не может меняться непрерывно вдоль цепочки в силу дискретности пространственной координаты.

Исследование колебаний среды (1.1) показало, что характер поведения системы во времени зависит от характера кластерной структуры. В режиме идеальных кластеров колебания являются регулярными (периодическими или квазипериодическими). Разрушение идеальных кластеров приводит к хаотической во времени динамике [12]. На рис. 1 приведены основные характеристики колебаний в фиксированной точке пространства $x = 25$ (середина среднего кластера) для режима идеальных и неидеальных кластеров. Распределение средних частот $\Omega(x)$ вдоль среды выявляют характер кластерной структуры (рис. 1, а, г). Нормированные спектры мощности флуктуаций амплитуды $\tilde{A}(t)$ свидетельствуют о периодическом характере колебаний $A(t)$ в режиме идеальных кластеров (рис. 1, б) и о нерегулярном процессе в режиме неидеальных кластеров (рис. 1, е). Основная частота спектра флуктуаций $\tilde{A}(t)$ равна межкластерной частоте $\Delta\Omega = \Omega_{j+1} - \Omega_j$ которая одинакова для всех соседних кластеров. На плоскости $(\tilde{A}(t), H \tilde{A}(t))$ идеальным кластерам соответствует предельный цикл (рис. 1, в), в то время как в режиме неидеальных кластеров полученные фазовые проекции подобны хаотическому аттрактору седло-фокусного типа (см. рис. 1, е).

Говорить о пространственном порядке или беспорядке в рассматриваемой системе не имеет смысла, так как при выбранных значениях параметров g и Δ на длине системы укладываются всего 2–3 полупериода пространственных колебаний. Соответствен-



но нельзя говорить и о турбулентности, поскольку понятие турбулентности включает нерегулярное поведение среды как во времени, так и в пространстве. Однако с ростом

длины системы l или с уменьшением параметра g в среде с неидеальными кластерами можно обнаружить также и пространственный беспорядок.

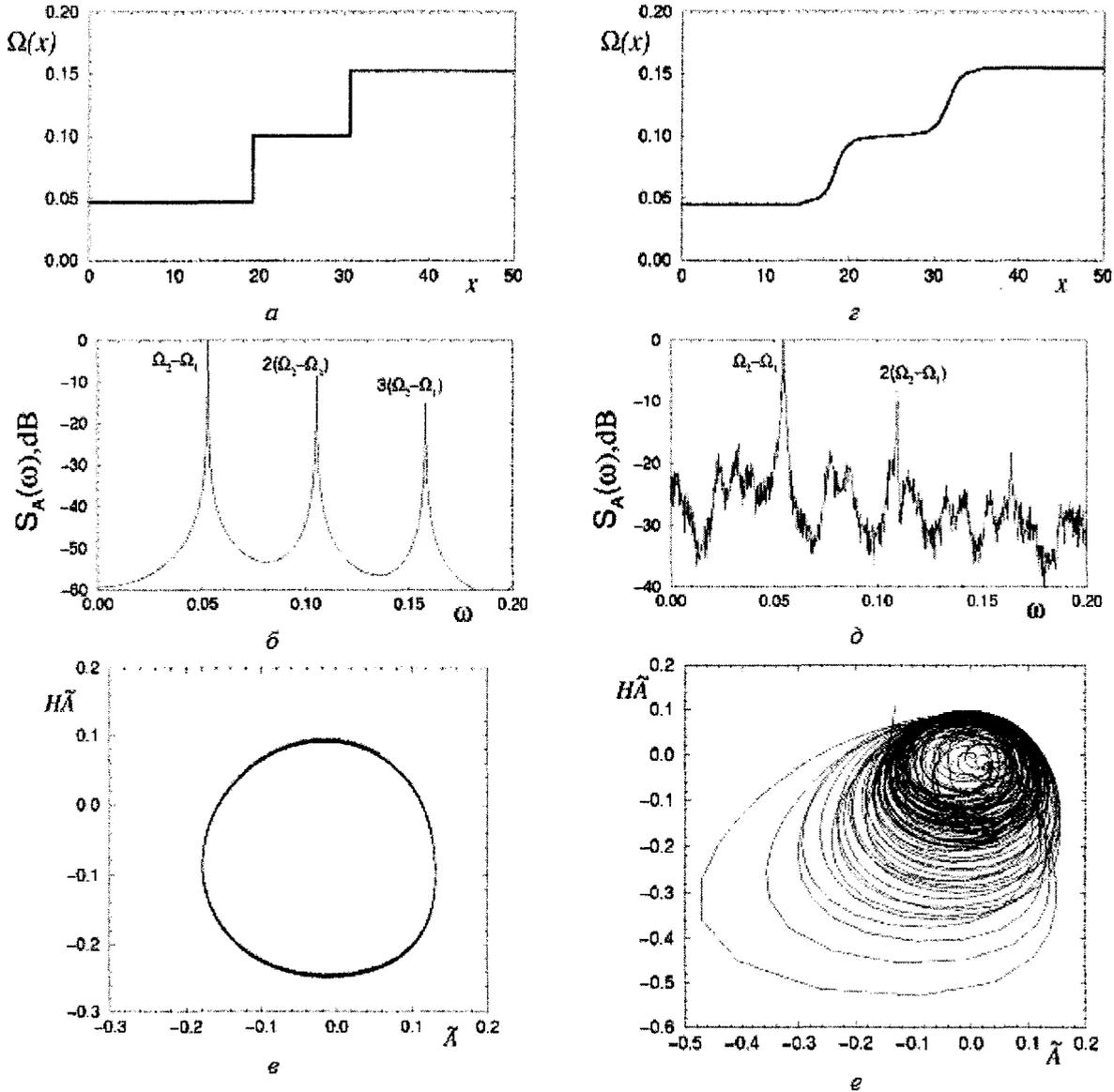


Рис. 1. Характеристики колебаний детерминированной среды ($D = 0$) в режиме идеальных и неидеальных кластеров: $a, б, e$ – соответственно вид частотных кластеров, нормированный спектр мощности колебаний $\tilde{A}(t)$ в точке $x = 25$ и проекция фазовой траектории на плоскость $(\tilde{A}(t), N\tilde{A}(t))$ в точке $x = 25$ в режиме идеальных кластеров при $\Delta = 0.02, g = 1.0$; z, d, e – те же характеристики в режиме неидеальных кластеров при $\Delta = 0.2, g = 0.85$. Вычисления проводились с шагами дискретизации $h_t = 0.01$ и $h_x = 0.001$

На основании спектров мощности проекций фазовых траекторий, а также автокорреляционных функций колебаний в режиме неидеальных кластеров можно сделать вывод о хаотическом характере поведения детерминированной системы во времени. Причем размерность предельного множества невелика. Исследование временных реализаций процесса $A(x, t)$ в фиксированных точках про-

странства методами реконструкции свидетельствует, что размерность пространства вложения во всех рассмотренных случаях нерегулярного поведения имеет порядок 3–5. Линейный анализ на устойчивость показал, что в режиме неидеальных кластеров старший ляпуновский показатель является положительным. Так, при $\Delta = 0.2, g = 0.85$ он имеет значение ≈ 0.002 [12].



3. РАЗРУШЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ И ПЕРЕХОД К ХАОСУ ПРИ ВАРИАЦИИ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА СРЕДЫ

Зафиксируем частотную расстройку $\Delta = 0.2$ и будем менять коэффициент диффузии среды g . Как уже говорилось, колебания среды при $g = 1.0$ являются регулярными (квазипериодическими), а при $g = 0.85$ – хаотическими. На рис. 2 приведена зависимость старшего ляпуновского показателя динамического режима от управляющего параметра g в интервале значений $g \in [0.85, 1.0]$. При $g = g_{кр} \approx 0.93$ показатель λ_1 становится положительным и далее возрастает с уменьшением параметра g .

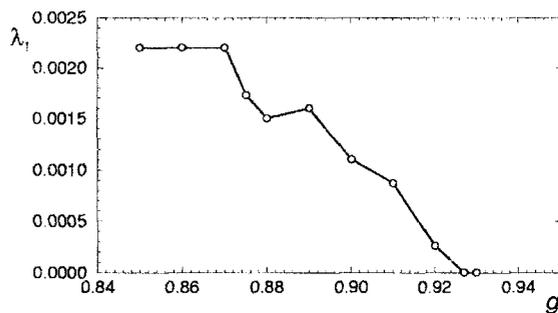
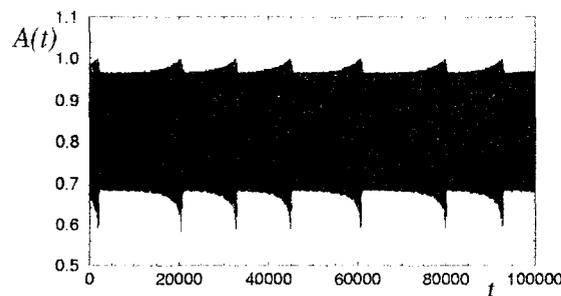


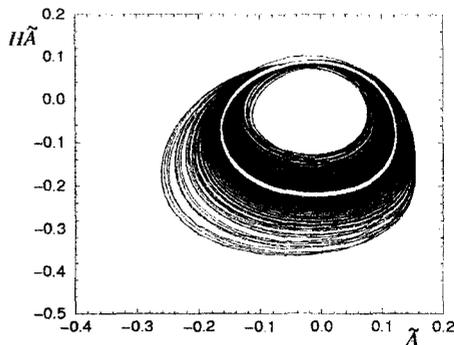
Рис. 2. Зависимость старшего ляпуновского показателя динамического режима среды (1) от управляющего параметра g при $\Delta = 0.02$, $D = 0$

Рассмотрим механизм перехода от регулярной динамики к хаотической при вариации параметра g . На рис. 3 приведены основные характеристики колебаний в точке $x = 25$ для режима неидеальных кластеров вблизи порога возникновения хаоса ($g = 0.92$).

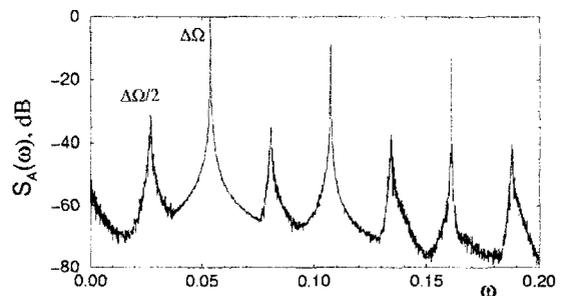
Режим, показанный на рис. 3, соответствует слабому хаосу. Действительно, значение старшего ляпуновского показателя невелико – $\lambda_1 \approx 0.0003$. Из приведенных характеристик можно сделать заключение о жесткой бифуркации предельного множества от регулярного к хаотическому. Однако явление гистерезиса не было обнаружено. Форма колебаний $A(t)$ свидетельствует об эффекте перемежаемости. Ламинарные фазы различной длительности соответствуют росту амплитуды флуктуаций $\dot{A}(t)$, который завершается резким срывом (рис. 3, а). Траектория в проекции $(\dot{A}(t), N\dot{A}(t))$ вращается в окрестности исчезнувшего цикла, время от времени уходя от него и снова возвращаясь (рис. 3, б). В спектре мощности несколько увеличивается пьедестал и появляются четко выраженные спектральные максимумы на субгармонике $0.5\Delta\Omega$ и кратных ей частотах (рис. 3, в). Корреляционная функция спадает медленно в соответствии со слабо развитым хаотическим режимом (рис. 3, г). Появление субгармони-



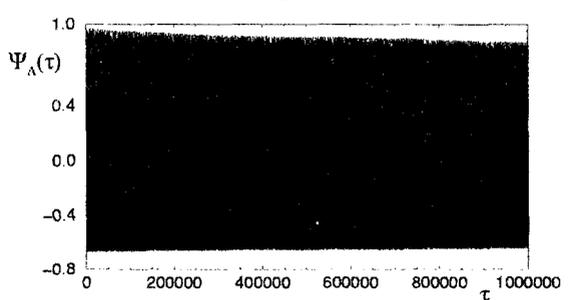
а



б



в

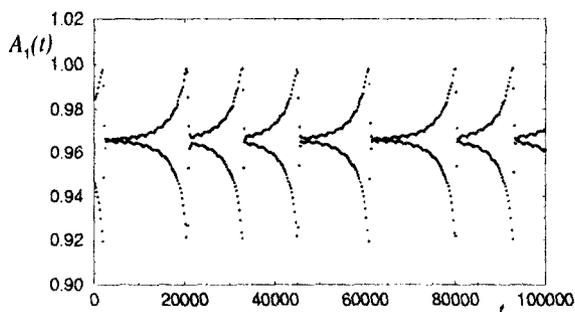


г

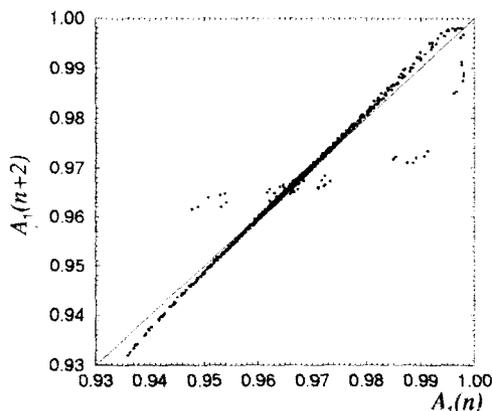
Рис. 3. Характеристики колебаний $A(t)$ детерминированной среды (1) в режиме неидеальных кластеров при $\Delta = 0.2$, $g = 0.92$ в фиксированной точке пространства $x = 25$: а – вид колебаний $A(t)$ во времени; б – проекция траектории на плоскость $(\dot{A}(t), N\dot{A}(t))$ (белая замкнутая кривая соответствует предельному циклу при $g = 0.93$); в – нормированный спектр мощности колебаний $\dot{A}(t)$; г – нормированная автокорреляционная функция колебаний



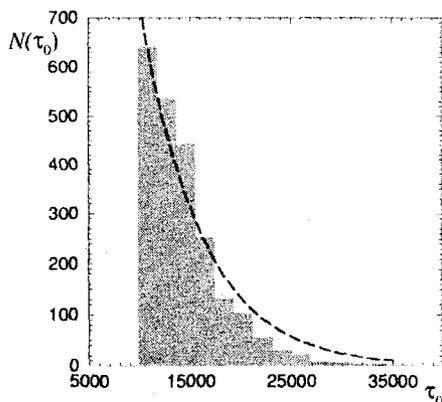
ки основной частоты в спектре флуктуаций $A(t)$ становится понятным, если рассмотреть последовательность амплитуд $A_1(n)$ процесса $A(t)$ (рис. 4, а). Можно видеть, что расхождение значений последовательных амплитуд $A_1(n)$ и $A_1(n + 1)$ нарастает во времени, а затем этот рост резко обрывается, и колебания вновь возвращаются в окрестность периодического состояния.



а



б



в

Рис. 4. Последовательность амплитуд $A_1(n)$, построенная для колебаний $A(t)$ детерминированной среды при $\Delta = 0.2$, $g = 0.92$ в точке $x = 25$ (а), отображение последования $F: A_1(n) \rightarrow A_1(n+2)$ (б) и гистограмма, показывающая число ламинарных фаз N , продолжительность которых превышает τ_0 (в). Пунктиром показана экспоненциальная аппроксимация зависимости $N(\tau_0)$ в соответствии с выражением (7)

Двукратное отображение последования $A_1(n + 2) = F[A_1(n)]$ (рис. 4, б) в окрестности неустойчивой неподвижной точки имеет участок, характерный для отображений, порождающих перемежаемость III рода [15, 16], хотя в целом не все точки ложатся на кривую (нельзя строго свести задачу к одномерному отображению). Перемежаемость III рода исследовалась для модельных одномерных отображений и была связана с субкритической бифуркацией удвоения. Однако подобное поведение встречается и в более сложных системах, в том числе распределенных средах. Например, оно было экспериментально обнаружено в конвекции Релея–Бенара [15, 17]. Полученная численно статистика длительности ламинарных фаз также близка к характерной для перемежаемости III рода закономерности (рис. 4, в). Пусть ε – величина, характеризующая отклонение управляющего параметра от бифуркационного значения, отнесенное к основному периоду колебаний (в исследуемом случае $\varepsilon = (g - g_{кр})/T_1$, где $T_1 = 2\pi/\Delta\Omega$). Известно, что число ламинарных фаз N , продолжительность которых превышает τ_0 при $\tau_0 > \varepsilon^{-1}$, может быть описано соотношением

$$N = C \exp(-2\varepsilon\tau_0),$$

$$C = \text{const.} \tag{3.1}$$

Величина ε в исследуемом режиме приближенно равна 8.5×10^{-5} . Полученная для этого значения в соответствии с (3.1) аппроксимация зависимости $N(\tau_0)$ приведена на рис. 4, в пунктирной линией. Она не вполне точно совпадает с численно построенной гистограммой, однако порядок декремента ε соответствует численному эксперименту, а расхождение, по-видимому, связаны с недостаточным большим числом ламинарных фаз, учтенных при построении гистограммы.

Таким образом, можно предположить, что разрушение идеальных частотных кластеров связано с жесткой бифуркацией предельного множества, подобной субкритической бифуркации удвоения периода цикла в системах конечной размерности. При этом уже существующее в окрестности регулярно аттрактора непритягивающее хаотическое множество становится притягивающим. Такому бифуркационному механизму должна соответствовать жесткая рассинхронизация средних частот элементов среды, принадлежащих одному кластеру. Зависимость разности средних частот в точках $x_1 = 25$ и $x_2 = 20$ от управляющего параметра g , приведенная на рис. 5, подтверждает это предположение.

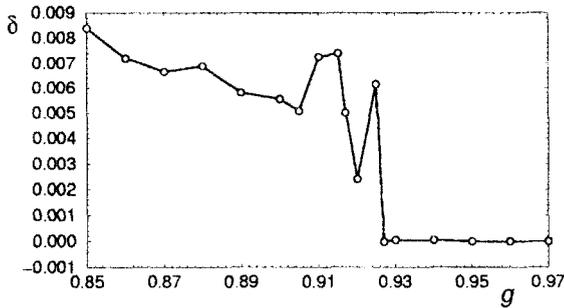


Рис. 5. Разность средних частот в двух точках одного кластера $\Delta = \Omega_{25} - \Omega_{20}$ в зависимости от параметра g при разрушении режима идеальных кластеров. $\Delta = 0.2, D = 0$

4. ИНДУЦИРОВАННЫЙ ШУМОМ ХАОС

Проведенные численные исследования показали, что воздействие шума на неоднородную среду приводит к разрушению идеальных кластеров. В этом отношении среда (1.1), как и во многом другом, ведет себя аналогично неоднородной цепочке автогенераторов [13]. Линейный анализ устойчивости автоколебаний среды (1.1) показал, что разрушение режима идеальных кластеров в результате воздействия шума сопровождается возникновением хаотической во времени динамики. На рис. 6, *a* приведена зависимость старшего ляпуновского показателя λ_1 от интенсивности шума, полученная для значений параметров $\Delta = 0.2, g = 1.0$, соответствующих существованию трех идеальных кластеров при $D = 0$ (см. рис. 1, *a*). Результат, иллюстрирующий влияние шума на идеальную кластерную структуру, приведен на рис. 6, *б*.

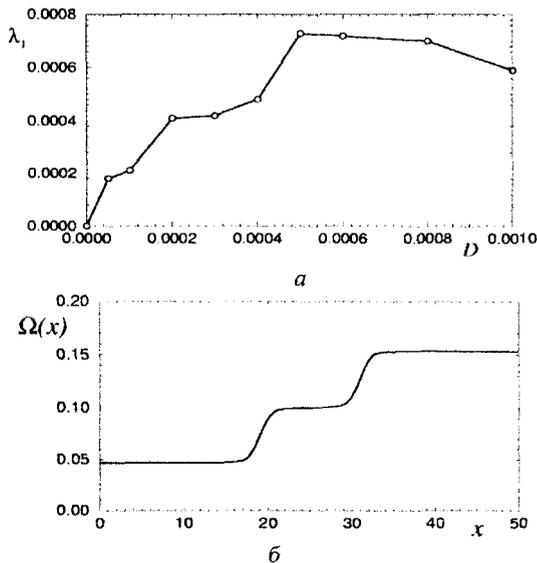


Рис. 6. Влияние шума на динамику неоднородной среды (2.1) в режиме идеальных кластеров при $\Delta = 0.2, g = 1.0$: *a* – зависимость старшего ляпуновского показателя λ_1 от интенсивности шума D ; *б* – возникновение неидеальных частотных кластеров при воздействии шума интенсивности $D = 0.5 \times 10^{-4}$

Исследуем более детально переход среды к хаотическому поведению в результате действия шума. На рис. 7 приведены основные характеристики колебаний в точке $x = 25$ при $\Delta = 0.2, g = 1.0, D = 0.5 \times 10^{-4}$, что соответствует слабому, индуцированному шумом хаосу с ляпуновским показателем $\lambda_1 = 0.00018 \pm 10^{-5}$. Траектория на плоскости

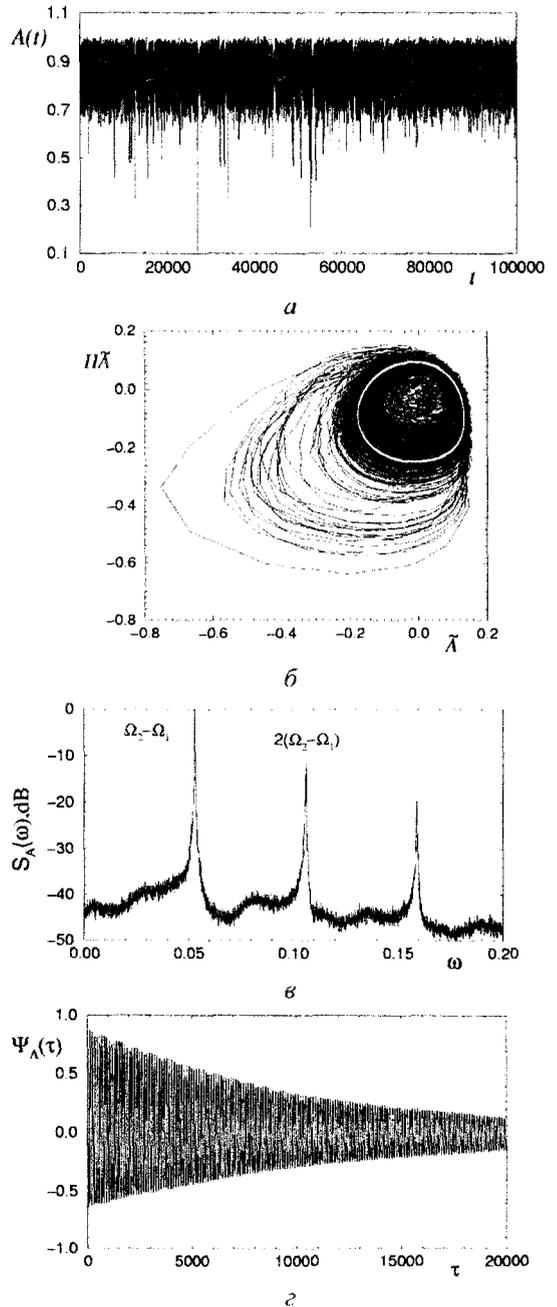


Рис. 7. Характеристики индуцированных шумом хаотических колебаний среды (2.1) при $\Delta = 0.2, g = 1.0, D = 0.5 \times 10^{-4}$ в фиксированной точке пространства $x = 25$: *a* – вид колебаний $A(t)$ во времени; *б* – проекция траектории на плоскость $(A(t), H\dot{A}(t))$ (белая кривая соответствует предельному циклу при $D = 0$); *в* – нормированный спектр мощностей колебаний $\dot{A}(t)$; *г* – нормированная автокорреляционная функция колебаний



$(\tilde{A}(t), H\tilde{A}(t))$ в основном вращается в окрестности предельного цикла, соответствующего случаю $D = 0$, однако может уходить достаточно далеко от этой области (рис. 7, б). Такое поведение говорит о том, что в системе без шума в окрестности регулярного решения существует некоторое гиперболическое непритягивающее подмножество. Слабый шум возмущает состояние системы и заставляет траектории двигаться по этому подмножеству. Аналогичный механизм индуцированного шумом хаоса хорошо известен для многих конечномерных систем (см., например, [18]).

Можно предположить, что особенно сильное влияние шума будет наблюдаться вблизи границы области существования идеальной кластерной структуры. Рассмотрим, например, колебания $A(t)$ в точке $x = 25$ при значении параметра $g = 0.927$, которое соответствует трехступенчатой идеальной кластерной структуре у самой границы ее разрушения. Воздействие слабого шума $D = 10^{-5}$ приводит к неустойчивости с ляпуновским показателем $\lambda_1 = 0.00010 \pm 10^{-5}$. Фазовая траектория на плоскости $(\tilde{A}(t), H\tilde{A}(t))$ под действием шума блуждает по хаотическому множеству в окрестности периодической траектории детерминированной системы (рис. 8, а). В спектре мощности флуктуаций $\tilde{A}(t)$ прояв-

ляется субгармоника основной частоты $0.5\Delta\Omega$ (рис. 8, б), которая наблюдалась также при разрушении идеальных кластеров в детерминированной системе (см. рис. 3, в). Таким образом, шум «активизирует» то же самое хаотическое подмножество, которое становится притягивающим в результате жесткой бифуркации, имеющей место в детерминированном случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований установлен один из возможных механизмов возникновения хаоса в непрерывной неоднородной среде, связанный с разрушением идеальных кластеров. Это – жесткая бифуркация, подобная субкритической бифуркации удвоения периода в системах с конечной размерностью фазового пространства. Она сопровождается явлением перемежаемости III рода. Показано, что шум в неоднородной среде может играть существенную роль. Он приводит к разрушению идеальных кластерных структур, сопровождающемуся возникновением хаотической во времени динамики.

В настоящей работе мы ограничились исследованием только одной кластерной структуры, зафиксировав частотную расстройку Δ и меняя параметр диффузии g лишь в незначительном интервале значений. Возможно ли, что при других значениях параметров разрушение идеальных кластеров и переход к хаосу будут связаны с другими бифуркационными механизмами? Этот вопрос остается пока открытым так же, как и вопрос о том, всегда ли разрушение идеальных кластеров в неоднородной среде в результате действия шума приводит к хаотической динамике. Дальнейшие исследования позволят дать ответ на эти вопросы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России (Программа "Развитие научного потенциала высшей школы").

Авторы выражают благодарность Г.А. Окрокверихову за помощь в проведении ряда численных экспериментов.

Библиографический список

1. Shraiman B.I., Pumir A., Saarloos W. van et al. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg – Landau equation // Physica D. 1992. V. 57. P. 241 – 248.
2. Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside it equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. V. 65. P. 851 – 1112.
3. Chate H. Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg–Landau equation // Nonlinearity. 1994. V. 7. P. 185 – 204.

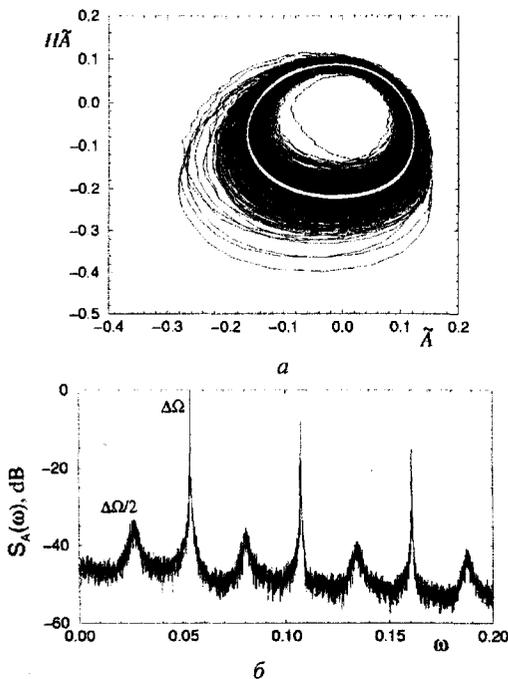


Рис. 8. Характеристики индуцированных шумом хаотических колебаний среды (1) при $\Delta = 0.02$, $g = 0.927$, $D = 10^{-5}$ в фиксированной точке пространства $x = 25$: а – проекция траектории на плоскость $(\tilde{A}(t), H\tilde{A}(t))$ (белая кривая соответствует предельному циклу при $D = 0$); б – нормированный спектр мощности колебаний $\tilde{A}(t)$



4. Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg – Landau equation // *Rev. Mod. Phys.* 2002. V. 74. P. 99 – 143.
5. Sakaguchi H., Shinomoto S., Kuramoto Y. Local and global self-entrainments in oscillator lattices // *Progr. Theor. Phys.* 1978. V. 77. P. 1005.
6. Strogatz S.H., Mirollo R.E. Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies // *Physica D.* 1988. V. 31. P. 143 – 168.
7. Ermentrout G.B., Kopell N. Frequency plateaus in a chain of weakly coupled nonlinear oscillators // *Physica D.* 1990. V. 41. P. 219 – 231.
8. Osipov G.V., Sushchik M.M. Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58, № 6. P. 7198.
9. Ermentrout G.B., Troy W.C. Phase locking in a reaction-diffusion system with a linear frequency gradient // *SIAM J. Math. Anal.* 1986. V. 46, № 3. P. 359.
10. Diamant N.E., Bortoff A. Nature of the intestinal slow-wave frequency // *Amer. J. Physiol.* 1969. V. 216, № 2. P. 301 – 307.
11. Winfree A.T. *The geometry of biological time.* N. Y.: Springer, 1980.
12. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Okrokvertskhov G.A. et al. Chaotic dynamics of a spatio-inhomogeneous medium // *Intern. J. of Bifurcation and Chaos.* 2005. V. 15, №11. P. 3661 – 3673.
13. Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Anishchenko V.S. Phase-frequency synchronization in a chain of periodic oscillators in the presence of noise and harmonic forcings // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. P. 036225.
14. Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M. *Noise in Spatially Extended Systems.* N. Y.: Springer, 1999.
15. Berge P., Pomeau Y., Vidal Ch. *Order within chaos.* N. Y.: Wiley, 1984.
16. Schuster H.G. *Deterministic Chaos.* Wienheim: Physik-Verlag, 1984.
17. Dubois M., Rubio M.A., Berge P. Experimental Evidence of Intermittencies Associated with a Subharmonic Bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51. P. 1446 – 1449.
18. Anishchenko V.S., Herzog H. Noise induced chaos in a system with homoclinic points // *ZAMM.* 1988. V. 68, № 7. P. 317.

УДК 548.0: 532.783

УНАРНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЖЕСТКИХ СФЕР У ИДЕАЛЬНОЙ СТЕНКИ

В.П. Вешнев

Саратовский государственный университет,
Институт нелинейной динамики
E-mail: vechnevVP@info.sgu.ru

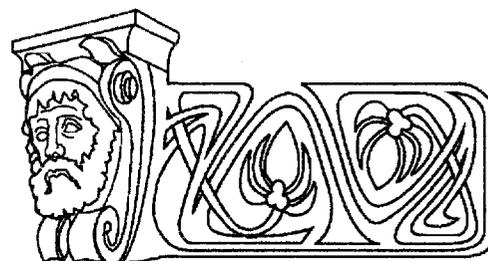
Методами равновесной статистической физики в рамках ансамбля Гиббса получено интегральное уравнение для одночастичной функции распределения жестких сфер в конфигурационном пространстве системы в присутствии идеальной стенки. Проведён анализ решения. Численные результаты даны в виде графиков зависимости локальной относительной плотности частиц от расстояния до стенки.

UNARY FUNCTION OF HARD SPHERE DISTRIBUTION NEAR IDEAL WALL

V.P. Veshnev

Hard sphere system upon ideal wall was analyzed using equilibrium statistic physics methods. The integration equation for oneparticle distribution function of coordinate region is received. Resolve of obtaining equation we analyzed. Numerical results illustrating particles local relative density depending of distance to the wall are showed.

Рассмотрим вековую статистическую систему, состоящую из одинаковых шаров с жестким взаимодействием. Пусть состояние этой системы описывается распределением



Гиббса. В дальнейшем нас будет интересовать лишь его конфигурационная часть.

Поместим систему во внешнее поле и обозначим через $\psi(i)$ потенциальную энергию частицы с координатами $i=(x_i, y_i, z_i)$. Распределение Гиббса системы теперь будет зависеть от функции ψ . В частности, статистический интеграл системы будет функционалом Ψ и, следовательно, станут функционалами внешнего поля как все частичные функции распределения системы, так и её термодинамические характеристики. Учитывая этот факт, будем одночастичную функцию распределения системы, то есть её локальную плотность, записывать в виде $n(i; \psi)$.

Рассмотрим функционал поля $n(1; \psi) \exp\{\beta\psi(1)\}$, где β – обратная абсолютная температура системы, измеряемая в единицах энергии. Разложим его в функциональный ряд Тейлора в окрестности $\psi=0$ по функционалу $n(2; \psi)$, ограничиваясь линейным членом разложения: