



# РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 537.86+530.182

## Химерные структуры в ансамблях нелокально связанных отображений Спротта

А. М. Пузанов, В. С. Анищенко, Г. И. Стрелкова

Пузанов Алексей Михайлович, студент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, alex.n.97@mail.ru

Анищенко Вадим Семенович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, wadim@info.sgu.ru

Стрелкова Галина Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, strelkovagi@info.sgu.ru

В работе представлены результаты численного анализа особенностей пространственно-временной динамики ансамблей нелокально связанных хаотических систем с дискретным временем с периодическими граничными условиями. Индивидуальные элементы исследуемых колец описываются двумерным и трехмерным отображениями Спротта, которые демонстрируют сценарии перехода к хаосу через квазипериодические движения. Локальная динамика индивидуальных элементов устанавливалась соответствующей режиму гиперхаоса. Показано, что при определенном выборе значений параметров нелокальной связи переход «когерентность—некогерентность» в исследуемых ансамблях сопровождается возникновением амплитудных и фазовых химерных структур. Результаты численных исследований динамики ансамбля иллюстрируются мгновенными и пространственно-временными профилями распределения амплитуд колебаний осцилляторов ансамбля.

**Ключевые слова:** ансамбль связанных осцилляторов, нелокальная связь, фазовые и амплитудные химеры, отображения Спротта.

Поступила в редакцию: 27.05.2019 / Принята: 21.08.2019 / Опубликовано: 02.12.2019

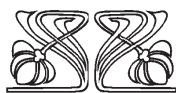
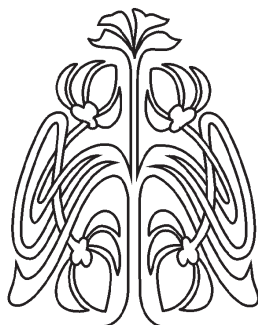
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-246-257>

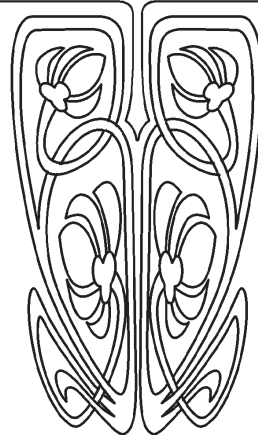
### Введение

Исследования динамики сложных взаимодействующих нелинейных систем занимают одно из центральных мест в области нелинейной динамики и связанных с ней наук. Данный интерес обусловлен разнообразием пространственно-временных структур, которые формируются в результате взаимодействия между осцилляторами ансамблей.

В последнее десятилетие особое внимание исследователей привлек особый тип пространственно-временных структур, которые были впервые обнаружены в ансамбле нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов [1] и впоследствии названы химерными состояниями [2]. В химерном состоянии элементы



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





ансамбля разделяются на области (кластеры) с когерентной (синхронной) и некогерентной (асинхронной) динамикой [2–5]. Эти области имеют четко определенные границы в пространстве ансамбля. Химерные состояния возникают при переходе от полной хаотической синхронизации (полной когерентности) к режиму пространственно-временного хаоса (полной некогерентности) при уменьшении силы нелокальной связи между элементами ансамбля [1–9]. При исследовании перехода «когерентность–некогерентность» в ансамблях нелокально связанных осцилляторов с дискретным (логистическое отображение [5, 7, 10], отображение Эно [11, 12]) и непрерывным (осцилляторы Ресслера [7], Анищенко–Астахова [13]) временем были обнаружены фазовые и амплитудные химеры [10, 13]. Химерные структуры наблюдались в ансамблях нелокально связанных осцилляторов ван дер Поля [14], цепей Чуа и систем с бистабильной динамикой [15], моделей нейронов [16–19], а также в ансамблях с различной топологией связи между элементами [20–23].

Для иллюстрации общности полученных результатов представляется целесообразным и интересным исследовать динамику ансамблей, состоящих из других индивидуальных элементов, с целью обнаружения химерных структур различного типа.

В данной работе рассматриваются ансамбли нелокально связанных двумерных (2D) [24] и трехмерных (3D) отображений Спротта [25]. В отличие от указанных выше дискретных и дифференциальных систем, в которых переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения периода, 2D и 3D отображения Спротта демонстрируют механизм перехода к хаосу через квазипериодические режимы. Проведенные численные исследования показали, что в исследуемых ансамблях при определенных значениях параметров нелокальной связи могут реализовываться амплитудные и фазовые химерные структуры.

### Двумерное отображение Спротта

Динамика двумерного отображения Спротта описывается следующей системой уравнений с дискретным временем [24, 26]:

$$\begin{aligned}x^{t+1} &= 1 - a(y^t)^2 + bx^t, \\ y^{t+1} &= x^t,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  – переменные отображения,  $t$  – дискретное время,  $a$  и  $b$  – бифуркационные или

управляющие параметры. Отображение Спротта (1) представляет собой модификацию известного отображения Эно [27] и, в отличие от последнего, демонстрирует бифуркацию Неймарка–Сакера [24, 26]. Дж. Спротт назвал отображение (1) «минимальным» [24], так как оно по своему виду является простейшим двумерным квадратичным отображением, в котором реализуется бифуркация Неймарка–Сакера и наблюдается квазипериодический сценарий перехода к хаосу. В результате бифуркации Неймарка–Сакера из ставшей неустойчивой неподвижной точки или цикла периода 1 рождаются квазипериодические режимы, которым отвечают аттракторы в форме инвариантных кривых. Отметим, что инвариантная кривая соответствует сечению Пуанкаре двумерного тора в фазовом пространстве трехмерной дифференциальной системы [28]. С увеличением значений параметров системы (1) инвариантные кривые теряют свою гладкость и затем разрушаются с последующим возникновением хаотического аттрактора.

На линию бифуркации Неймарка–Сакера на плоскости параметров  $(a, b)$  отображения (1) опираются своим основанием области резонансов (клювы или языки Арнольда), в которых реализуются циклы определенных периодов. Для характеристики данных режимов обычно используют понятие числа вращения [26]. Например, для области цикла периода 4 число вращения равно  $\frac{1}{4}$ . В этом случае говорят о резонансе  $1 : 4$ . Внутри областей резонансов наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода на базе основного цикла, которая завершается переходом к хаосу. В 2D отображении Спротта (1) имеют место резонансы циклов различных периодов [26]. Однако самые широкие области соответствуют циклам периода 4 и 5.

На рис. 1 приведены фазопараметрическая диаграмма, построенная для переменной  $x$  в зависимости от параметра  $a$  при фиксированном значении параметра  $b = 0.1$ , и ряд фазовых портретов, иллюстрирующих различные режимы динамики в отображении (1).

Как видно из рис. 1,  $a$ , в результате бифуркации Неймарка–Сакера при  $a \approx 0.75$  и  $b = 0.1$  в отображении (1) возникает квазипериодический режим, соответствующий аттрактору в форме устойчивой инвариантной замкнутой кривой (рис. 1, б). При изменении параметра  $a$  в интервале  $[0.75, 0.9]$  инвариантная кривая искажается, теряет гладкость (рис. 1, в) и затем рождается хаотический аттрактор (тор-хаос). При  $a > 0.9$  мы

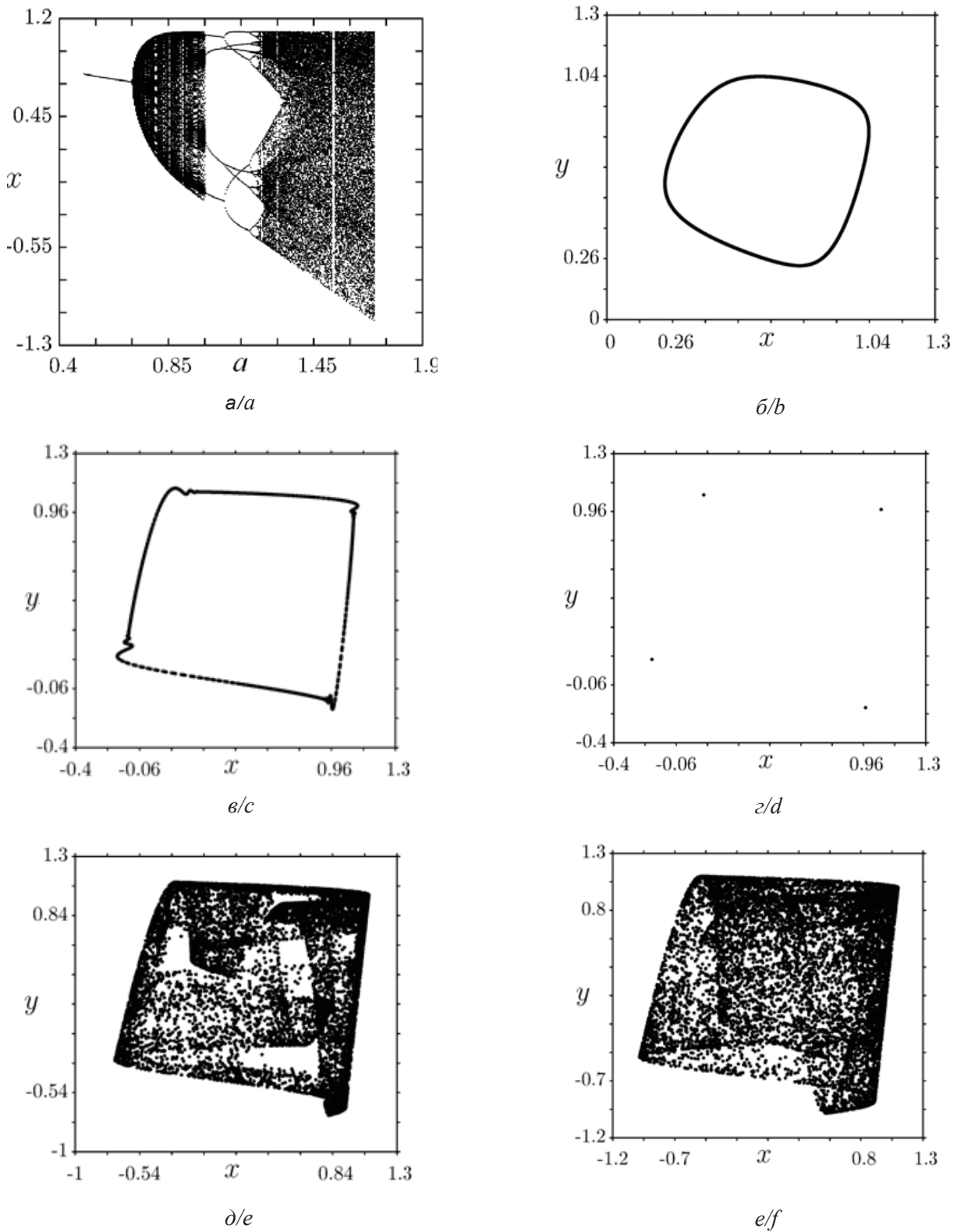


Рис. 1. Фазопараметрическая диаграмма  $x(a)$  при  $b = 0.1$  (а) и фазовые портреты аттракторов в отображении (1):  $\delta - a = 0.77, b = 0.1$ ;  $\epsilon - a = 0.95, b = 0.1$ ;  $\zeta - a = 1.075, b = 0.1$ ;  $\delta - a = 1.395, b = 0.1$ ;  $\epsilon - a = 1.6, b = 0.1$

Fig. 1. Phase-parametric diagram  $x(a)$  for  $b = 0.1$  (a) and phase portraits of attractors in the map (1): (b)  $a = 0.77, b = 0.1$ ; (c)  $a = 0.95, b = 0.1$ ; (d)  $a = 1.075, b = 0.1$ ; (e)  $a = 1.395, b = 0.1$ ; (f)  $a = 1.6, b = 0.1$



попадаем в область резонанса 1 : 4, отвечающего периодическому движению в виде цикла периода 4 (рис. 1, *з*). Затем данный цикл претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода, в результате которых формируется хаотический аттрактор (рис. 1, *д*).

Особенностью 2D отображения Спротта (1) является наличие режима гиперхаоса, который характеризуется двумя положительными показателями Ляпунова [26]. На фазопараметрической диаграмме рис. 1, *а*, данный режим наблюдается при значениях параметра  $a > 1.45$ , а на плоскости параметров ( $a, b$ ) занимает значительную область, превышающую по размеру область хаоса [26]. Пример гиперхаотического аттрактора в отображении (1) показан на рис. 1, *е*.

### Трехмерное отображение Спротта

В ряде работ [25, 29–31] были предложены модели трехмерных квадратичных диффеоморфизмов, полученных в рамках обобщений двумерного отображения Эно. Подобные обобщенные отображения представляют интерес с точки зрения возможностей реализации гиперхаотических аттракторов и так называемых «диких» гиперболических аттракторов [32], которые оказываются очень схожими с аттракторами Лоренца и Шимицу–Мориока [33, 34]. Дж. Спроттом была проведена классификация и представлено описание всех возможных форм 3D квадратичных отображений [25].

В нашей работе также рассматривается модель 3D отображения Спротта, которая задается системой трех дискретных уравнений с двумя управляющими параметрами:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= 1 + ax^t + by^t - (z^t)^2, \\ y^{t+1} &= x^t, \\ z^{t+1} &= y^t. \end{aligned} \quad (2)$$

Как и в случае 2D отображения Спротта (1), в данном отображении имеет место бифуркация Неймарка–Сакера цикла периода 1 с возникновением квазипериодических режимов, которым отвечают аттракторы в форме инвариантных замкнутых кривых, и наличие областей резонансов циклов различных периодов. Но в отличие от двумерного случая, развитие хаоса в 3D отображении Спротта (2) происходит либо по квазипериодическому сценарию, либо в результате жесткого перехода (border-collision bifurcation), как в случае двумерного отображения Лози [35].

Для иллюстрации динамики отображения (2) в качестве примера на рис. 2, *а* приведена фазо-

параметрическая диаграмма для переменной  $x$  в зависимости от параметра  $b$  для фиксированного значения  $a = -0.1$ . Реализуемые при этом режимы динамики проиллюстрированы на рис. 2, *б–е* соответствующими фазовыми портретами.

Как следует из рис. 2, *а*, в интервале значений параметра  $b \in [-0.5, -0.14]$  в отображении (2) реализуется режим динамического хаоса, которому соответствует хаотический аттрактор (рис. 2, *б*), возникший в результате разрушения инвариантной кривой. Резонанс 1 : 2, отвечающий периодическому движению с периодом 2 (рис. 2, *в*), наблюдается в области по параметру  $b \in [-0.14, 0.09]$ . Далее в окрестности точек цикла периода 2 в результате бифуркации Неймарка–Сакера рождаются две гладкие инвариантные кривые (рис. 2, *з*), которые при увеличении параметра  $b$  теряют свою гладкость с последующим образованием хаотического аттрактора (рис. 2, *д*). В 3D отображении Спротта (2) также возможна реализация резонансов различных периодов цикла (например, резонанс 1:4 на рис. 2, *а* в интервале  $b \in [0.16, 0.2]$ ), но самая широкая область резонанса соответствует описанному циклу периода 2. При увеличении параметра  $b$  от 0.2 до 0.255 в отображении наблюдается хаотический, а затем гиперхаотический режим, проиллюстрированный на рис. 2, *е*.

### Исследуемые модели ансамблей

Перейдем к анализу динамики ансамблей нелокально связанных 2D и 3D отображений Спротта. В случае, когда локальная динамика элементов определяется двумерным отображением Спротта (1), ансамбль описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= x_i^t, \end{aligned} \quad (3)$$

где функции  $f(x, y)$  соответствуют правой части 1-го уравнения отображения (1). При выборе в качестве индивидуального элемента трехмерного отображения Спротта (3) уравнения исследуемого ансамбля имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t, z_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t, z_j^t) - f(x_i^t, y_i^t, z_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= x_i^t, \\ z_i^{t+1} &= y_i^t. \end{aligned} \quad (4)$$

В этом случае функции  $f(x, y, z)$  задаются правой частью 1-го уравнения отображения (2).

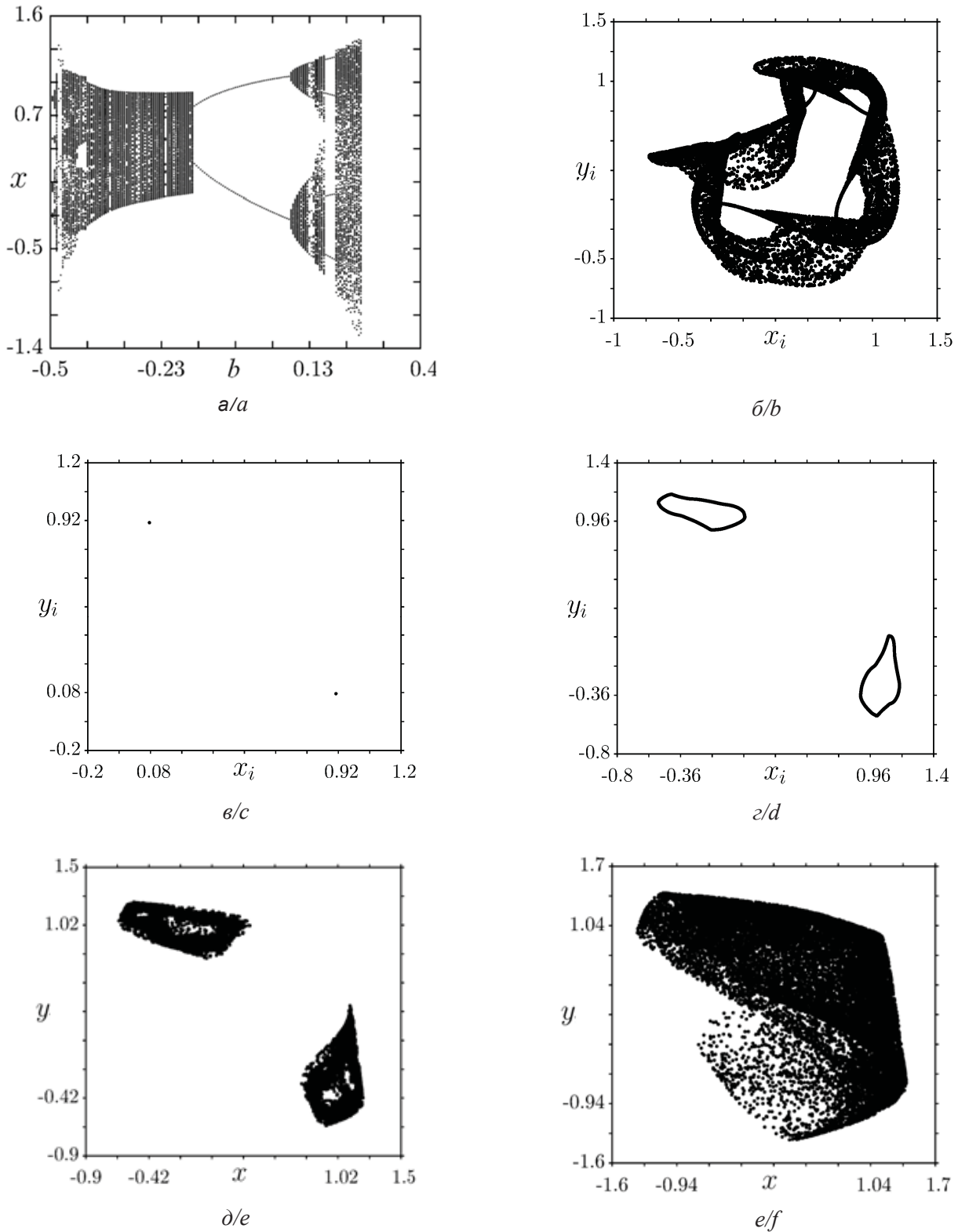


Рис. 2. Фазопараметрическая диаграмма для переменной  $x$  в зависимости от параметра  $b$  при  $a = -0.1$  (а) и фазовые портреты аттракторов в отображении (2): б -  $a = -0.1, b = -0.47$ ; в -  $a = -0.1, b = 0.04$ ; г -  $a = -0.1, b = 0.12$ ; д -  $a = -0.1, b = 0.145$ ; е -  $a = -0.1, b = 0.255$

Fig. 2. Phase-parametric diagram for the  $x$  variable versus parameter  $b$  at  $a = -0.1$  (a) and phase portraits of attractors in the map (2) : (b)  $a = -0.1, b = -0.47$ ; (c)  $a = -0.1, b = 0.04$ ; (d)  $a = -0.1, b = 0.12$ ; (e)  $a = -0.1, b = 0.145$ ; (f)  $a = -0.1, b = 0.255$



Для обеих ансамблей нелокальная связь вводится через переменные  $x$  и определяется силой или коэффициентом связи  $\sigma$  и радиусом связи  $P$ , задающим число соседей справа и слева от  $i$ -го элемента ансамбля. Общее число элементов в системах (3) и (4)  $i = 1, 2, \dots, N = 1000$ . Оба ансамбля имеют топологию кольца, которая задается с помощью периодических граничных условий:  $x_0 = x_N, y_0 = y_N, z_0 = z_N, x_{N+1} = x_1, y_{N+1} = y_1, z_{N+1} = z_1$ . Начальные условия для всех элементов (3) и (4) выбираются случайно распределенными в интервале  $[0.1, 0.9]$ . Время установления пространственно-временных режимов и время наблюдения устанавливаются равными  $10^4$  итераций. Для иллюстрации реализуемых в ансамблях (3) и (4) пространственно-временных структур используются мгновенные профили, представляющие собой пространственные распределения значений координаты  $x_i$  в некоторый фиксированный момент времени, и пространственно-временные профили, состоящие из 20 последних мгновенных профилей состояний  $x_i$  исследуемого ансамбля. Все численные исследования в работе проводились с использованием программного комплекса «Компьютерная программа для моделирования сетей динамических элементов, описывающихся одномерными или двумерными

матрицами связи», разработанного сотрудниками кафедры радиофизики и нелинейной динамики и запатентованного в Роспатенте РФ [36].

### Особенности динамики ансамбля нелокально связанных 2D отображений Спротта

Численный анализ перехода «когерентность–некогерентность» в кольце (3) проводится при выбранных значениях управляющих параметров индивидуальных осцилляторов  $a = 1.6, b = 0.1$ , которые соответствуют гиперхаотическому режиму в 2D отображении Спротта (1) (см. рис. 1, *e*). Зафиксируем радиус связи  $P = 320$  и будем уменьшать значение силы связи  $\sigma$  от 1 до 0.

В интервале  $\sigma \in [0.3, 1]$  в ансамбле (3) наблюдаются режимы полной и частичной хаотической синхронизации. В первом случае все осцилляторы совершают во времени хаотические колебания, но в фиксированный момент времени их значения полностью совпадают. В режиме частичной синхронизации все осцилляторы также колеблются хаотически, но мгновенный профиль является когерентным, имеет колоколообразную форму и описывается гладкой функцией. При уменьшении силы связи  $\sigma < 0.3$  в ансамбле реализуются химерные структуры амплитудного типа [6, 10]. На рис. 3 приведены мгновенные профили для

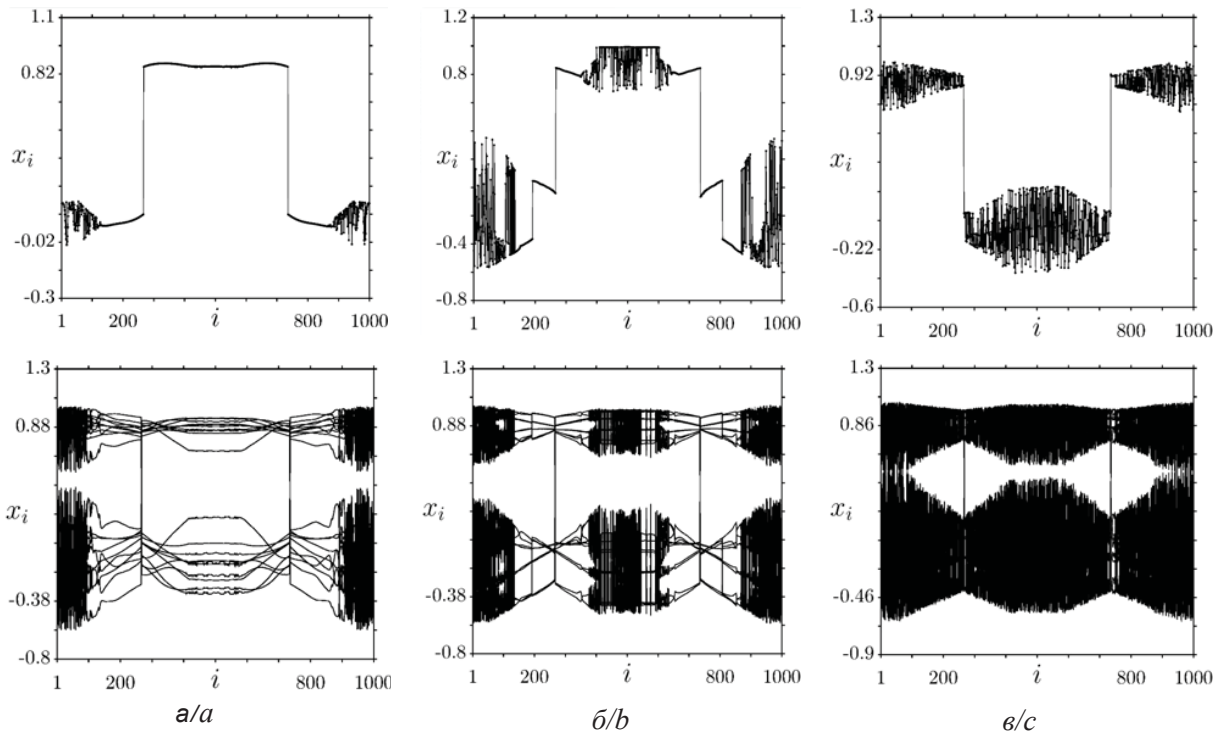


Рис. 3. Мгновенные профили (верхний ряд) и пространственно-временные профили (нижний ряд) состояний ансамбля (3) для различных значений силы связи  $\sigma$ :  $a - 0.25$ ;  $b - 0.2$ ;  $c - 0.15$ . Параметры системы (3):  $P = 320, a = 1.6, b = 0.1$   
 Fig. 3. Instantaneous profiles (snapshots) (upper row) and space-time profiles (low row) for the ensemble (3) dynamics at different values of the coupling strength  $\sigma$ :  $a - 0.25$ ;  $b - 0.2$ ;  $c - 0.15$ . Parameters of the system (3):  $P = 320, a = 1.6, b = 0.1$



координаты  $x_i$  (верхний ряд) и соответствующие пространственно-временные профили (нижний ряд) системы (3) при уменьшении силы связи  $\sigma$ .

Как видно из рис. 3, а, при  $\sigma = 0.25$  в ансамбле (3) возникают два некогерентных кластера амплитудных химер, состоящие из элементов  $1 < i < 120$  и  $880 < i < 1000$ . Соответствующий пространственно-временной профиль четко отражает сильно развитую хаотическую динамику, которую демонстрируют во времени указанные осцилляторы. Данное свойство является типичным для элементов амплитудных химерных структур [10,13]. Остальные осцилляторы ансамбля (3) находятся в когерентном режиме, отвечающем полной хаотической синхронизации. При дальнейшем уменьшении значения силы нелокальной связи  $\sigma$  в ансамбле формируется еще один кластер амплитудной химеры с элементами  $450 < i < 650$  (рис. 3, б), которые характеризуются развитой хаотической динамикой во времени. Переход к пространственно-временному хаосу или режиму полной некогерентности в ансамбле (3) происходит при  $\sigma \leq 0.15$  (рис. 3, в). Когерентных областей в пространстве ансамбля больше не наблюдается (рис. 3, в, верхний фрагмент), а временная динамика всех осцилляторов отвечает режиму хаотических колебаний (рис. 3, в, нижний фрагмент).

Проведенные численные расчеты динамики кольца (3) при значениях параметров  $a = 1.7$ ,  $b = 0.1$  и  $P = 160$  показали, что и в этом случае переход «когерентность–некогерентность» сопровождается возникновением амплитудных химер, которые наблюдаются в диапазоне  $0.15 \leq \sigma \leq 0.3$ .

### **Химерные структуры в ансамбле нелокально связанных 3D отображений Спротта**

Рассмотрим динамику кольца нелокально связанных 3D отображений Спротта (4). Как и в случае ансамбля (3), локальная динамика индивидуальных элементов системы (4) соответствует режиму гиперхаоса при  $a = -0.1$ ,  $b = 0.255$ , приведенному на рис. 2, е. Численные расчеты, проведенные для значения радиуса связи  $P = 320$  и при вариации силы связи в интервале  $\sigma \in [0.05, 0.9]$ , показали только наличие режима полной хаотической синхронизации. Более интересные результаты были получены для случая  $P = 160$ . При уменьшении значения силы связи в диапазоне  $0.35 < \sigma < 0.9$  в ансамбле (4) реализуется режим частичной хаотической синхронизации, которому сначала соответствует гладкий пространственный профиль с одним

максимумом, а при  $\sigma = 0.35$  – когерентный пространственный профиль, имеющий 2 максимума. При  $\sigma < 0.35$  профиль начинает терять гладкость, а форма когерентных участков профиля является предвестником возникновения некогерентных кластеров амплитудных химер. На рис. 4 приведены мгновенные и пространственно-временные профили значений координат  $x_i$  при уменьшении силы связи  $\sigma$ .

Режим амплитудных химер возникает в ансамбле (4) при  $\sigma = 0.16$  (рис. 4, а) в виде двух кластеров некогерентности, которые включают элементы  $360 < i < 480$  и  $860 < i < 960$ . При  $\sigma = 0.15$  в ансамбле формируются еще два кластера некогерентности:  $120 < i < 200$  и  $620 < i < 730$  (рис. 4, б). Однако, как видно из пространственно-временного профиля (рис. 4, б, нижний фрагмент), ранее появившиеся кластеры характеризуются более высокой степенью хаотичности временной динамики принадлежащих им элементов. С уменьшением значения силы связи  $\sigma$  хаотизация колебаний элементов всех амплитудных химер увеличивается и их поведение во времени становится одинаковым (рис. 4, в). При  $\sigma < 0.105$  в ансамбле (4) происходит переход в режим пространственно-временного хаоса.

Изменим теперь значения управляющих параметров индивидуальных элементов ансамбля (4):  $a = 0.2$ ,  $b = 0.355$ . В этом случае также реализуется режим гиперхаоса в изолированном 3D отображении Спротта (2). Выберем значение радиуса связи  $P = 320$  и проследим за эволюцией режимов пространственно-временной динамики ансамбля при уменьшении силы связи  $\sigma$ . Как показали численные расчеты, в интервале  $\sigma \in [0.205, 0.22]$  в ансамбле нелокально связанных 3D отображений Спротта реализуется режим фазовых и амплитудных химерных состояний. Примеры наблюдаемых структур приведены на рис. 5.

Во всех случаях, представленных на рис. 5, в пространстве ансамбля (4) сосуществуют фазовые ( $330 < i < 360$  и  $930 < i < 960$ ) и амплитудная ( $510 < i < 790$ ) химеры. В отличие от элементов амплитудной химеры, осцилляторы, принадлежащие кластерам некогерентности фазовых химер, характеризуются практически периодическими колебаниями (см. рис. 5, нижний ряд), которые случайным образом сдвинуты по фазе относительно друг друга [10, 13].

При значении силы связи  $\sigma < 0.205$  наблюдается переход к пространственно-временному хаосу во всех элементах ансамбля (4).

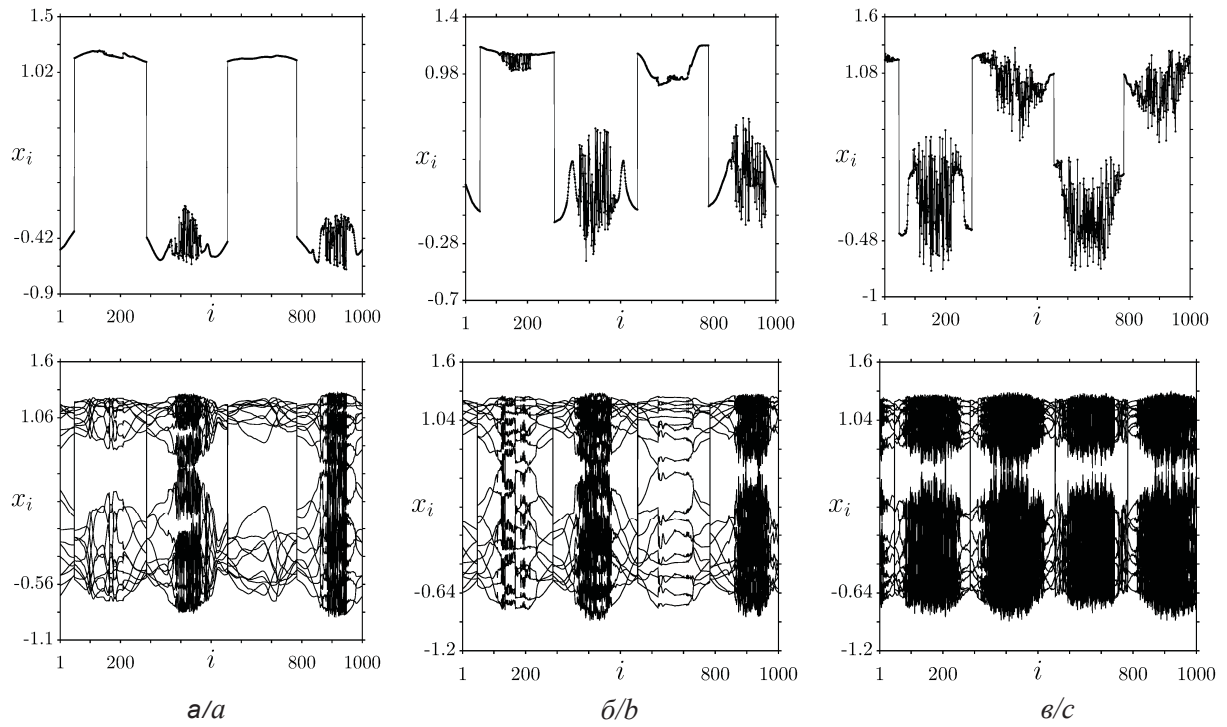


Рис. 4. Мгновенные профили (верхний ряд) и пространственно-временные профили (нижний ряд) состояний ансамбля (4) для различных значений силы связи  $\sigma$ :  $a - 0.16$ ;  $b - 0.15$ ;  $c - 0.115$ . Параметры системы (4):  $P = 160$ ,  $a = -0.1$ ,  $b = 0.255$   
 Fig. 4. Instantaneous profiles (snapshots) (upper row) and space-time profiles (low row) for the ensemble (4) dynamics at different values of the coupling strength  $\sigma$ :  $a - 0.16$ ;  $b - 0.15$ ;  $c - 0.115$ . Parameters of the system (4):  $P = 160$ ,  $a = -0.1$ ,  $b = 0.255$

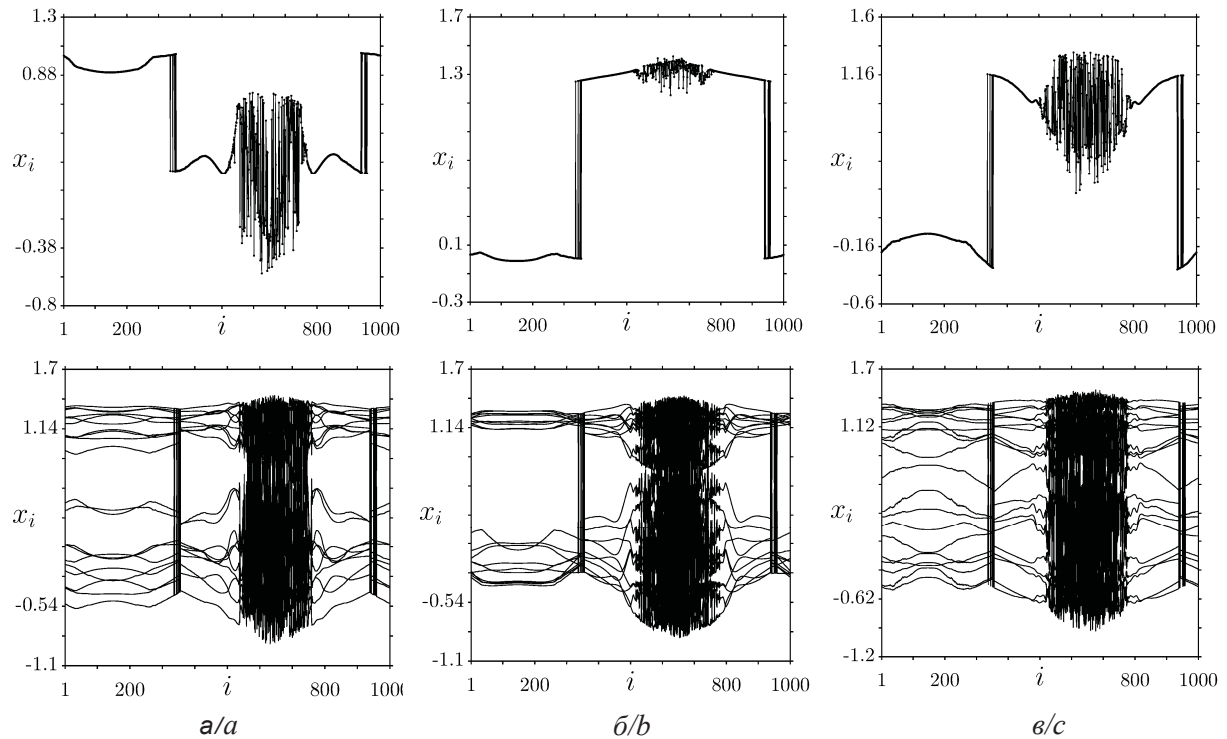


Рис. 5. Мгновенные профили (верхний ряд) и пространственно-временные профили (нижний ряд) состояний ансамбля (4) при уменьшении силы связи  $\sigma$ :  $a - 0.22$ ;  $b - 0.215$ ;  $c - 0.205$ . Параметры системы (4):  $P = 320$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.355$   
 Fig. 5. Instantaneous profiles (snapshots) (upper row) and space-time profiles (low row) for the ensemble (4) dynamics with decreasing coupling strength  $\sigma$ :  $a - 0.22$ ;  $b - 0.215$ ;  $c - 0.205$ . Parameters of the system (4):  $P = 320$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.355$





Как показывают расчеты, наличие квазипериодической динамики в индивидуальных элементах ансамблей связанных 2D и 3D отображений Спротта не приводит к рождению химерных структур, отличающихся от амплитудных и фазовых. В качестве особенности можно отметить реализацию режимов квазипериодических колебаний в элементах, принадлежащих синхронным кластерам, при определенных значениях параметров ансамблей.

### Заключение

В настоящей работе проведено численное исследование особенностей пространственно-временной динамики ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов. В качестве индивидуальных элементов были выбраны двумерное и трехмерное отображения Спротта, которые представляют собой некоторую модификацию и обобщение двумерного квадратичного отображения Эно. Основной особенностью изолированных 2D и 3D отображений Спротта является реализация в них сценария перехода к хаосу через квазипериодические движения и возникновение режима гиперхаоса, который характеризуется двумя положительными показателями Ляпунова.

Численный анализ динамики ансамблей 2D и 3D отображений Спротта с нелокальной связью показал, что переход от режима полной хаотической синхронизации к режиму пространственно-временного хаоса происходит через возникновение химерных структур. В ансамбле 2D отображений Спротта при определенных значениях радиуса связи и при уменьшении значений силы нелокальной связи реализуются только амплитудные химеры, а в кольце связанных 3D отображений Спротта могут также наблюдаться режимы сосуществования фазовых и амплитудных химерных структур.

Полученные результаты показывают, что режимы фазовых и амплитудных химер в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов являются типичными не только для случаев осцилляторов с бифуркациями удвоения периода [5–7, 10, 13], но и для осцилляторов с квазипериодическим механизмом рождения хаоса.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого Физического Общества, проект 163436311-SFB 910 и Министерства образования и науки РФ (проект № 3.8616.2017/8.9).

### Список литературы

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // *Nonlin. Phen. in Complex Syst.* 2002. Vol. 5, № 4. P. 380–385.
2. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera States for Coupled Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, iss. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
3. Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, iss. 8. P. 084103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.084103
4. Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states : Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity.* 2015. Vol. 28, № 3. P. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67
5. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks : spatial chaos and chimera states // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, iss. 23. P. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102
6. Wolfrum M., Omel'chenko O. E. Chimera States Are Chaotic Transients // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 84, iss. 1. P. 015201(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.84.015201
7. Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P., Maistrenko Y., Schöll E. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 85, iss. 2. P. 026212. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.026212
8. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera Death : Symmetry Breaking in Dynamical Networks // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, iss. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101
9. Dudkowsky D., Maistrenko Y., Kapitaniak T. Different types of chimera states : an interplay between spatial and dynamical chaos // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90, iss. 3. P. 032920. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.032920
10. Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Шöll Е., Анищенко В. С. Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // *Письма в ЖТФ.* 2016. Т. 42, вып. 14. С. 103–110.
11. Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett.* 2015. Vol. 112, № 4. P. 40002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/40002
12. Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2017. Vol. 226, iss. 9. P. 1857–1866. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70023-1
13. Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally



- coupled chaotic systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 43. P. 25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024
14. *Ulonka S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E.* Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities // Chaos. 2016. Vol. 26, iss. 9. P. 094825. DOI: 10.1063/1.4962913
  15. *Shepelev I. A., Bukh A. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S.* Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 90, iss. 4. P. 2317–2330. DOI: 10.1007/s11071-017-3805-6
  16. *Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C. G.* Chimera-like states in modular neural networks // Scientific reports. 2016. Vol. 6. P. 19845. DOI: 10.1038/srep19845
  17. *Semenova N. I., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E.* Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117, iss. 1. P. 01410. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
  18. *Schmidt A., Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A., Hövel P.* Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 95, iss. 3. P. 032224. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.032224
  19. *Tsigkri-DeSmedt N. D., Hizanidis J., Schöll E., Hövel P., Provata A.* Chimeras in Leaky Integrate-and-Fire Neural Networks : Effects of Reflecting Connectivities // Eur. Phys. J. B. 2017. Vol. 90, iss. 7. P. 139. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2017-80162-0>
  20. *Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M.* Chimeralike States in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, iss. 14. P. 144103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144103
  21. *Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., Schöll E., Hövel P., Provata A.* Chimera States in Population Dynamics : Networks with Fragmented and Hierarchical Connectivities // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92, iss. 1. P. 012915. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.012915
  22. *Schöll E.* Synchronization Patterns and Chimera States in Complex Networks : Interplay of Topology and Dynamics // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2016. Vol. 225, iss. 6–7. P. 891–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3
  23. *Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E.* Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2017. Vol. 226, iss. 9. P. 1883–1892. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70036-8
  24. *Elhadj Z., Sprott J. C.* A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 5. P. 1567–1577. DOI:10.1142/S021812740802118X
  25. *Elhadj Z., Sprott J. C.* Classification of three-dimensional quadratic diffeomorphisms with constant Jacobian // Front. Phys. China. 2009. Vol. 4, iss. 1. P. 111–121. DOI: 10.1007/s11467-009-0005-y
  26. *Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В.* Бифуркации отображения : учеб.-науч. издание. Саратов : ООО Издательский центр «Наука», 2012. 196 с.
  27. *Хенон М.* Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы. М. : Мир, 1981. С. 152–163.
  28. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. Изд. 2-е, доп. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 320 с.
  29. *Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D.* Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3493–3508. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127405014180>
  30. *Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I.* Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation // Reg. and Chaot. Dynamics. 2006. Vol. 11, № 2. P. 191–212. DOI: 10.1070/RD2006v011n02ABEH000345
  31. *Гонченко С. В., Овсянников И. И.* О бифуркациях трехмерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к «нейтральной» седловой неподвижной точке // Теория представлений, динамические системы. VIII, Спец. вып., Зап. науч. сем. ПОМИ. 2003. Т. 300, ПОМИ. СПб. С. 167–172.
  32. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Пример дикого странного аттрактора // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.
  33. *Шильников А. Л.* Бифуркации и хаос в системе Мориока-Шимицу // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький : Изд-во Горьк. ун-та, 1986. С. 180–193.
  34. *Shilnikov A. L.* On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // Physica D. 1993. Vol. 62, iss. 1–4. P. 338–346. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90292-9
  35. *Lozi R.* Un Attracteur Entrange du Type Attracteur de Henon // J. de Physique. 1978. Vol. 39, № C5. P. 9–10.
  36. *Бух А. В., Шепелев И. А.* Компьютерная программа для моделирования сетей динамических элементов, описывающихся одномерными или двумерными матрицами связи. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2017612340 от 20 февраля 2017 г.

#### Образец для цитирования:

Пузанов А. М., Анищенко В. С., Стрелкова Г. И. Химерные структуры в ансамблях нелокально связанных отображений Спротта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 246–257. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-246-257>



## Chimera Structures in Ensembles of Nonlocally Coupled Sprott Maps

A. M. Puzanov, V. S. Anishchenko, G. I. Strelkova

Alexey M. Puzanov, <http://orcid.org/0000-0001-9583-7898>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, alex.n.97@mail.ru

Vadim S. Anishchenko, <http://orcid.org/0000-0003-2255-1498>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, wadim@info.sgu.ru

Galina I. Strelkova, <http://orcid.org/0000-0002-8667-2742>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, strelkovagi@info.sgu.ru

**Background and Objectives:** Recently, special attention in nonlinear dynamics and related research fields was targeted to the study of chimera states in networks of coupled oscillators. Chimeras were revealed in ensembles of nonlocally coupled identical systems which are described by both discrete- and continuous-time chaotic systems. In the paper we study numerically the dynamics of ring networks of nonlocally coupled chaotic discrete maps in order to find chimera states of different types, namely, phase and amplitude chimeras. The local dynamics of the individual elements is described by 2D and 3D Sprott maps which exhibit a quasi-periodic route to chaos and the regime of hyperchaos. **Materials and Methods:** The analysis is carried out using a software package which was elaborated for modeling the dynamics of complex networks. This program entitled "Computer program for modeling networks of dynamical elements, which are described by one-dimensional or two-dimensional coupling matrices" got the Certificate on state registration of a computer program. This software enables one to perform a detailed study of the spatio-temporal dynamics of the considered networks as the parameters of the individual elements and of the nonlocal coupling are varied, as well as to construct instantaneous profiles (snapshots) and space-time plots for the ensemble dynamics. **Results:** The numerical analysis of the dynamics of the ensembles of nonlocally coupled 2D and 3D Sprott maps has shown that the transition from complete chaotic synchronization to the regime of spatio-temporal chaos occurs through the appearance of chimera structures. For certain values of the coupling range and when decreasing coupling strength, the ring of 2D Sprott maps demonstrates amplitude chimera structures, whose elements are characterized by strongly developed chaotic behavior. The regime of coexistence of phase and amplitude chimeras is observed in the network of 3D Sprott maps with nonlocal coupling. **Conclusion:** The numerical results obtained and described in this paper indicate that the regimes of phase and amplitude chimeras in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators are typical not only for the case when individual oscillators are characterized by period-doubling bifurcations, but also for the oscillators which demonstrate the quasi-periodic route to chaos.

**Keywords:** ensemble of coupled oscillators, nonlocal coupling, phase and amplitude chimeras, Sprott maps.

Received: 27.05.2019 / Accepted: 21.08.2019 / Published: 02.12.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

**Acknowledgements:** This work was funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) – Projektnumber 163436311-SFB 910 and by the Russian Ministry of Education and Science (Project Code 3.8616.2017/8.9).

## References

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *Nonlin. Phen. in Complex Syst.*, 2002, vol. 5, no. 4, pp. 380–385.
2. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera States for Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, iss. 17, pp. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
3. Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, no. 8, pp. 084103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.084103
4. Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 2015, vol. 28, no. 3, pp. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67
5. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, iss. 23, pp. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102
6. Wolfrum M., Omel'chenko O. E. Chimera States Are Chaotic Transients. *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 84, iss. 1, pp. 015201(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.84.015201
7. Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P., Maistrenko Y., Schöll E. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, iss. 2, pp. 026212. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.026212
8. Zakharaova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera Death: Symmetry Breaking in Dynamical Networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, iss. 15, pp. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101
9. Dudkowski D., Maistrenko Y., Kapitaniak T. Different types of chimera states: an interplay between spatial and dynamical chaos. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 90, iss. 3, pp. 032920. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.032920
10. Bogomolov S. A., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators. *Technical Physics Letters*, 2016, vol. 42, iss. 7, pp. 765–768. DOI: 10.1134/S1063785016070191
11. Semenova N., Zakharaova A., Schöll E., Anishchenko V. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, 2015, vol. 112, no. 4, pp. 40002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/40002
12. Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2017, vol. 226, iss. 9, pp. 1857–1866. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70023-1
13. Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, vol. 43, pp. 25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024



14. Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities. *Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 9, pp. 094825. DOI: 10.1063/1.4962913
15. Shepelev I. A., Bukh A. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 90, iss. 4, pp. 2317–2330. DOI: 10.1007/s11071-017-3805-6
16. Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Diaz-Guilera A., Antonopoulos C. G. Chimera-like states in modular neural networks. *Scientific reports*, 2016, vol. 6, pp. 19845. DOI: 10.1038/srep19845
17. Semenova N. I., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 117, iss. 1, pp. 01410. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
18. Schmidt A., Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A., Hövel P. Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 95, iss. 3, pp. 032224. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.032224
19. Tsigkri-DeSmedt N. D., Hizanidis J., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimeras in Leaky Integrate-and-Fire Neural Networks: Effects of Reflecting Connectivities. *Eur. Phys. J. B*, 2017, vol. 90, iss. 7, pp. 139. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2017-80162-0>
20. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. Chimeralike States in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, iss. 14, pp. 144103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144103
21. Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimera States in Population Dynamics: Networks with Fragmented and Hierarchical Connectivities. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, iss. 1, pp. 012915. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.012915
22. Schöll E. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2016, vol. 225, iss. 6–7, pp. 891–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3
23. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2017, vol. 226, iss. 9, pp. 1883–1892. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70036-8
24. Elhadj Z., Sprott J. C. A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, no. 5, pp. 1567–1577. DOI: 10.1142/S021812740802118X
25. Elhadj Z., Sprott J. C. Classification of three-dimensional quadratic diffeomorphisms with constant Jacobian. *Front. Phys. China*, 2009, vol. 4, iss. 1, pp. 111–121. DOI: 10.1007/s11467-009-0005-y
26. Kuznetsov A. P., Savin A. V., Sedova Y. V., Tyuryukina L. V. *Bifurkatsii otobrazhenii* [Bifurcations of maps]. Saratov, OOO Izdat. Tsentr “Nauka”, 2012. 196 p. (in Russian).
27. Henon M. Dvumernoe otobrazhenie so strannym attraktorom [Two-dimensional maps with strange attractor]. In: *Strannye attraktory* [Strange attractors]. Moscow, Mir Publ., 1981, pp. 152–163 (in Russian).
28. Anishchenko V. S. *Slozhnye kolebaniya v prostih sistemah* [Complex oscillations in simple systems]. 2nd ed., ext. Moscow, Knizhnyi Dom “LIBROKOM”, 2009. 320 p. (in Russian).
29. Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3493–3508. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127405014180>
30. Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation. *Reg. and Chaot. Dynamics*, 2006, vol. 11, no. 2, pp. 191–212. DOI: 10.1070/RD2006v011n02ABEH000345
31. Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I. On bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with a homoclinic tangency to a “neutral” saddle fixed point. *J. Math. Sci.* (N.Y.), 2005, vol. 128, iss. 2, pp. 2774–2777.
32. Turaev D. V., Shilnikov L. P. An example of wild strange attractor. *Math. sb.*, 1998, vol. 189, no. 2, pp. 137–160 (in Russian).
33. Shilnikov A. L. Bifurcations and chaos in the Morioka-Shimizu system. In: *Metody kachestvennoi teorii differentsialnykh uravnenii* [Methods of qualitative theory of differential equations]. Gorky, Izd-vo Gorkovskogo universiteta, 1986, pp. 180–193 (in Russian).
34. Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model. *Physica D*, 1993, vol. 62, iss. 1–4, pp. 338–346. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90292-9
35. Lozi R. Un Attracteur Entrange du Type Attracteur de Henon. *J. de Physique*, 1978, vol. 39, no. C5, pp. 9–10.
36. Bukh A. V., Shepelev I. A. *Kompyuternaya programma dlya modelirovaniya setei dinamicheskikh elementov opisyyvayuzhihsya odnomernymi ili dvumernymi matritsami svyazi* [Computer program for modeling networks of dynamical elements, which are described by one-dimensional or two-dimensional coupling matrices]. Certificate on state registration of a computer program No. 2017612340 dated 20.02.2017 (in Russian).

**Cite this article as:**

Puzanov A. M., Anishchenko V. S., Strelkova G. I. Chimera Structures in Ensembles of Nonlocally Coupled Sprott Maps. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 246–257 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-246-257>