10. *Poppe G. P. M., Wijers C. M.* More efficient computation of the complex error function // ACM Trans. Math. Soft. 1990. Vol. 16, № 1. P. 38–46.
11. Maplesoft, «Maple», Version 15, Waterloo Maple Inc. (2012). URL: http://www.maplesoft.com (дата обращения: 01.07.2012).
12. Wolfram Research, Inc., «Mathematica», Version 8.0, Champaign, IL (2012). URL: http://www.wolfram.com (дата обращения: 01.07.2012).
13. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби / пер. с англ. М., 1985. 414 с.
14. *Cody W. J.* Rational Chebyshev approximations for the error function // Math. Comput. 1969. Vol. 23, № 107. P. 631–637.

УДК 537.8

ДИНАМИКА ДУАЛЬНОЙ ФАЗЫ

Ю. Н. Зайко

Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина – филиал РАНХ и ГС при Президенте РФ, Саратов
E-mail: zyrnick@rambler.ru

В статье рассмотрена динамика дуальной фазы, связанной с дуальным характером дионов – гипотетических частиц, обладающих одновременно электрическим и магнитным зарядом. Получены уравнения, описывающие динамику дуальной фазы из условия, чтобы уравнения Максвелла сохраняли свой вид под действием дуальных преобразований, соответствующий эффективному электрическому характеру заряда диона. Найдены частные решения этих уравнений в вакууме и в поле электрического диполя. Показано, что найденные ранее решения уравнений Максвелла в виде сферических волн с нулевым орбитальным моментом соответствуют монопольному излучению диона. Показан голдстоуновский характер дуальной фазы.
Ключевые слова: дион, магнитный заряд, голдстоуновская мода.

Dynamics of Dual Phase

Yu. N. Zayko

This article presents dynamics of dual phase, which is connected with dual character of dions – hypothetical particles possessing both electrical and magnetic charges. For description of dual phase the set of equations is received from condition that Maxwell equations conserve their electrical character under dual transformations, what corresponds to effective electrical charge of dion. Some special solutions of these equations for example in vacuum, and in field of electrical dipole are found. It was shown, that solutions of Maxwell equations for spherical waves with zero orbital moment momentum correspond to monopole radiation of dion. Goldstone character of dual phase was shown.
Key words: dion, magnetic charge, Goldstone mode.

Введение

Уравнения Максвелла допускают формулировку, симметричную относительно электрических и магнитных зарядов [1]:

$$
\begin{aligned}
&rot\vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = e\vec{J}, \quad div\vec{E} = e\,\rho, \\
&rot\vec{E} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -g\vec{J}, \quad div\vec{H} = g\,\rho.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, ρ и $\vec{J}$ – плотность числа и тока частиц соответственно (в системе Хевисайда–Лоренца). Предполагается, что частицы, называемые дионами и служащие источниками полей, несут одновременно электрический (e) и магнитный (g) заряды. Как известно, с помощью дуального преобразования полей

$$
\begin{aligned}
&\vec{\mathrm{E}} = \cos\theta\cdot\vec{E} + \sin\theta\cdot\vec{H}, \\
&\vec{\mathrm{H}} = -\sin\theta\cdot\vec{E} + \cos\theta\cdot\vec{H}, \\
&\cos\theta = \frac{e}{q}, \quad \sin\theta = \frac{g}{q}, \quad q = \sqrt{e^2+g^2},
\end{aligned} \tag{2}
$$

где θ – параметр дуального преобразования (дуальная фаза), можно исключить магнитный заряд из уравнений (1), т.е. привести их к виду [1]:

$$
\begin{aligned}
&rot\,\vec{\mathrm{H}} - \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t} = q\vec{J}, \quad div\,\vec{\mathrm{E}} = q\rho, \\
&rot\,\vec{\mathrm{E}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}}{\partial t} = 0, \quad div\,\vec{\mathrm{H}} = 0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

описывающему электродинамику частиц с эффективным электрическим зарядом q[1]. Таким образом, вводимый подобным способом магнитный заряд оказывается ненаблюдаемым [1] [2]. При этом параметр θ считается постоянным, хотя и неопределенным в силу неопределенности e и g. С этой точки зрения как заряды (электрический и магнитный), так и поля получают свое наименование в результате соглашения, и мы всегда можем изменить его и называть электрическое

[1] Аналогично уравнения движения дуально заряженных частиц приводятся к уравнениям движения частиц, несущих эффективный электрический заряд q.

[2] Аналогично может быть «исключен» и электрический заряд [1].

поле магнитным и наоборот, как и заряды. Такой метафизический подход не характерен для современной физики.

В отличие от этого подхода в настоящей работе предполагается, что с фазой θ связано некоторое поле. Это налагает ограничения на значения θ в соседних точках пространства в близкие моменты времени. Они носят характер уравнений, получаемых из лагранжиана (или из уравнений) электромагнитного поля в предположении, что θ – независимая динамическая переменная. С этим полем может быть связана гипотетическая безмассовая частица, обеспечивающая взаимодействие между дионами [2], подобно тому как фотоны переносят взаимодействие между электрически заряженными частицами.

Эти рассуждения могут быть дополнены соображениями, аналогичными тем, которые приводят к представлению о динамической природе электрического заряда, согласно которому электромагнитное взаимодействие должно осуществляться с помощью калибровочного поля [1, 3].

1. Вывод основных уравнений

Полевые уравнения принято выводить из выражения для лагранжиана, связанного с соответствующими полями. В задачах дуальной электродинамики такой подход связан с известными трудностями [1]. Тем не менее такие попытки предпринимаются. Для этого можно рассмотреть, например, лагранжиан приведенного ниже вида для электромагнитного поля, создаваемого дуально заряженными частицами [1]:

$$\begin{gathered}\Lambda = -m\int ds + q\int d^4x\cdot v_\mu C_\mu - \frac{1}{2}\int d^4x\cdot \Phi^2_{\mu\nu},\\ C_\nu = \cos\theta\cdot A_\nu + \sin\theta\cdot B_\nu,\\ \Phi_{\mu\nu} = \cos\theta\cdot F_{\mu\nu} + \sin\theta\cdot \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu,\end{gathered} \tag{4}$$

где m – масса дионов, v_μ – их скорость, A_ν и B_ν – векторный и псевдовекторный потенциалы, $F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля, значком ~ (тильда) обозначен дуальный ему тензор. Варьируя Λ по потенциалам, получим уравнения Максвелла для фотонов:

$$\partial_\nu \Phi_{\mu\nu} = q v_\mu . \tag{5}$$

Выполняя дифференцирование в (5) и считая θ функцией координат и времени, получим уравнения, описывающие динамику θ, имеющие вид[3]:

$$\Phi_{\mu\nu,\theta}\cdot\partial_\nu\theta = 0, \tag{6}$$

запятая обозначает производную по соответствующей переменной, $\partial_\nu = \partial/\partial x_\nu$.

Система уравнений (6) имеет нетривиальные решения при условии обращения ее детерминанта Δ в нуль. Вычисляя его, находим:

$$\begin{gathered}\Delta = (\vec{E}\vec{H})^2 = \frac{H^2 - E^2}{2}\sin 2\chi + \vec{E}\vec{H}\cos 2\chi,\\ \chi = \theta + \frac{\pi}{2}.\end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, нетривиальная динамика угла θ имеет место при обращении в нуль обоих инвариантов электромагнитного поля $H^2 - E^2 = 0$ и $\vec{E}\vec{H} = 0$.

Рассмотрим некоторые возможные решения (6). Беря миноры (точнее, алгебраические дополнения) к первым двум строкам $\Phi_{\mu\nu,\theta}(\theta) = \Phi_{\mu\nu}(\chi)$, получим две различные системы уравнений:

$$\begin{gathered}\partial_i\chi \sim H_i,\\ \partial_t\chi = 0,\\ (i = 1,2,3)\end{gathered} \tag{8а}$$

и

$$\begin{gathered}\partial_x\chi \sim -E_y,\\ \partial_y\chi \sim E_x,\\ \partial_t\chi \sim -H_z.\end{gathered} \tag{8б}$$

Выбор других строк или столбцов не даст ничего нового, приводя лишь к переобозначению координатных осей. Комбинируя уравнения (8) с уравнениями (3) придем к окончательным уравнениям для χ:

$$\begin{gathered}\partial_x^2\chi - \partial_t^2\chi = 0,\\ \Delta\varphi = 0,\\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Ось координат x выделена тем, что вдоль нее решение распространяется как волна со скоростью света c[4]. Понятно, что это задано внешними условиями, и направление оси x может быть приписано любой другой оси.

Можно получить аналогичные результаты непосредственно из уравнений (3), предполагая их инвариантность при изменениях θ (или φ).

Подставляя в уравнения (1) выражения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ из (2) из условия, что уравнения для них по-прежнему будут иметь вид (3), получим уравнения для дуальной фазы:

$$\begin{gathered}\nabla\theta\cdot\vec{E} = 0, \nabla\theta\cdot\vec{H} = 0,\\ \nabla\theta\times\vec{E} + \vec{H}\cdot\partial_t\theta = 0,\\ \nabla\theta\times\vec{H} - \vec{E}\cdot\partial_t\theta = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

[3] Здесь мы уже явно отходим от использования лагранжева метода.

[4] В уравнениях (4) и далее положено $c = 1$.

Из первой пары уравнений (10) получим

$$\nabla\theta = -\alpha \cdot \vec{S},\ \vec{S} = \vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}} = \vec{E} \times \vec{H}, \qquad (11а)$$

где $\vec{S}$ – вектор плотности потока энергии электромагнитного поля, α – некоторый коэффициент. Вторая пара уравнений (10) приведет к уравнению

$$\partial_t \theta = \frac{\alpha}{W} \cdot \vec{S}^2, \quad W = \frac{\vec{\mathrm{E}}^2 + \vec{\mathrm{H}}^2}{2} = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{2}. \qquad (11б)$$

где W – плотность энергии электромагнитного поля. Подставляя (11а) в (11б) получим уравнение

$$\partial_t \theta + \vec{V} \cdot \nabla\theta = 0, \quad \vec{V} = \frac{\vec{S}}{W}, \qquad (12)$$

где $\vec{V}$ – скорость переноса электромагнитной энергии. Если $V = c$, что справедливо в так называемой волновой зоне (см. ниже), то это уравнение совпадает с первым уравнением (9), где $c = 1$. Таким образом, направление оси x в (9) совпадает с направлением распространения электромагнитной энергии. Второе уравнение (9) получим, предполагая, что $\operatorname{div}\vec{S} = 0$ [5].

2. Решения уравнений для дуальной фазы

2.1. Электромагнитное поле без источников

Для этого случая $\operatorname{div}\vec{S} = 0$. Решения уравнений (9) можно получить, налагая на них некоторые граничные условия. Рассмотрим поведение дуальной фазы вблизи диона. Естественным условием будет требование, чтобы на больших расстояниях от оси x возмущения фазы θ были малы и мы в асимптотике пришли бы к обычной электродинамике, соответствующей значению $\theta = 0$. Характерной особенностью уравнений (9) является то, что невозможно получить их решения, ограниченные всюду. Например, решением, удовлетворяющим поставленному выше условию, является

$$\theta_k(\vec{r}) = bK_0(k\rho) \cdot \exp[\pm i(kx - \omega t)], \quad \rho = \sqrt{y^2 + z^2},\ k = \frac{\omega}{c}, \qquad (13)$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя, k – волновое число, ω – частота, c – скорость света в вакууме, b – постоянная, определяемая из условия нормировки

$$\int \theta_k^*(\vec{r})\theta_{k'}(\vec{r})d\vec{r} = 2\pi\delta(k - k'), \qquad (14)$$

откуда следует $b = k/\sqrt{\pi}$.

Как известно, K_0 имеет особенность в нуле. Это обстоятельство затрудняет интерпретацию полученного решения, приводя к тому, что на малых расстояниях от оси x появляются области, в которых изменения фазы θ порядка 2π чередуются с возрастающей частотой. Напомним, что сама фаза θ определена по модулю 2π. Апелляция к необходимости на малых масштабах применять квантовую теорию не спасает положения, поскольку квантовомеханический оператор фазы не определен [5].

2.2. Электромагнитное поле дипольного излучателя

Электромагнитные поля элементарного дипольного излучателя, расположенного в точке $r = 0$ определяются выражениями [6]:

$$H_\varphi = \frac{\sin\vartheta}{4\pi r}\left(\ddot{p} + \frac{\dot{p}}{r}\right), \quad E_\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{4\pi r}\left(\ddot{p} + \frac{\dot{p}}{r} + \frac{p}{r^2}\right), \quad E_r = \frac{\cos\vartheta}{4\pi r}\left(\frac{\dot{p}}{r} + \frac{p}{r^2}\right), \qquad (15)$$

где φ, ϑ, r – сферические координаты, $p(t)$ – дипольный момент излучателя, $c = 1$, точка означает производную по времени. Исходя из (15), легко получить выражения для $\vec{S}$ и W, и, подставив их в уравнения (11) и (12), найти их решения. Приведем явный вид $\vec{S}$ (явный вид W не так важен):

$$S_r = \left(\frac{\sin\vartheta}{4\pi r}\right)^2 \left\{\ddot{p}^2 + \frac{1}{2r}\frac{d}{dt}\left[\dot{p}^2 + \left(\dot{p} + \frac{p}{r}\right)^2\right]\right\}, \quad S_\vartheta = -\frac{\sin 2\vartheta}{(4\pi r)^2}\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}\left(\dot{p} + \frac{p}{r}\right)^2. \qquad (16)$$

В дальней зоне [6] ($r >> \lambda$, λ – длина волны излучения) имеем:

$$S_\vartheta = 0, S_r = W = \left(\frac{\sin\vartheta}{4\pi r}\right)^2 \ddot{p}^2, \qquad (17)$$

и уравнения (11а) и (12) имеют вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} + \alpha S_r = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\vartheta} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + c\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0. \qquad (18)$$

В последнем уравнении явно учтена скорость света c. Из него следует, что его решение имеет вид $\theta = \theta(r - ct)$.

Первые два уравнения (18) эквивалентны уравнению (11а). Чтобы исследовать их решения, надо знать вид α. Его можно получить двумя способами. Во-первых, если роль уравнения (11а), кроме определения пространственной зависимости θ, заключается еще в задании начальных значений для уравнения (11б), то производная

[5] Система уравнений (10) не эквивалентна (6), которая соответствует только одной паре уравнений Максвелла. Для полной эквивалентности к (6) надо добавить уравнения $\Phi_{[\mu\nu,\sigma]}=0$, приводящие ко второй паре [4].

[6] Говоря строго, уравнения (11) и (12) для фазы θ применимы только в дальней зоне, где выполняются условия $H^2 - E^2 = 0$ и $\vec{E}\vec{H} = 0$.

по времени от его левой части должна равняться нулю[7]. Можно показать, что это действительно так, если $\alpha = b/W$, где b не зависит от полей E и H. Действительно, вычисляя производную по времени от левой части (11а), получим:

$$\nabla\theta_t + (\alpha\vec{S})_t = b\left[\nabla(V^2) + \vec{V}_t\right] = 0,$$

поскольку в дальней зоне скорость $\vec{V}$ не зависит от времени и равна по величине c. Во-вторых, можно непосредственно вычислить α, применив уравнение (11а) к случаю распространения плоской электромагнитной волны между двумя идеально отражающими зеркалами и учитывая, что набег фазы θ вдоль замкнутой траектории кратен 2π.

Решая уравнение (18) для $\alpha = b/W$, найдем явный вид фазы $\theta = -b(r - ct)$, откуда следует, что $b = -k$, где k – волновое число. Это согласуется с известным уравнением [4]: $\omega_r + k_t = 0$, где $\omega = -\theta_t = ck$, $k = \theta_r$.

В силу теоремы о двойственности [8] можно утверждать, что аналогичный результат имеет место и в окрестности элементарного магнитного излучателя.

3. Электродинамика дионов

В работе [9] получены решения уравнений Максвелла [8] для поля излучения волны E-типа с орбитальным моментом $l = 0$:

$$E_\vartheta = \frac{i\omega e}{cr}\operatorname{ctg}\vartheta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)},$$
$$H_\varphi = \pm\frac{i\omega e}{cr}\operatorname{ctg}\vartheta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}, \qquad (19)$$
$$E_r = \frac{e}{r^2}e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)},$$

где e – постоянная. Покажем, что это поле описывает излучение диона, расположенного в начале координат, фаза которого линейно зависит от времени. Для этого рассмотрим наряду с (19) поле излучения волны M-типа, используя двойственную симметрию уравнений Максвелла, т. е. заменяя в (19) $\vec{E} \to -\vec{H}$ и $\vec{H} \to \vec{E}$, а также $e \to m$:

$$H_\vartheta = -\frac{i\omega m}{cr}\operatorname{ctg}\vartheta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)},$$
$$E_\varphi = \pm\frac{i\omega m}{cr}\operatorname{ctg}\vartheta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}, \qquad (20)$$
$$H_r = -\frac{m}{r^2}e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}.$$

[7] Аналогичная ситуация имеет место в электродинамике, где одна пара уравнений Максвелла, не содержащая производных по времени, используется для задания начальных значений для второй пары [7].

[8] И Эйнштейна–Максвелла, так как волна (19) не создает гравитационного поля [9].

В работе [9] было найдено выражение для тока эквивалентного источника, соответствующего (19):

$$I_e(\rho, z) = \frac{i\omega e}{2}\frac{z}{r}e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}, r = \sqrt{z^2 + \rho^2}. \qquad (21)$$

Легко показать, что ток эквивалентного источника, соответствующего (20) есть:

$$I_m(\rho, z) = \frac{i\omega m}{2}\frac{z}{r}e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}. \qquad (22)$$

Вводя величину $p = (e - im)e^{-i\omega t}$, такую, что $dp/dt = 2Y(r = 0)$, где $Y = I_e - iI_m$ перепишем (19) и (20) в виде, напоминающем выражения для полей электромагнитной волны, излучаемой электрическим дипольным излучателем, расположенным в точке $r = 0$ [6]:

$$E_\vartheta + iH_\vartheta = -\frac{\dot{p}}{cr}\operatorname{ctg}\vartheta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)},$$
$$E_\varphi + iH_\varphi = -\frac{i\dot{p}}{cr}\operatorname{ctg}\vartheta \cdot e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}, \qquad (23)$$
$$E_r + iH_r = \frac{p}{r^2}e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}, \dot{p} = \frac{dp}{dt}.$$

Если перенести фактор $e^{-i\omega t}$ в левую часть (22), то слева мы получим выражения для соответствующих полей (23) после дуального поворота на угол $\theta = \omega t$. Роль излучателя играет дион с монотонно изменяющейся фазой, т. е. периодически переходящий из электрического в магнитное состояние и обратно. Напомним, что излучение систем, состоящих из зарядов одного сорта (только электрических, или только магнитных), не содержит монопольных членов с $l = 0$. Другой особенностью электромагнитного поля диона (19) является то, что оно не создает гравитационного поля в отличие от электромагнитных полей волн с $l \neq 0$ [9].

Заключение

В работе показано, что условие «электрического» характера фазы дуального преобразования может быть записано в виде некоторой системы уравнений (11) и (12), одно из которых – уравнение (12) – имеет характер волнового уравнения, причем скорость распространения волны равна скорости света в вакууме c. Поскольку это уравнение первого порядка, то его решением является только расходящаяся волна, распространяющаяся от начала координат на бесконечность.

Второе уравнение – (11а) – описывает структуру волны дуальной фазы.

Полученные результаты позволяют говорить о некой моде (безмассовой, голдстоуновской [9]), переносящей значение дуальной фазы со скоростью света из областей, в которых это значение установлено (экспериментально или по соглашению) в другие области. В пользу голдстоуновской природы этой моды говорит то, что она связана с нарушением дуальной симметрии (2) путем приписывания фазе дуального преобразования θ конкретного, хотя и неизвестного значения [1], и, кроме того, она имеет спектр $\omega = ck$, характерный для голдстоуновской моды. С ней связано установление дальнего порядка во всей доступной исследованию с помощью световых сигналов части Вселенной, в том смысле, что фиксирование характера максвелловских уравнений в одной ее части распространяется и на другие ее части. Этот результат позволит пролить свет на вопросы, связанные с многолетними безрезультатными поисками магнитных зарядов.

В работе [9] эта мода отождествлялась с фотонами. Результаты настоящей работы получены без данного предположения. Однако все вышеизложенное дает веские основания в пользу такого заключения. Во-первых, взаимодействие дионов в «электрической» фазе, как и обычных электрически заряженных частиц, должно переноситься фотонами. Во-вторых, поле, излучаемое дионом, является электромагнитным полем. В третьих, закон дисперсии $\omega = ck$ рассматриваемой моды совпадает с фотонным. И наконец, в четвертых, введение особой частицы, которая наряду с фотонами должна переносить взаимодействие между электрически (и магнитно) заряженными частицами и обладать при этом всеми свойствами фотона[9], противоречит принципу экономии мышления [10].

Подход, принятый в настоящей работе, отличается от подхода Дж. Уилера и Мизнера [11], использующих совместное решение уравнений Максвелла и Эйнштейна (так называемая «уже единая теория поля» Дж. Райнича [12]). Кроме того, что используются только уравнения Максвелла, рассмотрен случай, представляющий определенные трудности в указанном подходе. Во-первых, явно учтены заряды, создающие поля, а во-вторых, оба инварианта электромагнитного поля обращаются в нуль. Несмотря на это, результаты, представленные в настоящей работе, в каком-то смысле, являются решением проблемы синхронизации дуальных фаз в различных областях пространства, первоначально разделенных областями, в которых электромагнитное поле отсутствует. В связи со сказанным уместно также сослаться на работу [13].

[9] Следует оговориться, что вопрос относительно поляризации этой частицы остается пока нерешенным.

Список литературы

1. *Стражев В. И., Томильчик Л. М.* Электродинамика с магнитным зарядом. Минск : Наука и техника, 1975. 336 с.
2. *Долгов А. Д.* Магнитный монополь // Физическая энциклопедия : в 5 т. М.: Сов. энцикл., 1990. Т. 2. С. 687–688.
3. *Берестецкий В. Б.* Проблемы физики элементарных частиц. М. : Наука, 1979. 256 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : в 10 т. Т. 2. Теория поля. 5-е. изд. М. : Наука, 1967. 460 с.
5. *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М. : Наука, 1971. 544 с.
6. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем. Эволюционное представление / пер. с англ. Ю. А. Данилова. М. : Мир, 1989. 486 с.
7. *Вебер Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны / пер. с англ. под ред. Д. Иваненко. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 272 с.
8. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М. : Наука, 1989. 544 с.
9. *Зайко Ю. Н.* Точные решения уравнений Максвелла–Эйнштейна // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. 2010. Т. 10. Сер. Физика, вып. 1. С. 50–58.
10. *Неванлинна Р.* Пространство, время и относительность /пер. с англ. под ред. И. М. Яглома. М. : Мир, 1966. 230 с.
11. *Уилер Дж.* Гравитация, нейтрино, Вселенная / пер. с англ. под ред. Д. Иваненко. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 404 с.
12. *Rainich G. Y.* Electrodynamics of the General Relativity Theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1925. Vol. 27. P. 106–130.
13. *Witten L.* Initial Value Problem of the Einstein-Maxwell Field // Phys. Rev. 1960. Vol. 120, № 2. P. 635–640.