



сивности полос в диапазоне $1400\text{--}1100\text{ см}^{-1}$, интерпретированные как плоские деформационные колебания связей СН и ОН.

Заключение

Представленные результаты модельных оценок геометрической структуры и колебательных спектров конформеров МГФ, их сопоставление с имеющимися экспериментом в спектрах ИК и КР дают основание утверждать следующее. Метод функционала плотности DFT/b3LYP можно использовать для построения достоверных структурно-динамических моделей полигидроксифлавонов и выявления признаков спектральной идентификации их возможных конформеров.

К явным признакам спектральной идентификации следует отнести характеристики полос, интерпретированных как валентные и крутильные колебания гидроксильных фрагментов. Дополнительными признаками могут являться полосы, отнесенные к деформационным колебаниям валентных углов ССН и СОН.

Список литературы

1. Тараховский Ю. С., Ким Ю. А., Абдраимов Б. С., Музафаров Е. Н. Флавоноиды : биохимия, биофизика, медицина. Пушино : Synchronbook. 2013. 310 с.
2. Frisch M. J., Trucks G. W., Schlegel H. B. et al. Gaussian 03, Revision B.03 / Gaussian Inc. Pittsburg PA, 2003.
3. Пулин В. Ф., Элькин П. М., Эрман Е. А. Компьютерное моделирование динамики и структуры спиназарина // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2010. №3 (46). С. 98–105.
4. Элькин М. Д., Джалмухамбетова Е. А., Шальнова Т. А. Моделирование внутримолекулярного взаимодействия в спинохромах // Естественные науки. 2011. № 1 (34). С. 199–206.
5. Элькин М. Д., Бабков Л. М. Колебательные спектры и структура спинохромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 21–26.
6. Элькин М. Д., Гайсина А. Р., Степанович Е. Ю., Шагаутдинова И. Т. Структурно-динамические модели флавоноидов. Моногидроксифлавоны // Естественные науки. 2012. № 4 (41). С. 133–140.
7. Элькин М. Д., Гайсина А. Р., Лихтер А. М., Смирнов В. В. Моделирование структуры и спектров конформеров 3',4' дигидроксифлавонов // Естественные науки. 2013. № 1(42). С. 111–118.
8. Элькин М. Д., Бабков Л. М. Учет ангармонического смещения полос в модельных расчетах колебательных спектров димеров с водородной связью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 20–25.
9. Пулин В. Ф., Элькин П. М., Эрман Е. А. Моделирование адиабатических потенциалов гидроксизамещенных бензола // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2011. № 3 (57), вып. 1. С. 91–98.
10. Свердлов Л. М., Ковнер М. А., Крайнов Е. П. Колебательные спектры многоатомных молекул. М. : Наука, 1970. 560 с.
11. Teslova T., Corredor C., Livingston R., Spataru T., Birke R. L., Lombardi J. R., Canameres M. V., Leona M. Raman and surface-enhanced Raman spectra of flavone and several hydroxyflavone // J. Raman Spectroscopy. 2007. Vol. 38. P. 802–818.
12. Vavra A., Linder R., Kleinermans K. Gas phase infrared spectra of flavone and its derivatives // Chem. Phys. Letters. 2008. Vol. 463. P. 349–352.
13. Canameres M. V., Lombardi J. R., Leon M. Raman and surface enhanced Raman spectra of 7-hydroxy flavone and 3',4' dihydroxy flavone // Morana. 2009. Vol. 6. P. 81–88.
14. Heneczowski M., Kopacz M., Nowak D., Kuzniaczar A. Infrared spectrum analysis of some flavonoids // Acta Polonial Pharmaceutica. 2001. Vol. 57, № 6. P. 415–420.

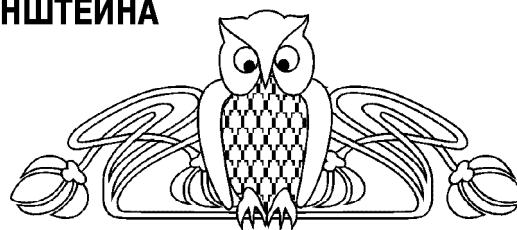
УДК 537.8, 531.51

ИНСТАНТОН УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА – ЭЙНШТЕЙНА

Ю. Н. Зайко

Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина
РАНХиГС при Президенте РФ, Саратов
E-mail: zyrnick@rambler.ru

В статье рассматривается инстантонное решение уравнений Максвелла–Эйнштейна. Выведены уравнения для поля инстантона и метрики. Рассмотрена метрика псевдоевклидова пространства, соответствующая переходу между вырожденными классическими вакуумами задачи, соответствующими наличию на пространственной бесконечности сходящейся и расходящейся сферических электромагнитных волн. Получено выражение для



инстантона, найден его размер и определена величина псевдоевклидова действия. Показано, что инстантон нарушает так называемое «слабое энергетическое условие», выполнение которого существенно для доказательства наличия сингулярностей пространства-времени.

Ключевые слова: инстантон, псевдо-евклидово пространство, классический вакуум, псевдо-евклидово действие.

**Instanton for the Maxwell–Einstein Equations**

Yu. N. Zayko

In this article instanton solution for the Maxwell–Einstein equations is investigated. Equations for the field of instanton and metrics are derived. Metrics of pseudoeuclidean space which is corresponding to transition between degenerate classical vacua of problem and is connected with presence at the space infinity divergent and convergent spherical electromagnetic waves is studied. An expression of the instanton is received and it's size is found. Value of pseudoeuclidean action is calculated. It is shown that instanton violates so called «weak energetic condition» which is essential for space-time singularities proving.

Key words: instanton, pseudo-Euclid space, classical vacuum, pseudo-Euclid action.

Введение

Гравитационные инстантоны привлекают внимание, начиная с работы [1]. Напомним определение. Инстантоном называют топологически нетривиальное локализованное решение классических псевдо-евклидовых полевых уравнений, характеризующееся конечным действием и связывающее два различных вакуума теории [2]. Евклидов вариант теории вводится заменой метрики Минковского $g^{\mu\nu}$ ($g^{00} = 1$, $g^{ij} = -\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$) на евклидову метрику $\delta^{\mu\nu}$. Формально переход от описания в пространстве Минковского к описанию в псевдо-евклидовом пространстве выполняют с помощью замены временной координаты x^0 пространства Минковского на координату $y^0 = ix^0$ псевдо-евклидова пространства, одновременно вводя псевдо-евклидово действие A , связав его с действием в пространстве Минковского S выражением $A = iS$, $i = (-1)^{1/2}$.

Инстантоны классических полевых уравнений в пространстве Минковского описывают в квазиклассическом приближении квантовый процесс туннелирования между вырожденными классическими состояниями, находящимися вблизи различных вакуумов. В теории уравнений Максвелла–Эйнштейна (МЭ) такими вырожденными состояниями являются состояния, в которых на пространственной бесконечности присутствует сходящаяся (расходящаяся) электромагнитная волна и которые представляют два вырожденных вакуума теории. Как показано в работе [3], классический переход между этими состояниями невозможен. Действительно, если мы рассмотрим вакуум, в котором есть сходящаяся сферическая электромагнитная волна (ЭМВ), то при учете искривления пространства-времени за счет волны почти все лучи, соответствующие

малым участкам ее фронта, захватятся искривлением метрики и не дадут вклада в расходящуюся волну¹. Поэтому роль инстантона уравнений МЭ чрезвычайно важна для описания такого интуитивно понятного и «простого» явления, каким кажется процесс преобразования сходящейся ЭМВ в расходящуюся. Другим важным приложением инстантонов уравнений МЭ является разработка физической теории электромагнитных резонаторов, которая позволяет избавиться от нефизических сингулярностей полей, например, в сферическом резонаторе. И, наконец, можно к числу важных приложений разрабатываемой теории отнести космологию, поскольку процесс преобразования сходящихся ЭМВ в расходящиеся является одним из основных процессов во Вселенной.

1. Постановка задачи

В качестве исходных уравнений выберем уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения электромагнитного поля в вакууме (уравнения Максвелла), связанные друг с другом [5]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi K}{c^4} T_{ik}; \quad F^{ik} + \Gamma_{kl}^i F^{ik} = 0. \quad (1)$$

Здесь R – след тензора Риччи R_{ik} ; $R = R^i_i$, g_{ik} – метрический тензор; T_{ik} и F^{ik} – тензор энергии-импульса и электромагнитный тензор; Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля; c – скорость света в вакууме; K – постоянная тяготения; индексы i, k, l пробегают значения 0, 1, 2, 3; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; запятая означает обычную, т.е. нековариантную производную. Будем искать решения (1), соответствующие наличию на бесконечности сферической ЭМВ. Для этого, следуя [5], зададим вид интервала

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2), \quad (2)$$

где $\nu = \nu(t, r, \theta)$, $\lambda = \lambda(t, r, \theta)$; $x^0 = ct$, t – время; $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ – сферические координаты. ЭМВ характеризуется частотой ω , полным моментом импульса J и его проекцией на направление оси z J_z . Кроме того, ЭМВ можно характеризовать орбитальным моментом L , который коммутирует с J и J_z . Выберем ось z системы координат таким образом, чтобы $J_z = 0$. Это упростит задачу, поскольку позволит опустить в уравнениях (1) зависимость от азимутального угла φ . Как и в [5], мы ограничимся рассмотре-

¹ Иными словами, сходящаяся волна не фокусируется в точку, или, говоря математическим языком, соответствующее отображение не гомотопно нулю [4].



нием волны E -типа², для которой отличными от нуля компонентами вектор-потенциала и электромагнитного тензора являются A_1, A_2 и

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0}, \quad F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}, \quad F_{02} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0}. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 &= -e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\tilde{\beta}}{2r^2} (2\tilde{\beta} + 1), \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^1 &= -e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \left[2\tilde{\beta} + 2(\tilde{\beta})^2 + 2\tilde{\beta} \text{ctg} \theta - \frac{\tilde{\beta}}{2} \right], \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_2^2 &= \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} \left[\alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] + \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2r^2} \left[\tilde{\beta} + (\tilde{\beta})^2 - \tilde{\beta} \text{ctg} \theta - \frac{\tilde{\beta}}{2} \right], \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_3^3 &= \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} \left[\alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] + \frac{1}{2} e^{-\alpha-\beta} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - \frac{1}{2r^2} \left(\tilde{\beta} - \tilde{\beta} \text{ctg} \theta + \frac{\tilde{\beta}}{2} \right), \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_0^1 &= -e^{-\alpha-\beta} \frac{\dot{\alpha}}{r}, \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_0^2 = 0, \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_1^2 = -\frac{2\tilde{\beta}}{r^3} \end{aligned} \quad (5)$$

Значком $\tilde{}$ (тильда) обозначается производная по θ , точка обозначает производную по x^0 . Как показано в [5], можно без ограничения общности положить $\beta = 0$.

При этом мы используем калибровку $A_0 = 0$. Для разделения переменных наложим дополнительное условие: $\lambda = \alpha(r, t) + \beta(\theta)$, $\nu = -\alpha(r, t) + \beta(\theta)$. Опуская детали, приведем окончательный вид компонент тензора T_l^k :

Выразим также компоненты тензора энергии-импульса T_k^i через решения уравнений Максвелла $F_{0l} = \Psi(r, x^0) \Phi(\theta)$, $\Phi(\theta) = P_l(\cos \theta)$ – полином Лежандра порядка l [1]:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi K}{c^4} T_0^0 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ \frac{1}{2} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[\frac{1}{2r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{r^2}{2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^1 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ \frac{1}{2} e^{-2\beta} \Psi^2 - \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[\frac{1}{2r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{r^2}{2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_2^2 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[\frac{1}{2r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 - \frac{r^2}{2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_3^3 &= \frac{2K}{c^4} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2\beta} \Psi^2 + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \left[-\frac{1}{2r^2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + \frac{r^2}{2} e^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right)^2 \right] \right\} \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_0^1 &= -\frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\alpha-\beta}}{[l(l+1)]^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right) \Phi^2, \quad \frac{8\pi K}{c^4} T_0^2 = \frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\beta}}{l(l+1)} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \cdot \Phi^2, \\ \frac{8\pi K}{c^4} T_1^2 &= \frac{2K}{c^4} \frac{e^{-\beta}}{l(l+1)} \frac{\Psi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Psi) \cdot \Phi^2. \end{aligned} \quad (6)$$

В соответствии с [5] правые части уравнений (6) усреднялись по углу θ . Кроме того, они для волновых решений усреднялись по времени [5]. Для неволновых решений процедура усреднения по времени не имеет смысла. Рассмотрим

в первую очередь три последних уравнения: для T_0^1, T_0^2 и T_1^2 . Заметим, что у них, за исключением уравнения для T_0^1 , правые части имеют порядок $\sim r_s^2/r^2 \ll 1$, где $r_s^2 = K \langle f \rangle^2 / 2c^4$, $\langle f \rangle$ – порядок величины решения, $f = r^2 \Psi$. Поэтому на расстояниях порядка длины световой волны правые части уравнений можно опустить (подробности см. в [3]). Это согласуется с уравнениями для T_0^2 и T_1^2 (5), если $\tilde{\beta} = 0$. Уравнение для T_0^1 (6) используем для нахождения α .

² Решение задачи для волны M -типа не требует отдельного рассмотрения, поскольку перестановочная двойственность уравнений Максвелла, т.е. инвариантность относительно преобразования $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, распространяется и на уравнения Максвелла–Эйнштейна из-за того, что тензор энергии импульса T_{ik} остается при этом инвариантным.



2. Решение уравнений

Решение уравнений (5) и (6) для волн и инстантонов было проведено в [5]. Были получены выражения для метрики, полей и евклидова действия, которые имели асимптотическую точность:

$$\frac{2K}{c^4} \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Psi \right)^2 + e^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} r^2 \Psi \right)^2 \right] = \frac{e^{\beta} [l(l+1)]^2}{\Phi^2} \left[\tilde{\beta} + 2\tilde{\beta}^2 + \tilde{\beta} \left(ctg\theta + \frac{1}{4} \right) \right] = A, \quad (7)$$

где A – постоянная, равная нулю [5]. Это приводит к условию

$$e^{\alpha} = \pm c \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)^{-1}; \quad f = r^2 \Psi, \quad \tau = \frac{y^0}{c}. \quad (8)$$

Знаки \pm здесь и далее соответствуют разным вакуумам теории, расположенным при $\tau \rightarrow \pm \infty$. Используя (8), интересующие нас уравнения можно записать в виде уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= \frac{K}{c^4} \frac{f^2}{r^4}, \\ \frac{1}{2} e^{-\alpha} \left[\alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] - \frac{1}{2} e^{\alpha} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) &= \\ = -\frac{2K}{c^4} \left\{ \frac{f^2}{2r^4} + \frac{1}{[l(l+1)]^2} \frac{e^{\alpha}}{r^2} (\dot{f})^2 \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

точка здесь и ниже означает производную по y^0 ; уравнения Максвелла:

$$f'' + e^{2\alpha} \ddot{f} - e^{\alpha} \frac{l(l+1)}{r^2} f = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим уравнения (9). Они совместны при выполнении условия

$$e^{\alpha} (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) \mp \frac{2\dot{\alpha}}{r} = \frac{K}{c^4} \frac{1}{r^3} \frac{df^2}{dr}. \quad (11)$$

Условие (11) позволяет переписать уравнения (9) в виде

$$-e^{-\alpha} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{K}{c^4} \frac{f^2}{r^4},$$

$$e^{-\alpha} \left[\alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] = -\frac{2K}{c^4} \left[\frac{f^2}{2r^4} + \frac{1}{r^3} \frac{df^2}{dr} \right]. \quad (12)$$

Решить эти уравнения весьма затруднительно даже численно. Поэтому нас будет интересовать в основном асимптотика их решений на расстояниях порядка длины световой волны (и более). Заметим, что их правые части имеют порядок $\sim r_s^2/r^2 \ll 1$ и их можно опустить с принятой точностью. Тогда уравнения Эйнштейна сводятся к одному уравнению, в качестве которого можно взять любое из них. Их решение соответствует

они верны для $r > r_c = cl(l+1)/\omega$. В работе [3] было уточнено выражение для метрики. Настоящая работа посвящена подробному исследованию инстантонов уравнений МЭ. Для них из (5) и (6) может быть получено соотношение

метрике в пространстве, свободном от материи, и хорошо известно

$$e^{\alpha} \approx 1 + \frac{\text{const}}{r}, \quad (13)$$

где значение постоянной const предстоит определить. Кроме того, в этой асимптотике уравнения (10) и (11) имеют автомодельные решения, зависящие от $z = c\tau/r$. Для таких решений вместо (11) получим уравнение

$$\sigma'' \mp 2 \frac{\sigma'}{\sigma} = 0, \quad \sigma = e^{\alpha}, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dz}. \quad (14)$$

Уравнение (14) легко интегрируется и приводит к выражению $Ei(\alpha) = \pm 2z$, где Ei – интегральная показательная функция. Используя известное разложение [6],

$$Ei(\alpha) = \ln|\alpha| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k \cdot k!},$$

мы можем получить выражение для метрики при больших значениях z :

$$e^{\alpha} \approx 1 + e^{-2|z|}, \quad (15)$$

что соответствует переходу между вакуумными состояниями с плоской метрикой, соответствующими наличию при $z \rightarrow -\infty$ сходящейся, а при $z \rightarrow +\infty$ расходящейся ЭМВ. Этот переход локализован по τ , область локализации имеет размер $\sim r/c$. Уравнения Эйнштейна также удовлетворены, поскольку «время» τ в них не фигурирует, а уравнение (14) имеет решение, представимое для малых z (большие r) в виде ряда

$$\begin{aligned} \sigma = e^{\alpha} &= 1 + \mu z - \mu z^2 + \frac{\mu(\mu+1)}{3} z^3 + \dots \approx 1 + \frac{\mu\tau}{r}, \\ \mu &= \sigma'(0). \end{aligned} \quad (16)$$

3. Псевдоевклидово действие

Вычислим действие в искривленном пространстве-времени [7]

$$\begin{aligned} S_f &= -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} \sqrt{-g} d\Omega, \\ d\Omega &= dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \\ \sqrt{-g} &= r^2 e^{\beta(\theta)} \sin\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Переходя к действию в псевдоевклидовом пространстве $A = iS_f$, $dx^0 = -icdt$, и учитывая со-



отношение (8) и нормировку $\Phi(\theta)$ [7], получим (для $\beta = 0$):

$$\Lambda = \frac{1}{4c^2} \int \left\{ \left(\frac{\partial A_r}{\partial \tau} \right)^2 \pm \frac{2r^2}{c[l(l+1)]^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \tau} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \tau^2} \right\} r^2 dr d\tau. \quad (18)$$

При этом учтено также, что в выражениях (4) A_θ может быть выражено через A_r [5]. Исследуем экстремумы Λ . Для этого вычислим вариацию Λ по A_r при условии обращения δA_r в нуль на границах области интегрирования и приравняем ее нулю. В результате получим:

$$\delta \Lambda = \frac{1}{2c^2} \int \delta A_r \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ A_r \pm \frac{r^2}{c[l(l+1)]^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \tau} \right\} r^2 dr d\tau = 0 \quad (19)$$

Ввиду произвольности δA_r , подынтегральное выражение в (19) равно нулю, что дает уравнение инстантона:

$$\frac{\partial A_r}{\partial \tau} \pm \frac{r^2}{c[l(l+1)]^2} \frac{\partial^3 A_r}{\partial r \partial \tau^2} = 0. \quad (20)$$

Оно приводится к уравнению

$$zY'' \mp [l(l+1)]^2 Y = 0, \quad (21)$$

$$Y = \frac{\partial A_r}{\partial \tau}, z = \frac{c\tau}{r}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Y(z) = \sqrt{z} Z_1(2l(l+1)\sqrt{\mp z}), \quad (22)$$

где Z_1 – цилиндрическая функция. В дальнейшем мы, однако, будем пользоваться другим решением уравнения (20), поскольку решение $Y(z)$ не обладает конечным действием. Вычисляя псевдоевклидово действие для инстантона $A_r^I(r, \tau)$, находим:

$$\Lambda(A_r^I) = \frac{3}{4c^2} \int \left(\frac{\partial A_r^I}{\partial \tau} \right)^2 r^2 dr d\tau > 0. \quad (23)$$

Действие должно вычисляться для классической траектории, начинающейся и заканчивающейся ($\tau \rightarrow \pm \infty$) в области, где пространство-время не искривлено, т.е., при $r \rightarrow \infty$, там, где поле ЭМВ стремится к нулю [8]. Среди множества решений уравнения (20), удовлетворяющих этому условию, выберем решение

$$\frac{\partial A_r^I}{\partial \tau} = cE \exp\left\{ \mp \omega \tau - \frac{c}{\omega} [l(l+1)]^2 \frac{1}{r} \right\}, \quad (24)$$

где E – некоторая постоянная, имеющая размерность напряженности электрического поля. Ее значение связано с так называемым топологическим зарядом инстантона:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A_r^I(r = \infty, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 2E \frac{c}{\omega}. \quad (25)$$

При вычислении интеграла в (25) использовано выражение (24)³. Важной особенностью решения (24) является то, что поле убывает при $r \rightarrow 0$, что согласуется с туннельной природой инстантона.

При вычислении псевдоевклидова действия для решения (24) во избежание расходимости интеграла в формуле (23) мы обрежем интеграл по dr на верхнем пределе на расстоянии r_0 , имеющем смысл размера инстантона, которое будет определено ниже. С учетом этого в результате вычислений (23) получим

$$\Lambda(A_r^I) = 6 \frac{E^2 r_c^3}{\omega} [l(l+1)]^3 K(l), \quad (26)$$

$$K(l) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^4} dx, x_0 = 2 \frac{r_c}{r_0} l(l+1).$$

Напомним, что действие $\Lambda(A_r^I)$ определяет вероятность w преобразования сходящейся ЭМВ в расходящуюся: $w \sim \exp(-\Lambda(A_r^I)/\hbar)$, $\hbar = \hbar/2\pi$, \hbar – постоянная Планка [2].

Величину r_0 найдем из условия сшивания метрик вне и внутри инстантона. Во внешней области метрика дается выражением [3]

$$e_{out}^\alpha = \left[1 - \frac{r_c}{r} + \left(\frac{r_s}{r} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (27)$$

Метрику во внутренней области найдем из формулы (8), куда подставим решение (24), учитывая, что $f = ir^2/c \partial A_r / \partial \tau$:

$$e_m^\alpha = \frac{2r_c}{r} \frac{1}{l(l+1)} + \left(\frac{r_c}{r} \right)^2. \quad (28)$$

Учитывая, что $r_s \ll r_c$, и оставляя в уравнении $e_{in}^\alpha = e_{out}^\alpha$ наиболее существенные члены, получим (с точностью до членов $\sim [l(l+1)]^{-1}$):

$$r_0 = r_c \left[1 - \frac{2}{3l(l+1)} \right]^{-1}. \quad (29)$$

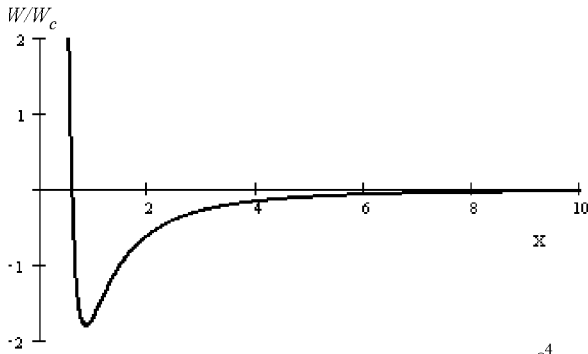
Вычислим с помощью (5) для метрики (28) величину $R^{00} = \frac{8\pi K}{c^4} T^{00}$, где $T^{00} = W$ – плотность энергии поля инстантона:

$$R^{00} = g^{00} R_0^0 = e^\alpha \left[\frac{1}{r^2} + e^{-\alpha} \left(\frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \right]; e^\alpha = e_m^\alpha. \quad (30)$$

Результат расчета представлен на рисунке.

Расчет показал, что вблизи границы инстантона и волны, т.е. для $x \approx x_0$ ($r \approx r_0$) плотность энергии отрицательна. Расчет показал также, что величина $R_{00} < 0$ в достаточной широкой окрестности $x = x_0$ для всех l .

³ Обычно, интеграл в (25) нормируют на правую часть равенства, что приводит к значениям $Q = 1$ (инстантон) и $Q = -1$ (антиинстантон) [8].



Плотность энергии инстантона $W(x)$; $W_c = \frac{c^4}{8\pi k l_c^2}$, $x = r/r_c, l = 3$. Качественное поведение $W(x)$ сохраняется для любых l

Последнее обстоятельство существенно при решении вопроса о наличии сингулярностей, которое, как известно, опирается на факт $R_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta > 0$, где ξ – любой непространственноподобный 4-вектор⁴ [9]. Отсутствие сингулярностей, связанных с горизонтами метрики (27), видно и из выражения (28) и из рисунка. Единственной неустранимой сингулярностью является сингулярность при $x = 0$, где $W(x) \sim x^{-4}$.

4. Энергетическое рассмотрение проблемы инстантона

В процессе распространения ЭМВ часть ее энергии преобразуется в другие формы, например, в энергию гравитационных волн. Этот вопрос остался за рамками рассмотрения работ [3, 5].

В литературе имеются различные точки зрения на вопрос взаимодействия ЭМВ и гравитационных волн. В работе [10] утверждается, что процессы преобразования двух фотонов в гравитон (и обратные) запрещены законами сохранения. В то же время Дж. Уилер не исключал такой возможности [11]. В [12] эти процессы рассматриваются без лишних обсуждений. Данные разногласия могут быть преодолены, если рассматривать фотон-гравитонные процессы в присутствии статического гравитационного поля, создаваемого ЭМВ, которое снимает ограничения, налагаемые законами сохранения⁵. Оставляя этот вопрос для дальнейших публикаций, сделаем следующее замечание. Рассмотрим соотношение (8)

$$e^\alpha = \pm c \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x^0} \right)^{-1}; \quad f = r^2 \Psi, \quad \tau = i \frac{x^0}{c} \quad (31)$$

⁴ Для доказательства нарушения условия $R_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta > 0$ можно, например, взять $\xi(1, 0, 0, 0)$.

⁵ Подобно тому, как наличие внешнего постоянного поля снимает запрет на диаграммы с тремя свободными концами в квантовой электродинамике [13].

для инстантонов и аналогичное соотношение для волн

$$e^\alpha = \pm \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x^0} \right)^{-1}; \quad f = r^2 \Psi, \quad (31a)$$

связывающие метрику и поле инстантона или электромагнитной волны. Возьмем для определенности в (31) и (31a) знак «+». Используя уравнения Максвелла в искривленном пространстве-времени [7], приведем их к виду соответственно

$$e^{-\frac{\alpha}{2}} = 1 - i \int_r^\infty \frac{(\text{rot} \vec{H})_r}{\vec{E}_r} dr, \quad (32)$$

$$e^{-\frac{\alpha}{2}} = 1 - \int_r^\infty \frac{(\text{rot} \vec{H})_r}{\vec{E}_r} dr,$$

\vec{E}, \vec{H} – электрическое и магнитное поле инстантона или ЭМВ. Величина, стоящая под интегралом, с точностью до размерного коэффициента совпадает с проводимостью (роль плотности тока играет плотность тока смещения), значение которой вещественно для волны и мнимо для инстантона. Первое означает, что энергия необратимо переходит от ЭМВ в какую-то другую форму, связанную, скорее всего, с гравитационными волнами. Второе же указывает на обратимый характер передачи энергии от ЭМВ к инстантону с последующим возвратом к ЭМВ.

Представляет интерес вопрос, на каком этапе исследования произошло пренебрежение гравитационными волнами и какую роль они играют в рассматриваемой задаче. Если рассуждать по аналогии с задачей о гравитационном коллапсе несферического тела, то можно предположить, что излучение гравитационных волн будет сопровождать процесс распространения сферической ЭМВ с отличным от нуля l , что, в конечном счете, и позволит говорить о сферически симметричной метрике для $l \neq 0$. Таким образом, использованное в настоящей работе, а также в работах [3, 5] усреднение тензора T_i^k (6) по углу θ как следствие привело к тому, что гравитационные волны остались вне рассмотрения.

Заключение

Настоящая работа посвящена исследованию роли инстантонов при рассмотрении динамики сферических электромагнитных волн с помощью уравнений Максвелла–Эйнштейна. Благодаря инстантонам сходящаяся волна может преобразоваться в расходящуюся, что обеспечивает передачу информации из прошлого в будущее.

Инстантоны уравнения Максвелла–Эйнштейна описываются уравнением (20). В работе



рассмотрены два различных его решения – автомодельное, зависящее от $z = ct/r$ (уравнение (22)), не обладающее конечным евклидовым действием, и решение (24) с метрикой (28), обладающее конечным действием $\Lambda(A_r^I)$ (уравнение (26)). Особенность первого решения связана с тем, что в мире, где оно могло бы реализоваться, прошлое отделено от будущего бесконечным барьером, т.е. там время не течет. Второе решение больше соответствует положению вещей в реальном мире – в нем прошлое переходит в будущее с некоторой конечной вероятностью $w \sim \exp(-\Lambda(A_r^I)/\hbar)$.

Полученный выше результат, заключающийся в нарушении инстантонами так называемого «слабого энергетического условия»⁶ $T_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta > 0$, где ξ – любой непространственноподобный 4-вектор, является важным при исследовании сингулярностей пространства-времени [9].

Заметим, что большинство работ по гравитационным инстантонам, доступных на ресурсе [14], посвящены классификации инстантонных решений уравнений Максвелла–Эйнштейна на многомерных римановых многообразиях и их приложениям к физике черных дыр.

Исследованию электродинамики с помощью уравнений Максвелла–Эйнштейна в евклидовом пространстве и, в частности, инстантонов посвящена работа [15].

Автор благодарен А. В. Прозоркевичу, проявлявшему при жизни интерес к работе.

Список литературы

1. *Hawking S. W.* Gravitational Instantons // *Phys. Lett.* 1977. Vol. A60. P. 81.
2. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / пер. с англ. ; под ред. О. А. Хрусталева. М. : Мир, 1985. 414 с.
3. *Зайко Ю. Н.* Проблема полноты передаваемой информации // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2013. Т. 13, вып. 2. С. 13–19.
4. *Шварц А. С.* Квантовая теория поля и топология. М. : Наука, 1989. 400 с.
5. *Зайко Ю. Н.* Точные решения уравнений Максвелла–Эйнштейна // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2010. Т. 10, вып. 1. С. 50–58.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М. : Наука, 1981. 798 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : в 10 т. Т. 2. Теория поля, ч. 1; изд. 5-е. М. : Физматлит, 1967. 460 с.
8. *Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.* Инстантонная азбука // *УФН.* 1982. Т. 136, № 4. С. 553–591.
9. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени / пер. с англ. ; под ред. Я. А. Смородинского. М. : Мир, 1977. 431 с.
10. *Вебер Дж.* Гравитация и свет // *Гравитация и относительность* / пер. с англ. ; под ред. А. З. Петрова. М. : Мир, 1965. С. 374–387.
11. *Уилер Дж.* Гравитация как геометрия // *Гравитация и относительность* / пер. с англ. ; под ред. А. З. Петрова. М. : Мир, 1965. С. 141–178.
12. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд. М. : Наука, 1971. 484 с.
13. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Пятаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория. М. : Наука, 1968. 480 с.
14. Cornell University Library. URL: <http://arxiv.org>.
15. *Brill D.* Euclidean Maxwell-Einstein Theory. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9209009v1>.

⁶В силу уравнений Эйнштейна и нулевого следа тензора энергии-импульса электромагнитного поля $T_{\alpha\beta} \sim R_{\alpha\beta}$.