



## ФИЗИКА

УДК 537.874

### ИСТОРИЯ ОДНОГО «АРТЕФАКТА»

Ю. Н. Зайко

Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина –  
филиал РАНХ и ГС при Президенте РФ, Саратов  
E-mail: zyrnick@rambler.ru

Изложена история открытия быстрых осцилляций амплитуды и мгновенной частоты сигналов, распространяющихся в дисперсионной линии передачи (среде). Выделены три периода: первый – от их обнаружения в численных расчетах в 60-х гг. XX в., второй, связанный с критикой этого явления и забвением вплоть до последнего десятилетия XX в., и третий, начавшийся в конце XX в., продолжающийся по настоящее время и связанный с его открытым обсуждением. Изложена критика теории аналитического сигнала. Представлены некоторые результаты, не публиковавшиеся ранее.

**Ключевые слова:** сигнал, амплитуда, фаза, частота.

#### A History of One «Artefact»

Yu. N. Zayko

A history of the phenomenon of fast oscillations of amplitude and momentary frequency of a signal (pulse) propagating in dispersive media is presented. This history is divided on three periods: first, from its discovery in 60-th of XX Century, second, its oblivion up to the end of XX C., and third – its open discussion from the end of XX C. to present days. A theory of the analytical signal is critically discussed. Some unpublished results are presented.

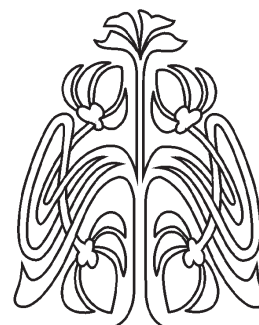
**Key words:** signal, amplitude, phase, frequency.

#### Введение

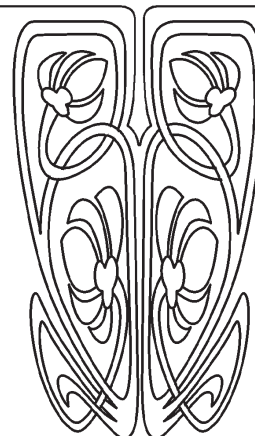
В середине XX века, как известно, была холодная война. Правительства и военные стран-победительниц во Второй мировой войне готовились к новой войне, которая должна была, по их мнению, окончательно решить вопрос о мировом господстве. Было создано оружие, способное стать козырем в предстоящих боевых действиях, однако наличие такого оружия у предполагаемого противника впервые за всю мировую историю явилось сдерживающим фактором, не позволяющим нанести первый удар.

В этих условиях ученые всех стран так или иначе причастные к оборонным разработкам были заняты изысканием дополнительных средств, способных повлиять на исход противостояния. К числу таких средств относилась дальняя радиолокация как средство раннего оповещения и предупреждения внезапного нападения противника. Кроме того, продолжались работы по совершенствованию систем радионавигации<sup>1</sup>. Проводились подобные исследования и в СССР, ни в чем не желавшем уступить противнику.

<sup>1</sup> Работы [1–3] проводились в рамках проекта по созданию радионавигационных систем наземного базирования (станции типа LORAN-C, советский аналог – ЧАЙКА) – предшественниц современных GPS и ГЛОНАСС, широко использовавшихся США и Великобританией в годы Второй мировой войны.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





В этих исследованиях особую роль отводили численному моделированию распространения радиолокационного сигнала на ЭВМ, появившихся недавно и оказывающих немалую помощь в достижении поставленной цели. Несмотря на то, что основополагающие работы в данной области относились к началу века [4, 5] и основные теоретические результаты были уже получены, до применения их на практике было далеко. На первых порах решение задачи раннего обнаружения связывалось с так называемым предвестником – частью электромагнитного импульса, опережающей основной сигнал. Однако затем, возможно, в связи с тем, что предвестник не оправдал возлагавшихся на него надежд, стали уделять больше внимания исследованию остальных частей сигнала. Эту ситуацию образно охарактеризовал Л. А. Вайнштейн, сравнив предвестник с москвой, отвлекающей внимание от слона – основного сигнала [6].

В исследовании распределения параметров сигнала (импульса) – частоты, волнового числа и амплитуды – большие надежды возлагались на точные аналитические методы и, в первую очередь, на точное решение задачи о распространении разрывного решения, описывающего фронт импульса для характерного волнового закона дисперсии<sup>2</sup>, полученное П. И. Кузнецовым и Р. В. Хохловым в конце 1940-х гг. [7–9]. Были сделаны попытки использовать это решение [10], но они не дали новых результатов по сравнению с подходом, не использовавшим вышеупомянутый результат [11]. В частности, как те, так и другие предсказывали монотонное возрастание частоты и волнового числа на переднем фронте импульса, что связано с характером дисперсии.

В то время мало кто обратил внимание на некий, показавшийся побочным, результат численных исследований, которые предсказывали осцилляции отмеченных параметров [1, 2], в первую очередь, амплитуды импульса. Возможно даже, что в поисках предвестника, его просто не заметили<sup>3</sup>. Этот результат явно противоречил результатам, упомянутым выше. Ведь в силу наличия инварианта  $a^2 d\varphi/dt$  ( $a$  – амплитуда,  $\varphi$  – фаза сигнала) [12] осцилляции амплитуды связаны с осцилляциями частоты<sup>4</sup>. Так или иначе, к этому

<sup>2</sup> Дело в том, что распространение волн во многих средах, например, плазме, в том числе атмосферной, описываются тем же (или близким к нему) законом дисперсии, что и в волноводе.

<sup>3</sup> Вновь о нем упомянул Ю. П. Вербин спустя почти тридцать лет [3].

<sup>4</sup> То, что в [12] речь идет о колебаниях, а не о волнах, сути дела не меняет.

результату никто серьезно не отнесся и, объяснив его тем, что «длительности и мощности переходных процессов внутри  $Re[f(t)]$  и  $Im[f(t)]$ »<sup>5</sup> существенно различаются ... из-за существенно разного соотношения между низкочастотными и высокочастотными составляющими в их текущих спектрах» [3], о нем забыли<sup>6</sup>.

Поскольку дальнейшее изложение касается именно этого, на первый взгляд, незначительного результата, на нем стоит остановиться подробнее. Отметим его главные особенности. Первая особенность заключается в том, что он лежит на поверхности и мимо него пройти невозможно ни одному исследователю. Вторая особенность – в том, что он своевременно не получил ни должного объяснения, ни развития. Это можно объяснить по-разному. Далее предлагается версия автора, на протяжении ряда лет с конца 1970-х гг. занимавшегося этим вопросом.

На протяжении десятков лет с момента открытия этого явления в 60-х гг. XX в. и до недавнего времени никаких публикаций (за исключением работ автора) на эту тему не было, точнее, почти не было<sup>7</sup>. Указанные годы были отмечены необычайной активностью в развитии<sup>8</sup> в СССР концепции так называемого аналитического сигнала, который Л. А. Вайнштейн и Д. Е. Вакман в своих работах [19–22]<sup>9</sup> выдвигали на роль основного инструмента в исследованиях колебательных и волновых процессов. С точки зрения аналитического сигнала никаких высокочастотных осцилляций волновых параметров сигнала (импульса) нет в принципе. В результате многие факты, полученные в рамках примене-

<sup>5</sup>  $f(t)$  – комплексный сигнал.

<sup>6</sup> Д. Е. Вакман упоминает в [19] ошибочные утверждения некоторых авторов о том, что осциллирующие квадратурные параметры использовал Ван дер Поль.

<sup>7</sup> В последнее время на эту тему стал писать Г. М. Стрелков [13–15]. Кроме того, в 1989 г. появилась работа [16]. Стоит еще упомянуть работы А. Б. Шварцбурга [17, 18]. Большинство же авторов, публиковавшихся ранее, в 1970-е и 1980-е гг. упоминали о высокочастотных осцилляциях в колебательных (не волновых) задачах, и их результаты получили негативную оценку в [19, 20]. Особо следует отметить работу Д. Е. Вакмана [19]. Здесь, как и в статье [20], осцилляции амплитуды колебаний на удвоенной частоте несущей отмечались как нефизические, абсурдные с технической точки зрения. Однако автор показал лишь, что в амплитуду можно ввести дополнительные гармоники без изменения самого сигнала. Вопрос о том, как убрать их из амплитуды, в общем случае им не рассматривался (см. Приложение).

<sup>8</sup> Точнее, популяризации.

<sup>9</sup> Это и понятно, поскольку аналитический сигнал, введенный Д. Габором, представлял собой математический прием, позволяющий исключить (т. е. заменить) усреднение по времени для определения квадратичных характеристик сигнала [23].



ния методов комплексного анализа, называемых Л. А. Вайнштейном и Д. Е. Вакманом теорией «комплексного сигнала», объявлялись артефактами<sup>10</sup> и приписывались «недостаткам» последнего.

## 2. Аналитический сигнал

Аналитический сигнал (АС) появился как средство практической радиотехники и оптики. Представляется сомнительным, чтобы его создатель или изобретатель Д. Габор видел в нем замену или конкурента так называемому комплексному сигналу<sup>11</sup> (КС), который есть инструмент обычного комплексного анализа применительно к задаче о распространении волн. Ввиду того, что авторы [19–22] противопоставляют АС и КС, стоит коротко остановиться на сравнительном анализе их свойств. Если следовать [20, 21], то он сводится к следующему.

1. КС неоднозначен, т. е. по его вещественной части нельзя однозначно определить мнимую, и наоборот. В то же время вещественная и мнимая части АС связаны с помощью преобразования Гильберта. Это способствует однозначному определению таких параметров сигнала (сигнала вообще и АС и КС), как амплитуда, фаза и частота (АФЧ) [20]. Все это так, и все было бы хорошо, если бы не два обстоятельства. Первое связано с тем, что АС тоже неоднозначен. Действительно, если добавить постоянную к вещественной (мнимой) части АС, то, поскольку результатом преобразования Гильберта постоянной является нуль, мы получим ту же мнимую (вещественную) часть, что и ранее, без добавления постоянной. Налицо неоднозначность<sup>12</sup>.

Второе. Неоднозначность определения АФЧ без привлечения АС связана с неоднозначностью разделения заданной функции  $f(t)$  на амплитудную и осциллирующую части  $a(t)\cos(\varphi(t))$  [20]. Но в работах, посвященных распространению импульсов в диспергирующих средах, о которых речь идет ниже, функция  $f(t)$  уже задана в виде  $a(t)\cos(\varphi(t))$ , и разделения не требуется.

2. «Во многих случаях необходима медленность, плавность функций  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ ... Однако

<sup>10</sup> Такой точки зрения придерживался, например, А. Ф. Голубенцев (1933–2003).

<sup>11</sup> Сам термин «комплексный сигнал», по-видимому, появился только в связи с аналитическим сигналом и использовался только в работах Л. А. Вайнштейна и Д. Е. Вакмана.

<sup>12</sup> Это рассуждение не проходит, точнее, из него следует равенство постоянной нулю, если учесть [24], что среднее значение АС по времени равно нулю. Этот результат доказан в [24] для случайных процессов, но легко переносится и на детерминированные процессы. Но это же и ограничивает область применимости АС.

АФЧ, определяемые при этом, осмыслены только в рамках метода усреднения и не имеют более широкого значения... Для *любого* узкополосного колебания функции  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ <sup>13</sup> содержат быстрые компоненты частоты  $2\omega$  и потому не являются медленными (по сравнению с  $\cos(\omega t)$  или  $\sin(\omega t)$ ) [20]. Это утверждение явно тенденциозно и связано с допущением, что все проявления волновых и колебательных явлений связаны с процедурой усреднения. Между тем это не так. Например, интерференция двух плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу, приводит к модуляции интенсивности с периодом, равным половине длины волны интерферирующих волн [25]. Усреднение просто уничтожит результат интерференции.

3. «...АФЧ ... имеют интегральный характер, т. е. характеризуют колебательный процесс в некотором временном интервале, более строго – на всей временной оси при  $-\infty < t < \infty$ » [20]. Этому свойству удовлетворяет именно АС. «Интегральный характер АФЧ находит отражение в преобразовании Гильберта, где интегрирование выполняется по всей оси времени» [20]. Однако это же ведет и к нарушению причинности, что немедленно сказывается на свойствах АС в приложениях. Оно проявляется в наличии предвестника уже при  $z = 0$  для импульсов с разрывной огибающей [22]. Предложение «...лучше не рассматривать чрезмерно идеализированных физических сигналов» [22] нельзя считать обоснованным<sup>14</sup>.

4. АС позволяет стандартным образом определить АФЧ для большинства колебательных (в меньшей степени, волновых) явлений в радиотехнических приборах и описать процессы в них как классические, так и квантовые. Успехи АС столь впечатляют, что в [21] сказано: «...радиотехнические устройства, составляющие сложную радиотехническую систему, de facto научились понимать друг друга, используя универсальные АФЧ, определенные с помощью преобразований Гильберта». Представляется малообоснованным в погоне за универсальностью жертвовать основными физическими принципами (причинностью) и если речь идет о расчетах – точностью.

## 3. Комплексный сигнал

Поскольку КС, как и комплексный анализ, не нуждается в подробном описании, мы остановимся на специфике задач, рассмотренных ниже,

<sup>13</sup> Полученные без применения АС [20].

<sup>14</sup> Это равносильно предложению не суммировать в ряду  $\sin x + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \dots$ , который сходится к ступенчатой функции, слишком много членов.



решение которых основано на использовании КС. Речь пойдет о задачах, связанных с распространением волн в диспергирующих средах. Если в задачах, связанных с возбуждением, приемом, детектированием, модуляцией и другими чисто практическими вопросами КС, возможно, и уступает АС, то в вопросах распространения он обладает явным преимуществом перед ним, о чем уже было сказано выше. Дальнейшее изложение посвящено в основном исследованию упомянутого выше явления (не «артефакта»!) осцилляций волновых параметров: амплитуды и мгновенной частоты (МЧ) (мгновенного волнового числа (МВЧ)) с помощью теории КС. При этом основным (хотя и не единственным) инструментом исследования является интеграл Фурье в комплексной плоскости. С его помощью выводится выражение для функции Грина (вещественной), удовлетворяющей условию причинности [6]. В основном изложение будет следовать работам автора<sup>15</sup>. Кроме аппарата Фурье используются и другие методы. Это является, с одной стороны, следствием желания отказаться от использования якобы «плохого» инструмента<sup>16</sup>, а с другой – придает полученным результатам большую убедительность.

#### 4. Основные результаты

Первой работой, в которой были обнаружены осцилляции МЧ (а, фактически, повторены результаты [1, 2]), была работа [26]<sup>17</sup>. В ней с помощью теории КС численно на основе программы [27] исследовалась граничная задача о прохождении прямоугольного радиоимпульса волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе без затухания. Основное внимание было уделено анализу амплитуды и МЧ на фронтах и в основной области импульса. Уравнения, определяющие эти параметры, не отличались от тех, с помощью которых они определяются в теории АС и на практике [20]. Были обнаружены осцилляции этих параметров, не получившие к тому времени удовлетворительного объяснения ни в работах [9, 10], ни в работах автора того времени. «Объяснение» осцилляций, данное в работе [11], уже было приведено выше. Интересно, что в работе [17], посвященной аналитическому

исследованию распространения импульсов в диспергирующих средах, было сказано следующее: «...промежутки времени между точками пересечения нуля огибающими гармоник как электрического, так и магнитного поля неравны, т.е. составляющие переменного поля... непериодичны», что, по сути дела, является словесным описанием тех же осцилляций. На рис. 1 показаны результаты расчета параметров импульса по методу, изложенному в [26]. Явно прослеживаются осцилляции МЧ на частоте, близкой к удвоенной частоте несущей импульса, упомянутые в [19, 20].

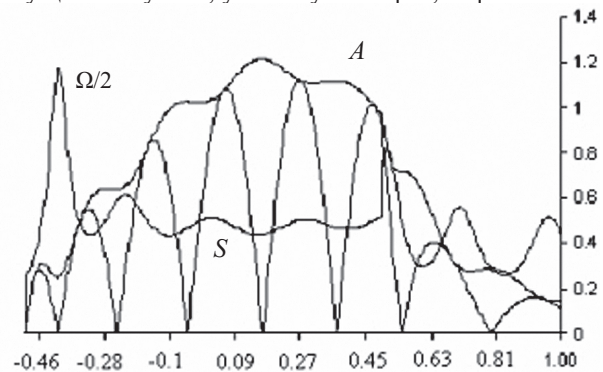


Рис 1. Результаты расчета искажения радиоимпульса с прямоугольной огибающей при  $z = 0$ ; параметры импульса:  $T_0\omega_0/2\pi = 2.5$ ,  $\omega_0/\omega_c = 2$ ,  $z/cT_0 = 1$ ;  $S$  – сигнал (показаны оба полупериода),  $A$  – амплитуда,  $\Omega$  – мгновенная частота.  $T_0$  – длительность импульса,  $\omega_0$  – несущая частота,  $\omega_c$  – частота отсечки,  $z$  – расстояние,  $c$  – скорость света. По оси абсцисс отложено  $(t - z/c)/T_0$ ,  $t$  – время

Выше в качестве примера волнового явления, для описания которого не требуется процедуры усреднения, приводилась интерференция двух встречных плоских волн. Можно предположить, что в основе описываемых осцилляций МЧ лежит интерференция спектрально узких составляющих импульса между собой. В дальнейшем точка зрения на искажение радиоимпульса как результат их взаимодействия получила развитие в других работах автора.

В работе [28] эти результаты применялись для оценки погрешности частотных измерений при распространении сигналов в волноведущих структурах с дисперсией. Интересным с точки зрения настоящего рассмотрения в этой работе была аналогия между рассматриваемой задачей исследования поведения заполнения прямоугольного радиоимпульса и задачей о распаде начального разрыва в граничных условиях решения некоторого нелинейного уравнения, которое описывает эволюцию МЧ (или МВЧ) и которым при некоторых допущениях является уравнение Кортевега – де Вриза [29, 30]. Были выполнены

<sup>15</sup> Из всех работ других авторов, в которых так или иначе рассматривались осцилляции квадратурных компонент, упоминаются только работы, посвященные распространению импульсов. Быстрые осцилляции квадратурных компонент в колебательных задачах – отдельная история и у нее своя хронология (см., например, [19]).

<sup>16</sup> Дань времени.

<sup>17</sup> Впоследствии этот результат был получен также в работе [13] без привлечения КС.



численные расчеты поведения МЧ при малых и больших расстояниях и показано сходство обоих явлений.

В работе [31] численно изучалось распространение прямоугольного радиоимпульса (РИ) с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) заполнения в диспергирующей среде. Такая задача ранее рассматривалась только для РИ с гауссовой огибающей [3, 32]. С точки зрения распространения сигналов интересным является сжатие (компрессия) РИ с расстоянием до некоторой точки, называемой фокусом, с последующим расширением и изменением знака ЛЧМ. В настоящей работе дисперсия среды учитывалась в так называемом втором приближении теории дисперсии, т. е. волновое число  $k(\omega)$  ( $\omega$  – циклическая частота) разлагалось в ряд Тейлора вблизи несущей  $\omega_0$  до членов второго порядка. В этом случае выражение для КС с помощью интеграла Фурье приводится к хорошо известным интегралам Френеля [33]. Результаты подтвердили картину компрессии РИ и позволили выявить некоторые новые её черты по сравнению с гауссовым РИ. Кроме того, было подтверждено наличие осцилляций МЧ для прямоугольного РИ и в случае наличия ЛЧМ, в частности появление одиночных импульсов МЧ в областях фронтов РИ противоположной полярности<sup>18</sup>.

В работах [34, 35] для описания осцилляций МЧ сигналов, распространяющихся в диспергирующих средах, были применены методы, использующие понятие геометрической фазы, или фазы Берри [36]. Было предложено геометрическое описание модуляционных явлений в диспергирующих средах, на основе использования аналога вектора Джонса в поляризационной оптике:

$$\mu = \begin{pmatrix} a(z, t) \\ b(z, t) \end{pmatrix},$$

который описывает модуляцию сигнала:  $f(z, t) = a(z, t)\cos(\omega t) + b(z, t)\sin(\omega t)$  в точке  $z$  среды в момент времени  $t$ . Было показано, что трансформация сигнала выглядит как вращение  $\mu(t)$  в фазовом пространстве, натянутом на вектора

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha t) \end{pmatrix}.$$

Эта геометрическая картина дополняется введением отображения фазового пространства на полусферу  $C_m$  с радиусом  $\rho_m$ :

$$a = \rho_m \sin \theta \cos \varphi, \quad b = \rho_m \sin \theta \sin \varphi, \quad \rho^2 = a^2 + b^2, \\ \rho_m = \max_{\{i\}} \rho(t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

<sup>18</sup> Эти результаты были также получены в работах [14, 15] иным методом. Очевидно, их авторы не знали о работе [31].

Было показано, что геометрический вклад в фазу равен нулю и в силу этого отображение фазового пространства на полусферу допускает траектории на этой полусфере, описываемые концом вектора  $\mu(t)$  в виде замкнутых контуров, не охватывающих полярную ось  $\theta = 0$ , что и влечет осциллирующее поведение фазы и МЧ.

В работе [37] было предложено объяснение осцилляций волновых параметров: МЧ и МВЧ на основе нового явления – осцилляций римановых инвариантов системы уравнений нелинейной геометрической оптики (НГО):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_g \cdot \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_g \cdot E_k) = 0, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число,  $v_g = \partial \omega / \partial k$  – групповая скорость,  $\omega$  – частота,  $E_k \sim a_k^2$  – спектральная плотность энергии,  $a_k$  – амплитуда спектрально-узкого волнового пакета;  $t, x$  – время и координата. В линейном случае  $\omega = \omega_0(k)$  система (1) «почти» гиперболическая, так как обладает одной дважды вырожденной характеристикой  $dx/dt = v_g$ , вдоль которой сохраняется  $k(x, t) = I_1$  – первый инвариант Римана [38]. При учёте в разложении  $\omega = \omega(k, a)$  по амплитуде квадратичных членов характеристики расщепляются в соответствии с выражением [38]

$$\omega = \omega_0(k) + \sigma \cdot a^2 + \dots, \\ \frac{dx}{dt} = v_g(k) \pm [\sigma \cdot v'_g(k)]^{1/2} \cdot a, \quad (2)$$

и можно говорить о втором инварианте Римана  $I_2 \sim a^2$  [38].

Уравнения (1) используются как хорошее приближение для описания многих систем, допускающих распространение волн [38]. Уравнения НГО интегрируются на плоскости  $x, t$  (координата – время) методом характеристик [38] вплоть до точки, соответствующей так называемому пересечению характеристик, соответствующих разным начальным значениям  $k(x, t = 0)$ , за которой метод характеристик неприменим.

Однако, как было показано в [37, 39], при учёте в разложении  $\omega_{i,j} = \omega_0(k_{i,j}) + \sigma_{i,j} \cdot a_{i,j}^2 + \mu_{i,j} \cdot a_i^2 \cdot a_j^2 + \dots$  членов четвёртого порядка, отвечающих взаимодействию  $i$ -го и  $j$ -го спектрально-узких волновых пакетов, составляющих импульс, друг с другом, характеристики не пересекаются, и, следовательно, решение задачи Коши о распространении импульса можно строить обычными методами, учитывая сложный характер пове-



дения характеристик системы (1), отвечающих множеству спектрально-узких волновых пакетов, формирующих импульс.

Поведение характеристик системы (1) вблизи упомянутых точек (следуя традиции, будем называть их точками пересечения) зависит от того, «пересекаются» ли характеристики, соответствующие одинаковым или разным инвариантам Римана. Для случая одинаковых инвариантов воспользуемся понятием трубки тока, заимствованным из гидродинамики [40]. Рассмотрим две характеристики, соответствующие значениям  $k_1$  и  $k_2$ , между которыми сосредоточена основная энергия волнового пакета. Это достаточно просто сделать для импульса гауссовой формы. Как показано в [40], основная энергия импульса распространяется, оставаясь внутри указанных характеристик, что и даёт основание воспользоваться гидродинамической аналогией. Если начальный импульс был модулирован по частоте или волновому числу, то вышеупомянутые характеристики будут сближаться до точки максимального сближения (фокуса), после чего станут расходиться. Эта картина описывает хорошо известный процесс сжатия гауссова импульса с линейной модуляцией заполнения. Она же согласуется с характером поведения характеристик (1), обнаруженным в [37].

Оказывается, что гидродинамическая аналогия помогает объяснить характер искажения импульсов и более сложной, например прямоугольной, формы. Как отмечалось в [37], в этом случае характеристики, избегая пересечения друг с другом, ведут себя на плоскости  $x, t$  довольно сложным образом, что выглядит для внешнего наблюдателя, покоящегося или движущегося с постоянной относительно среды скоростью, как осцилляции инвариантов. Если воспользоваться понятием трубки тока, то, в отличие от гауссова импульса, соответствующего ламинарному характеру поведения характеристик, которые уместно считать аналогом линий тока, трубка тока прямоугольного импульса отвечает состоянию, напоминающему близкое к турбулентному состоянию жидкости: она имеет не один фокус, а несколько, в результате чего её сечение меняется немонотонно – сужение сменяется расширением, и наоборот. Это объясняется сложным поведением характеристик, вытекающим из результатов [37]. Такая качественная картина подтверждается рис. 2, где показано изменение длительности прямоугольного радиоимпульса с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) во втором приближении теории дисперсии.

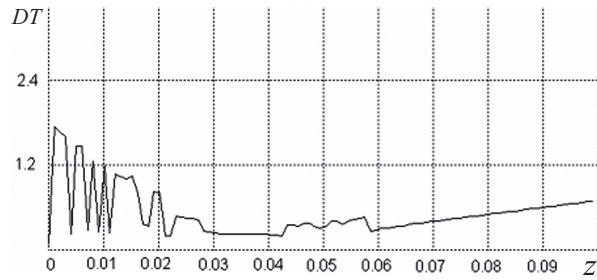


Рис. 2. Длительность импульса  $T$  в зависимости от расстояния, пройденного импульсом  $x$ , рассчитанная во втором приближении теории дисперсии. Форма импульса при  $x = 0 : f(0, t) = A(t) \exp(i\omega_0 t)$ ,  $A(t) = \exp(ib t^2)$  для  $|t| < T_0/2$ ,  $A(t) = 0$  для  $|t| > T_0/2$ ;  $\omega_0$  – несущая частота,  $T_0$  – начальная длительность импульса,  $b$  – параметр модуляции;  $z = x|k'(\omega_0)| / T_0^2$ ,  $DT = T/T_0$ . Параметры импульса:  $\omega_0 T_0/2\pi = 100$ ,  $bT_0^2 = 10$

Длительность определялась по некоторому уровню  $r$  амплитуды импульса от её максимального значения (в расчётах  $r = 0.5$ ). Как показали расчёты, величина  $r$  не влияет на качественную картину явления. На рис. 3 показана зависимость амплитуды импульса от времени в точке  $z = 0.051$ , где сечение трубки тока увеличилось.

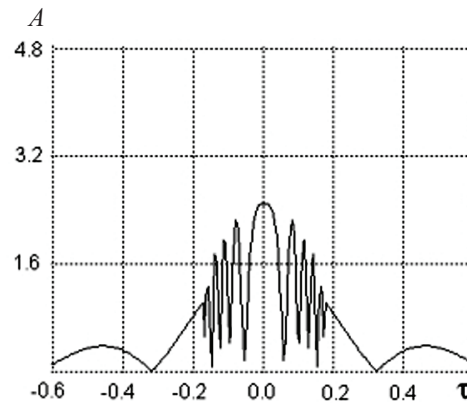


Рис. 3. Форма импульса в точке  $z = 0.051$ . Параметры импульса те же, что и на рис. 1;  $\tau = (t - xk'(\omega_0))/T_0$

Видно, что эффективная длительность импульса возросла за счёт роста побочных частей импульса, амплитуда которых обычно мала, до уровня, сравнимого с уровнем амплитуды основной части импульса. Осцилляции длительности в области меньших  $z$  связаны с тем, что импульс периодически разделяется на две симметричные половины, которые затем вновь сливаются. Результаты, представленные на рис. 2, 3, достаточно устойчивы по отношению к изменению временного шага и точности, с которой определялась длительность.

Если же речь идёт о «пересечении» характеристик, соответствующих разным инвариантам



(1), то здесь картина иная. Напомним, что в линейной теории волн пересечение таких характеристик лежит в основе доказательства существования и единственности решения задачи Коши для (1) и связано с возможностью из каждой точки плоскости  $x, t$  провести  $n$  различных характеристик; в нашем случае  $n = 2$ . Поэтому результат [37] не должен нарушать теоремы о существовании и единственности, а также должен отражать симметрию исходной системы относительно отражения времени.

Две изначально «пересекавшихся» характеристики, соответствующие максимальной и минимальной групповым скоростям спектрально-узких волновых пакетов, вблизи точки «пересечения»  $(x_0, t_0)$  распадаются на две ветви – нижнюю и верхнюю (ось  $x$  горизонтальна). Нижняя ветвь определяет на оси  $x$  область влияния, т. е. те значения  $x'$ , возмущения от которых могут достигать данной точки  $x_0$  в соответствии с волновым характером решений (1). Верхняя ветвь отделена от нижней интервалом  $\delta t$ , величина которого пропорциональна интенсивности взаимодействия спектрально-узких волновых пакетов, формирующих импульс. Интервал  $\delta t$  представляет минимальный интервал времени, который может быть измерен с помощью сигналов конкретной природы. В частности, нельзя получить импульсы с длительностью меньше, чем  $\delta t$ . Величину  $\delta t$  можно оценить как  $\sim \sigma^{1/2}/c$ , где  $\sigma$  – сечение фотон-фотонного рассеяния,  $c$  – скорость света (в среде).

В конце работы [39] было высказано предположение о том, что данные результаты могут иметь отношение к глобальной структуре пространства-времени. Хотя эти вопросы не имеют непосредственного отношения к основной теме статьи – осцилляциям волновых параметров, отметим некоторые особенности задачи, тем более что ее решение [41] имеет много общего с решением основной проблемы. В [41] исследовались решения совместной системы уравнений Максвелла и Эйнштейна, обладающие сферической симметрией. Было показано, что, как и в [39], не вся информация из прошлого, собираемая сходящейся волной, может быть передана в будущее. Передача всей информации требует бесконечного времени. Иными словами, гравитационное взаимодействие лучей, на которые разбивается сферическая волна и искривление пространства-времени, вызванное этим взаимодействием, имеют такое же действие на передачу информации, как и взаимодействие спектрально-узких составляющих импульса в нашей задаче [39].

## 5. Что еще можно сделать

Из нерешенных задач, которые непосредственно связаны с явлением осцилляции волновых параметров, можно назвать задачу о расплывании волнового пакета, построенного из решений уравнения Шредингера. Решение задачи Коши с начальными условиями при  $t = 0$  может быть получено в виде интеграла Фурье:

$$\Psi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) e^{-i\omega(k)t + ikz} dk,$$

$$\Psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z, 0) e^{-ikz} dz.$$

Здесь закон дисперсии  $\omega(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$ , где  $k$  – волновое число,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m$  – масса частицы,  $\omega = E/\hbar$ ,  $E$  – полная энергия состояния,  $\Psi$  – волновая функция частицы. Такой интеграл может быть выражен с помощью известных интегралов Френеля, упоминавшихся выше. Это соответствует решению задачи во втором приближении теории дисперсии. Решение в произвольный момент времени должно содержать осцилляции амплитуды волновой функции и волнового числа  $k$  вблизи значения  $k_0 = (2mE)^{1/2}/\hbar$ .

Другим явлением, возможно, имеющим отношение к рассматриваемому кругу вопросов, – процесс, точнее – процессы этногенеза, для описания которых Л. Н. Гумилев предложил использовать кривую пассионарности. Сам автор часто прибегал к физическим аналогиям для объяснения явлений этногенеза. В работе [42] он провел аналогию между процессами в этносоциальной системе и в такой сложной и нелинейной физической системе, какой является лазер. Любому, кто знаком с многочисленными работами Л. Н. Гумилева, бросается в глаза сходство его кривой пассионарности и кривыми, описывающими зависимость амплитуды импульса, расплывающегося под действием дисперсии в среде распространения. В частности, эти особенности можно объяснить, вводя представление о составляющих импульса<sup>19</sup> (выше они были названы узкополосными). Л. Н. Гумилев с соавт. пишет о том, что «...возникает несколько центров, борющихся между собой за преобладание...» [43]. Конечно, полной аналогии нет, но сходство явлений и их описаний налицо.

## Заключение

В целом по итогам работ, появившихся к настоящему времени, как автора статьи, так и

<sup>19</sup> Пассионарности.



других, можно заключить, что явление осцилляций волновых параметров является неотъемлемой характеристикой реальных сигналов, т. е. таких, которые описываются кусочно-аналитическими функциями и способны переносить информацию. Наличие осцилляций подтверждено разными методами. Как уже было сказано выше, это явление представляется временным аналогом пространственной интерференции встречных (в общем случае распространяющихся в одном направлении с разной скоростью) волн, при котором интерферируют спектрально-узкие составляющие импульса. Как уже говорилось выше, между обнаружением и исследованием этого явления прошло довольно большое время. Данный факт можно объяснять по-разному. К сожалению, формат настоящего издания не позволяет обсудить эту сторону вопроса<sup>20</sup>.

### Приложение

Покажем, что соображения Д. Е. Вакмана [19] если и помогают при некоторых условиях устранить быстрые осцилляции квадратурных компонент, то рожают новые проблемы. Напомним, что сигнал

$$u(t) = x(t)\cos t - y(t)\sin t, \quad (\text{П.1})$$

спектр которого заключен в полосе  $1 - \varepsilon < \omega < 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , может быть записан также в виде

$$u = (x + f_1 - f_1 \cos 2t + g_1 \sin 2t)\cos t - (y + g_2 + f_2 \sin 2t + g_2 \cos 2t)\sin t, \quad (\text{П.2})$$

причем  $f_1 = f_2$ ,  $g_1 = g_2$ . Здесь  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $f_{1,2}(t)$  и  $g_{1,2}(t)$  предполагаются медленными функциями по сравнению с осциллирующими множителями [19]. Это показывает, что если сигнал дан в виде (П.1), то в его квадратурные компоненты (и амплитуду, через которые она выражается) легко ввести гармоники на удвоенной частоте несущей и дополнительные медленные составляющие и, как следствие, подтверждает неоднозначность их определения. Однако, если сигнал уже имеет осциллирующие квадратурные компоненты, т. е. представлен в виде (П.2), то удалить их непросто. Действительно, если мы усредним их, то вместо (П.1) получим из (П.2)

$$ul(t) = (x + f_1)\cos t - (y + g_2)\sin t \quad (\text{П.3})$$

( $f_1$  и  $g_2$  – произвольные функции), что отличается от (П.1).

Какое отношение ко всему этому имеет аналитический сигнал? Ведь автор надеется с его

помощью устранить все противоречия, связанные с быстрыми осцилляциями. Он показывает, что, применяя АС к (П.1), можно получить те же выражения, что и на основе практического подхода, т. е. амплитуда  $a(t)$  и фаза  $\Phi(t)$  сигнала будут иметь вид

$$a(t) = \sqrt{x^2 + y^2}, \Phi(t) = t + \arctg \frac{y}{x}. \quad (\text{П.4})$$

Но здесь важно то, что  $x(t)$  и  $y(t)$  в (П.1) не содержат быстрых осцилляций и поэтому выносятся за знак преобразования Гильберта. В то же время применение АС к (П.2) даст аналогичный результат только при условии  $f_1 = f_2$ ,  $g_1 = g_2$ . То, что вычисления, выполненные на основе теории комплексного сигнала, обеспечивают его выполнение не очевидно.

Обычно, в результате вычислений сигнал получается именно в форме (П.2). Применение преобразования Гильберта к нему при невыполнении условий  $f_1 = f_2$ ,  $g_1 = g_2$  не позволит устранить высокочастотных осцилляций из квадратурных компонент, а при его выполнении устранил вместе с ними вполне допустимые с физической точки зрения составляющие  $f = f_{1,2}$  и  $g = g_{1,2}$ , которые невозможно отделить от  $x$  и  $y$  исходя из каких-либо практических соображений.

### Список литературы

1. Johler J. T. The propagation Time of a Radio Pulse // IEEE Trans. 1963. Vol. AP-11, № 6. P. 661–668.
2. Вербин Ю. П. Проблемы дифракции и распространения радиоволн. Л., 1969. Вып. 9. С. 118.
3. Вербин Ю. П. Об оценке скорости распространения радиосигнала // РЭ. 1995. Т. 40, № 8, С. 1169–1176.
4. Sommerfeld A. Uber die Fortpflanzung des Lichtes in Dispergierenden Medien // Ann. Phys. 1914. Vol. 44, № 10. P. 177–202.
5. Brillouine L. Uber die Fortpflanzung des Lichtes in Dispergierenden Medien // Ibid. P. 203–240.
6. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов // УФН. 1976. Т. 118, № 2. С. 339–367.
7. Кузнецов П. И. О представлении одного контурного интеграла // ПММ. 1947. Т. 11, № 2. С. 267–270.
8. Хохлов Р. В. О нестационарных процессах в волноводе // ДАН СССР. 1948. Т. 61, № 4. С. 637–640.
9. Хохлов Р. В. О нестационарных процессах в волноводе // Вестник МГУ. 1948. Т. 8. С. 49–62.
10. Вайслейб Ю. В., Ганн С. П. Распространение радиоимпульсов в регулярном одномодовом волноводе // Радиотехника. 1977. Т. 32, № 7. С. 42–50.
11. Карбовяк А. Е. Переходные процессы в волноводах // Волноводные линии передачи с малыми потерями / пер. с англ. под ред. В. Б. Штейншлейгера. М., 1960. 460 с.

<sup>20</sup> Полная версия статьи содержится в книге автора «Распространение и обработка информации». Изд-во: LAP Lambert Academic Publishing GmbH & Co KG, Saarbrücken, Germany, 2012. 98 с. (<https://www.ljubluknigi.ru/store/gb/book/Распространение-и-обработка-информации/isbn/978-3-8465-8488-0>).





12. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика / пер. с англ. под ред. Б. В. Чирикова. М., 1984. 529 с.
13. Стрелков Г. М. Распространение радиопульса в изотропной плазме // РЭ. 2006. Т. 51. С. 672–682.
14. Стрелков Г. М. Сложный радиосигнал в ионосферной плазме // РЭ. 2008. Т. 53, № 1. С. 1094–1103.
15. Стрелков Г. М., Нарышкин В. И. Распространение радиопульса с линейной частотной модуляцией в изотропной плазме // РЭ. 2008. Т. 53, № 1. С. 49–57.
16. Cizec V. V. Kinematische Theorie der Momentanfrequenz und Einholenden // AEU. 1989. Vol. 43, № 5. P. 288–291.
17. Шварцбург А. Б. Импульсная электродинамика негармонических сигналов // УФН. 1994. Т. 164, № 3. С. 333–335.
18. Шварцбург А. Б. Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах (точно решаемые модели) // УФН. 1998. Т. 168, № 1. С. 85–103.
19. Вакман Д. Е. О быстрых осцилляциях параметров колебаний // РЭ. 1986. Т. 31, № 7. С. 1459–1462.
20. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Амплитуда, фаза, частота – основные понятия теории колебаний // УФН. 1977. Т. 123, вып. 4. С. 657–682.
21. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М., 1983. 287 с.
22. Вайнштейн Л. А. Математические вопросы теории распространения волн // Препринт ИРЭ АН СССР. М., 1979. С. 6–87.
23. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики / пер. с англ. под ред. С. А. Ахманова. М., 1970. 430 с.
24. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. М., 1978. 494 с.
25. Степанов Н. С. Интерференция волн // Физическая энциклопедия : в 5 т. Т. 2. М., 1990. 704 с.
26. Зайко Ю. Н. Частотная модуляция заполнения радиопульса, распространяющегося в диспергирующей среде // Изв. вузов: Радиофизика. 1989. Т. 32, № 12. С. 1558–1560.
27. Зайко Ю. Н. Программа расчета искажений прямоугольного импульса, распространяющегося в волноводе // ЭТ. 1989. Сер. 1. Электроника СВЧ, № 8. С. 75–76.
28. Зайко Ю. Н. Оценка погрешности измерений спектральной частоты радиопульса в волноведущей структуре с дисперсией // ЭТ. 1990. Сер. 8, № 1(138). С. 66–67.
29. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973. 176 с.
30. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., 1980. 320 с.
31. Зайко Ю. Н., Межуев Д. И. Распространение прямоугольного радиопульса с ЛЧМ в диспергирующей среде // Письма в ЖТФ, 1991. Т. 17, № 17. С. 50–53.
32. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М., 1988. 310 с.
33. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967. 683 с.
34. Зайко Ю. Н. The Geometrical Phase of Modulated Waves, Propagating in Dispersive Media // Applied Math. Letters. 1997. Vol. 10, № 5. P. 75–78.
35. Зайко Ю. Н. The Features of Geometrical Phase of Modulated Wave Propagated in Plane Waveguide / Abstracts of «Nonlinear Dynamics and Chaos. Application in Physics, Biology and Medicine» (ICDN-96). Russia, July 8–14. Saratov, 1996. P. 188.
36. Винницкий С. И., Дербов В. Л., Дубовик В. М., Марковски Б. Л., Степановский Ю. П. Топологическая фаза в квантовой механике и поляризационной оптике // УФН. 1990. Т. 160, № 6. С. 1–49.
37. Зайко Ю. Н. «Осцилляции» римановых инвариантов систем дифференциальных гиперболических уравнений // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 19. С. 84–87.
38. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / пер. с англ. под ред. А. Б. Шабата. М., 1977. 622 с.
39. Зайко Ю. Н. Interaction of Narrow-Band Signal Components and Complex Behavior of PDE Characteristics in  $x, t$  – Plane // Proc. SPIE. 2006. Vol. 6165. P. i06.
40. Бхатнагар Б. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах / пер. с англ. П. Е. Краснушкина, Н. Р. Сибгатуллина. М., 1983. 136 с.
41. Зайко Ю. Н. Точные решения уравнений Максвелла-Эйнштейна // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. 2010. Т. 10. Сер. Физика, вып. 1. С. 50–58.
42. Гумилев Л., Ермолаев В. Ю. Проблемы предсказуемости в изучении процессов этногенеза // Пределы предсказуемости. М., 1997. 248 с.
43. Гумилев Л. Н. Конец и вновь начало. СПб., 2008. 352 с.