



РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 517.9: 514.853: 621.373

ОТ ДИНАМИКИ АНОСОВА НА ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ К ЭЛЕКТРОННОМУ ГЕНЕРАТОРУ ГРУБОГО ХАОСА

С. П. Кузнецов

Кузнецов Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН; профессор базовой кафедры динамических систем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения, Удмуртский государственный университет (Ижевск), spkuz@yandex.ru.

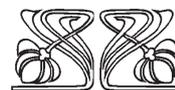
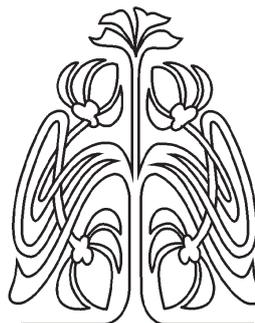
Отправляясь от задачи о геодезическом потоке на поверхности отрицательной кривизны, где реализуется хаотическая динамика Аносова, разработана электронная схема генератора грубого хаоса. Приводятся результаты исследований с помощью пакета схемотехнического моделирования NI Multisim, а также результаты численного решения уравнений, доставляющих разную степень точности описания динамики рассматриваемой системы. Представлены портреты аттракторов, временные зависимости генерируемых колебаний, показатели Ляпунова, спектры и продемонстрировано хорошее соответствие наблюдаемой динамики генератора хаоса с гиперболической динамикой Аносова исходного геодезического потока. С использованием критерия, основанного на статистике углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств векторов возмущения опорной фазовой траектории на аттракторе, показано, что гиперболическая природа динамики сохраняется при изменении параметров в некотором диапазоне.

Ключевые слова: динамическая система, хаос, аттрактор, гиперболичность, динамика Аносова, генератор хаоса, показатель Ляпунова, автоколебания, электронная схема, спектр.

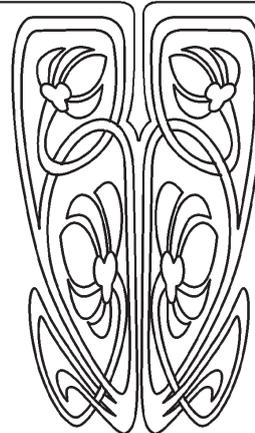
DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144

Введение

Гиперболическая теория – это раздел теории динамических систем, доставляющий строгое обоснование возможности хаотического поведения для детерминированных систем как с дискретным временем (итерируемые отображения – диффеоморфизмы), так и с непрерывным временем (потоки) [1–5]. Объектами исследования в ее рамках служат равномерно гиперболические инвариантные множества в фазовом пространстве, составленные исключительно из седловых траекторий. Для консервативных систем гиперболический хаос представлен динамикой Аносова, когда равномерно гиперболическое инвариантное множество занимает компактное фазовое пространство полностью (для диффеоморфизма) или отвечает поверхности постоянной энергии (для потока). Для диссипативных систем гиперболическая теория вводит в рассмотрение специальный тип притягивающих инвариантных множеств – равномерно гиперболические хаотические аттракторы.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Фундаментальный математический факт состоит в том, что равномерно гиперболические инвариантные множества обладают грубостью, или структурной устойчивостью, т.е. при небольших вариациях («шевелениях») системы характер динамики сохраняется с точностью до непрерывных замен переменных.

После того как Андронов и Понтрягин ввели понятие грубости, применимое изначально для систем с регулярной динамикой [6], в теории колебаний принято постулировать, что первоочередной теоретической и практической интерес должны представлять именно грубые системы, которые демонстрируют движения, качественно не меняющиеся при малой вариации параметров [7–9]. Данное положение представляется общим и убедительным, поэтому при переходе к рассмотрению систем со сложной динамикой можно было ожидать присутствия в них гиперболического хаоса во многих физических ситуациях как грубого феномена. Более того, именно такие системы должны быть интересны для приложений хаоса в силу нечувствительности функционирования к вариации параметров, погрешностям изготовления, помехам и т.п. [10–12].

Парадоксально, но рассмотрение многочисленных примеров сложной динамики, относящихся к разным областям науки, не оправдывает ожиданий касательно распространенности гиперболического хаоса. По замечанию Аносова, складывается «такое впечатление, будто Господь Бог предпочитает скорее пойти на некоторое ослабление гиперболичности, нежели возиться с ограничениями на топологию аттрактора, возникающими при его настоящей (полной и равномерной) гиперболичности образаца 60-х годов» [13, с. 16]. Поэтому гиперболическую динамику стали рассматривать по большей части лишь как рафинированный абстрактный

образ хаоса, а усилия математиков оказались перенаправлены на развитие более широко применимых обобщений [14, 15].

В этой ситуации вместо поиска «готовых» примеров в природе и технике имеет смысл обратиться к целенаправленному построению систем с гиперболическим хаосом на базе инструментария физики и электроники, для чего уместно и естественно эксплуатировать свойство грубости (структурной устойчивости) [16, 17]. А именно, взяв за прототип какой-либо формальный пример хаотической гиперболической динамики, можно попытаться модифицировать его так, чтобы динамические уравнения по возможности стали соответствовать физической системе. Благодаря присущей грубости, можно надеяться, что гиперболический хаос сохранит свою природу при такой трансформации.

В настоящей работе, отпавляясь от классической задачи о геодезическом потоке на поверхности отрицательной кривизны, конструируется электронное устройство, функционирующее как генератор грубого хаоса.

1. Геодезический поток на поверхности отрицательной кривизны

Известно, что свободное механическое движение частицы в пространстве с кривизной осуществляется по геодезическим линиям метрики, которая ассоциируется с квадратичной формой, выражающей кинетическую энергию W через обобщенные скорости с зависящими от координат коэффициентами [18–20]. В частности, в двумерном случае, зная коэффициенты квадратичной формы

$$W = E(x, y)\dot{x}^2 + 2F(x, y)\dot{x}\dot{y} + G(x, y)\dot{y}^2, \quad (1)$$

можно найти гауссову кривизну по известной в дифференциальной геометрии формуле Гаусса – Бриоски [21, 22]

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} & \frac{1}{2}E_x & F_x - \frac{1}{2}E_y \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x \\ -\frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_x & F & G \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где нижние индексы обозначают соответствующие частные производные. В случае отрицательной кривизны движение характеризуется неустойчивостью по отношению к поперечным возмущениям. Поэтому, если оно происходит в ограниченной области, то оказывается хаотическим [19, 20].

В качестве конкретного примера обратимся к геодезическому потоку на так называемой *минимальной Р-поверхности Шварца* [23]. Эта поверхность задается в пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ уравнением

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0. \quad (3)$$

В силу периодичности по трем осям координат,



переменные $\theta_{1,2,3}$ можно полагать определенными по модулю 2π и трактовать движение как протекающее в компактной области – кубической ячейке с длиной ребра 2π .

Динамика, соответствующая геодезическому потоку на поверхности Шварца, реализуется, например, в тройном шарнирном механизме Терстона – Уикса – МакКея – Ханта [24, 25] в некотором предельном случае [25–27]. Также она представляет интерес в контексте модельного описания движения частицы в трехмерном периодическом потенциале [25, 28].

Будем полагать, что консервативная динамика на поверхности (3) протекает с сохранением кинетической энергии

$$W = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2), \quad (4)$$

где масса принята за единицу, а соотношение (3) отвечает наложенному на систему условию голономной механической связи. Выражая одну из обобщенных скоростей через две другие, получаем:

$$W = \frac{1}{2} [P(\theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + 2Q(\theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + R(\theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_2^2], \quad (5)$$

где

$$P = 1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{1 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2},$$

$$Q = \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{1 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2}, \quad (6)$$

$$R = 1 + \frac{\sin^2 \theta_2}{1 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2}.$$

Полностью метрика определяется выражениями (5), (6), дополненными формулами для других листов «атласа согласованных карт» [29] двумерного многообразия, которые получают циклической перестановкой индексов.

Формула Гаусса – Бриоски для кривизны в данном случае приводит к явному выражению [25, 26]

$$K = - \frac{\cos^2 \theta_i + \cos^2 \theta_j + \cos \theta_i \cos \theta_j}{4(-\frac{3}{2} + \cos^2 \theta_i + \cos^2 \theta_j + \cos \theta_i \cos \theta_j)^2},$$

$$(i, j) = (1,2), (2,3), (3,1), \quad (7)$$

что с учетом уравнения связи (3) можно переписать в симметричном виде:

$$K = - \frac{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3}{2(\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3)^2}. \quad (8)$$

За исключением восьми точек, где числитель обращается в нуль из-за одновременного

равенства нулю всех трех косинусов, когда $\theta_1 = \pm\pi/2$, $\theta_2 = \pm\pi/2$, $\theta_3 = \pm\pi/2$, кривизна K всюду отрицательна, так что геодезический поток реализует динамику Аносова.

Используя стандартную для механических систем с голономными связями процедуру [30, 31], можно записать систему уравнений движения в виде

$$\ddot{\theta}_1 = -\Lambda \sin \theta_1, \quad \ddot{\theta}_2 = -\Lambda \sin \theta_2, \quad \ddot{\theta}_3 = -\Lambda \sin \theta_3, \quad (9)$$

где множитель Лагранжа Λ подлежит определению с учетом алгебраического условия механической связи, дополняющего дифференциальные уравнения. В нашем случае

$$\Lambda = \frac{\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3}{\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3}. \quad (10)$$

Система (9) имеет два первых интеграла, один из которых отвечает уравнению связи (3), а другой – его производной по времени, так что размерность фазового пространства редуцируется до четырех. Кроме того, имеется интеграл энергии, что обусловлено консервативной природой динамики.

Рис. 1 иллюстрирует вид траектории в конфигурационном пространстве, полученной при численном решении уравнений. При построении графика угловые переменные считались отнесенными к интервалу от 0 до 2π , т.е. диаграмма в трехмерном пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ отвечает фундаментальной ячейке, периодически повторяющейся при сдвиге на 2π по каждой из трех координат. Точки располагаются на двумерной поверхности, заданной уравнением $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0$, где выполнено условие механической связи.

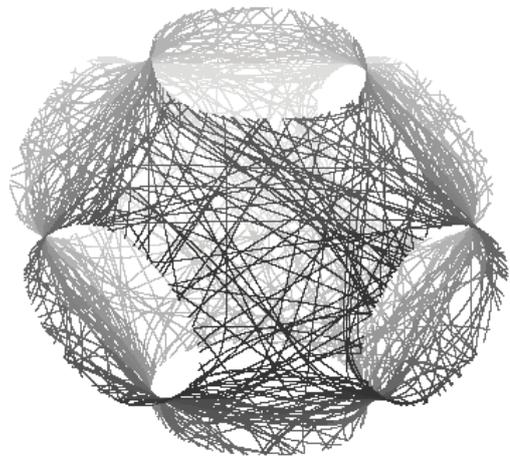


Рис.1. Типичный вид траектории в трехмерном конфигурационном пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ системы (9), (10)



Противолежщие грани кубической ячейки естественно отождествить, в результате чего приходим к компактному многообразию рода 3, т.е. к поверхности, топологически эквивалентной «кренделю с тремя дырками» [24, 25]. Из рис. 1 можно сделать качественное заключение о хаотической природе движения по траектории, эргодическим образом покрывающей поверхность. Спектр мощности сигнала, порождаемого движением системы, сплошной, что соответствует хаосу (рис. 2).

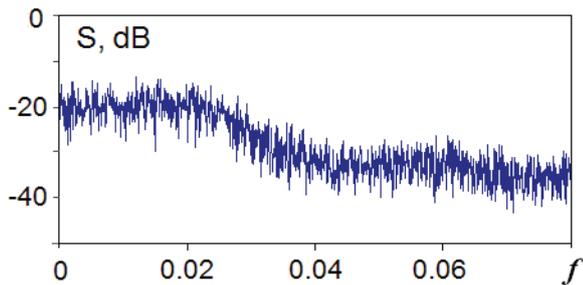


Рис.2. Спектр мощности, рассчитанный для переменной $\dot{\theta}_1$ системы (9), (10) для движения с кинетической энергией $W = 0.0425$

Чтобы охарактеризовать наблюдаемый хаос на количественном уровне, естественно использовать показатели Ляпунова.

С учетом наложенного условия механической связи имеется четыре показателя Ляпунова, характеризующих поведение возмущений около опорной фазовой траектории: один положительный, один отрицательный и два нулевых. Один нулевой показатель обусловлен автономной природой системы и отвечает за возмущение, направленное по касательной к фазовой траектории. Другой ассоциируется с возмущением сдвига энергии.

Так как в системе отсутствует характерный временной масштаб, показатели Ляпунова, отвечающие экспоненциальному росту и убыванию возмущений за единицу времени, должны быть пропорциональны скорости, т.е. $\lambda = \pm \kappa \sqrt{W}$, где коэффициент определяется усредненной кривизной метрики. Эмпирически расчеты для рассматриваемой системы дают $\kappa = 0.70$ [26, 27].

В работе [27] введена в рассмотрение автоколебательная система, динамика которой в установившемся режиме приблизительно соответствует геодезическому потоку на поверхности Шварца, хотя кинетическая энергия не остается постоянной, а совершает нерегулярные колеба-

ния около некоторого среднего уровня. Система описывается уравнениями

$$\ddot{\theta}_i = \mu \dot{\theta}_i - \nu \dot{\theta}_i^3 + (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3) \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Она построена на основе трех авторотаторов – элементов, состояние которых задается угловыми переменными $\theta_{1,2,3}$ и обобщенными скоростями $\dot{\theta}_{1,2,3}$, причем установившееся движение в условиях изоляции одного элемента отвечает вращению в ту или иную сторону с постоянной скоростью. Между этими ротаторами включено взаимодействие посредством потенциала $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2}(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3)^2$, минимум которого достигается при выполнении соотношения (3). Было показано [27], что в определенной области параметров динамика остается гиперболической, хотя для модифицированной системы следует говорить уже не о динамике Аносова, а об автоколебательном хаотическом режиме, отвечающем гиперболическому аттрактору. Цель настоящей работы – указать возможную схмотехническую реализацию такого рода системы и продемонстрировать ее функционирование, как генератора грубого хаоса.

2. Схмотехническая реализация генератора грубого хаоса

Для конструирования электронного устройства на принципах, обсуждавшихся в предыдущем разделе, требуются элементы, аналогичные ротаторам в механике. А именно состояние элемента должно характеризоваться определенной по модулю 2π переменной и ее производной – обобщенной скоростью. Одна из возможностей – использовать в качестве такой переменной сдвиг фазы управляемого напряжением генератора относительно опорного сигнала фиксированной частоты, подобно тому, как это имеет место в системах фазовой автоподстройки [32, 33].

Схема, показанная на рис.3, составлена из трех однотипных подсистем, содержащих управляемые напряжением генераторы, соответственно V1, V2, V3 (на схеме помечены пунктирными прямоугольниками). Фазы колебаний этих генераторов управляются напряжениями U_1, U_2, U_3 на конденсаторах C1, C2, C3. Таким образом, выдаваемые этими генераторами напряжения изменяются во времени по закону $\sin(\omega t + \theta_{1,2,3})$, причем величины $\theta_{1,2,3}$ удовлетворяют уравнениям

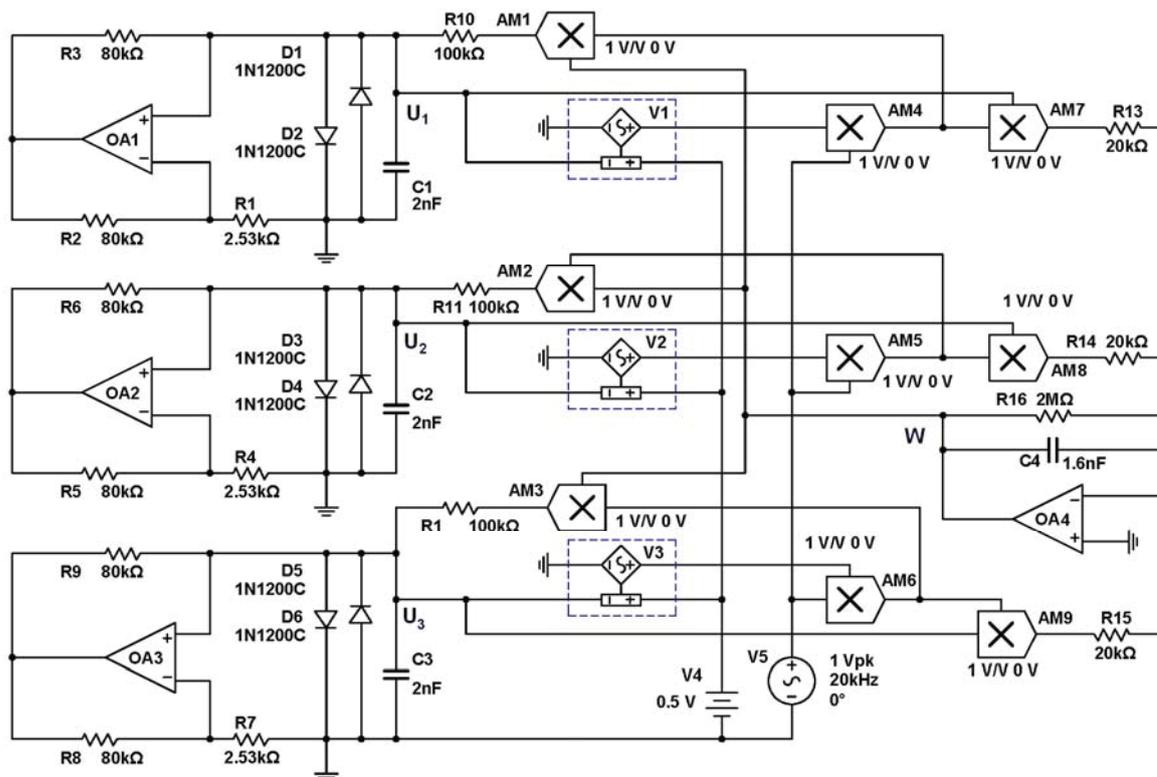


Рис.3. Схема генератора хаоса, реализованная в программной среде Multisim

$$\frac{d\theta_i}{dt} = kU_i, \quad i = 1,2,3, \quad (12)$$

где k – коэффициент крутизны перестройки частоты управляемых напряжением генераторов; конкретно примем $k/2\pi = 40$ кГц/В. Центральная частота генераторов V1, V2, V3 составляет 20 кГц, что обеспечено напряжением смещения от источника V4. Опорный сигнал с амплитудой 1 В и частотой $f = \omega/2\pi = 20$ кГц генерируется источником напряжения V5.

Запишем уравнения Кирхгофа для токов через конденсаторы C1, C2, C3, полагая, что напряжения на выходе аналоговых умножителей AM1, AM2, AM3 равны $W_{1,2,3}$. Имеем

$$C \frac{dU_i}{dt} + (R^{-1} - g)U_i + \alpha U_i + \beta U_i^3 = \frac{W_i}{R}, \quad i = 1,2,3, \quad (13)$$

где $C=C1=C2=C3=2$ нФ, $R = R10 = R11 = R12 = 100$ кОм, $I(U) = \alpha U + \beta U^3$ – характеристика нелинейного элемента на диодах, ее вид показан на рис. 4. В уравнениях учтена вносимая элементами на операционных усилителях OA1, OA2, OA3 отрицательная проводимость $g = R_2/R_1R_3 = R_5/R_4R_6 = R_8/R_7R_9$. Напряжения $W_{1,2,3}$ получаются умножением сигналов

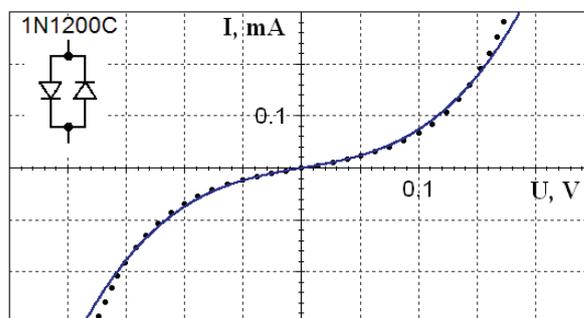


Рис. 4. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента в виде двух параллельно включенных диодов 1N1200C. Дифференциальное сопротивление при малом напряжении 2.602 кОм. Точки – результат моделирования в среде Multisim, черная кривая – аппроксимация: $I(U) \approx \alpha U + \beta U^3 = 0.0039U + 0.035U^3$, где ток выражен в амперах, а напряжение – в вольтах

$\sin(\omega t + \theta_{1,2,3}) \cos \omega t$, поступающих от элементов AM4, AM5, AM6, и сигнала W с выхода инвертирующего сумматора-интегратора на операционном усилителе OA4.

Входными сигналами сумматора-интегратора служат напряжения на выходе умножителей AM7, AM8, AM9, выражающиеся как $U_{1,2,3} \sin \omega t \sin(\omega t + \theta_{1,2,3})$, так что с учетом



утечки, вносимой резистором R16, для напряжения W следует записать

$$C_0 \frac{dW}{dt} + \frac{W}{r} = -\frac{1}{R_0} \sum_{i=1}^3 U_i \sin(\omega t + \theta_i) \cos \omega t, \quad (14)$$

где $C_0 = C4 = 1.6$ нФ, $r = R16 = 2$ Мом, $R_0 = R13 = R14 = R15 = 20$ кОм.

Введем нормированные переменные

$$\tau = \frac{t}{2\sqrt{RCR_0C_0}}, \quad u_i = 2k\sqrt{RCR_0C_0}U_i, \quad w = 2kR_0C_0W \quad (15)$$

и параметры

$$\Omega = 2\sqrt{RCR_0C_0}\omega, \quad \mu = 2(gR - \alpha R - 1)\sqrt{\frac{R_0C_0}{RC}}, \quad v = \frac{\beta}{2k^2C\sqrt{RCR_0C_0}}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{RCR_0C_0}}{rC_0}. \quad (16)$$

Собирая вместе уравнения, в новых обозначениях получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= u_i, \\ \dot{u}_i &= \mu u_i - \nu u_i^3 + 2w \sin(\Omega\tau + \theta_i) \cos \Omega\tau, \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{w} &= -\gamma w - 2 \sum_{i=1}^3 u_i \sin(\Omega\tau + \theta_i) \cos \Omega\tau, \end{aligned} \quad (17)$$

где точка теперь означает производную по безразмерному времени τ .

В предположении, что $\Omega \gg 1$, уравнения можно упростить, учитывая, что на периоде высокочастотного сигнала переменные u_i и w меняются медленно. Для этого в правых частях

уравнений заменяем произведение синуса и косинуса усредненной за период величиной

$$\overline{\sin(\Omega\tau + \theta_i) \cos \Omega\tau} = \cos^2 \Omega\tau \sin \theta_i + \sin \Omega\tau \cos \Omega\tau \cos \theta_i = \frac{1}{2} \sin \theta_i, \quad (18)$$

и приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= u_i, \quad \dot{u}_i = \mu u_i - \nu u_i^3 + w \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{w} &= -\gamma w - \sum_{i=1}^3 u_i \sin \theta_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Наконец, в предположении $\gamma \ll 1$, пренебрегая членом с этим коэффициентом, в последнем уравнении, после подстановки выражений для $u_{1,2,3}$ из первого уравнения можно провести интегрирование и записать $w \approx \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3$, что приводит в точности к уравнению (11).

3. Динамика генератора хаоса – схмотехническое моделирование и численные результаты

На рис. 5 показаны реализации напряжений на конденсаторах C1, C2 и C3, скопированные с экрана виртуального осциллографа при моделировании динамики схемы в среде Multisim¹. Визуально они выглядят как хаотические, без видимого повторения форм. На рис. 6 показан спектр сигнала U1, полученный с помощью виртуального анализатора спектра.

¹ При моделировании в среде Multisim имеется проблема запуска системы из-за большого времени ухода от тривиального состояния равновесия. Показанные на рис. 1 осциллограммы относятся к динамике на аттракторе, переходный процесс исключен.

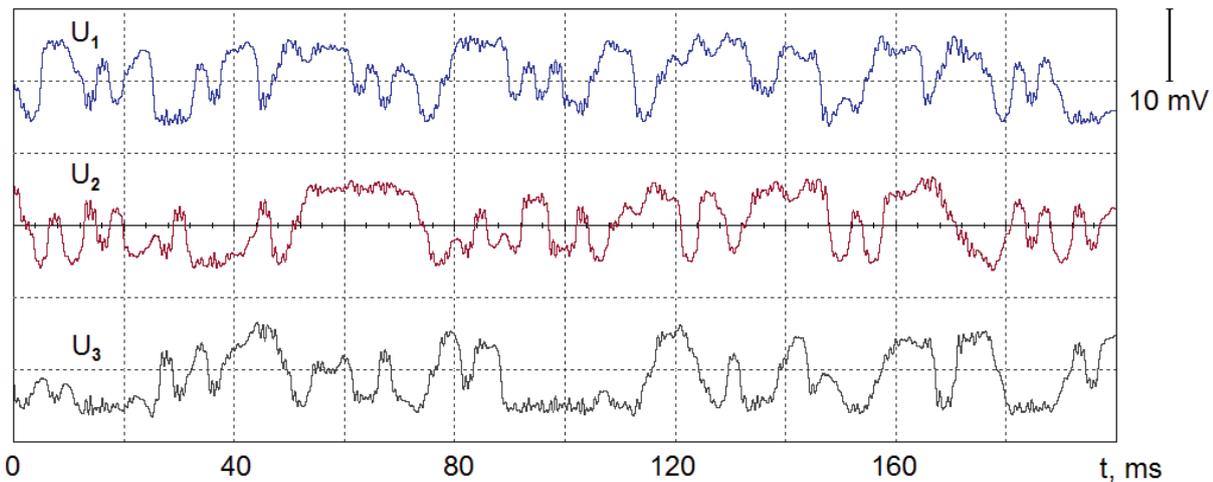


Рис. 5. Реализации напряжений на конденсаторах C1, C2 и C3 с экрана виртуального осциллографа при моделировании схемы в среде Multisim (см. рис.3). Масштаб по вертикальной оси указан вверху в правой части рисунка

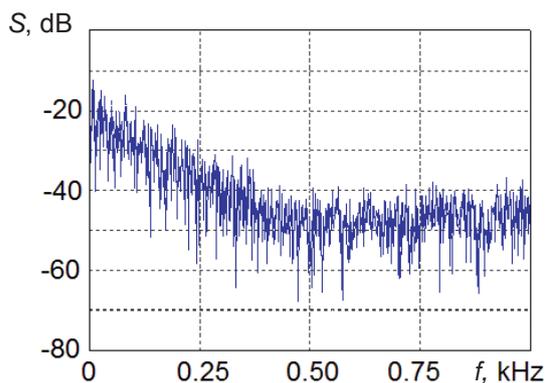


Рис.6. Спектр мощности для напряжения на конденсаторе C1, полученный как снимок с экрана виртуального анализатора спектра при моделировании динамики схемы в среде Multisim

Видно, что спектр сплошной, как это и должно быть для хаотического процесса. Он характеризуется медленным спаданием спектральной плотности с ростом частоты и хорошим качеством в смысле отсутствия пиков и провалов. В силу симметрии схемы все три временных зависимости для напряжений U_1, U_2, U_3 стати-

стически эквивалентны, и их спектры, как было проверено, имеют одинаковый вид.

В рамках схемотехнического моделирования затруднительно исследовать некоторые характеристики, например, показатели Ляпунова, и не представляется возможным проверить гиперболическую природу хаоса. Поэтому обратимся к сопоставлению полученных результатов с динамикой моделей (17), (19) и (11), для которых соответствующий анализ в численных расчетах можно выполнить.

Используя номиналы компонентов схемы на рис. 1 и формулы предыдущего раздела, находим параметры, фигурирующие в уравнениях (17), (19) и (11):

$$\mu = 0.07497, \nu = 1.73156, \gamma = 0.05, \Omega = 20.1062. \quad (20)$$

На рис. 7 показаны графики зависимости переменной u_1 от безразмерного времени, построенные по результатам численного решения уравнений (17) – панель (a), уравнений (19) – панель (b) и уравнений (11) – панель (c). Масштабы по осям координат специально выбраны так, чтобы имело место визуальное соответствие с рис. 5.

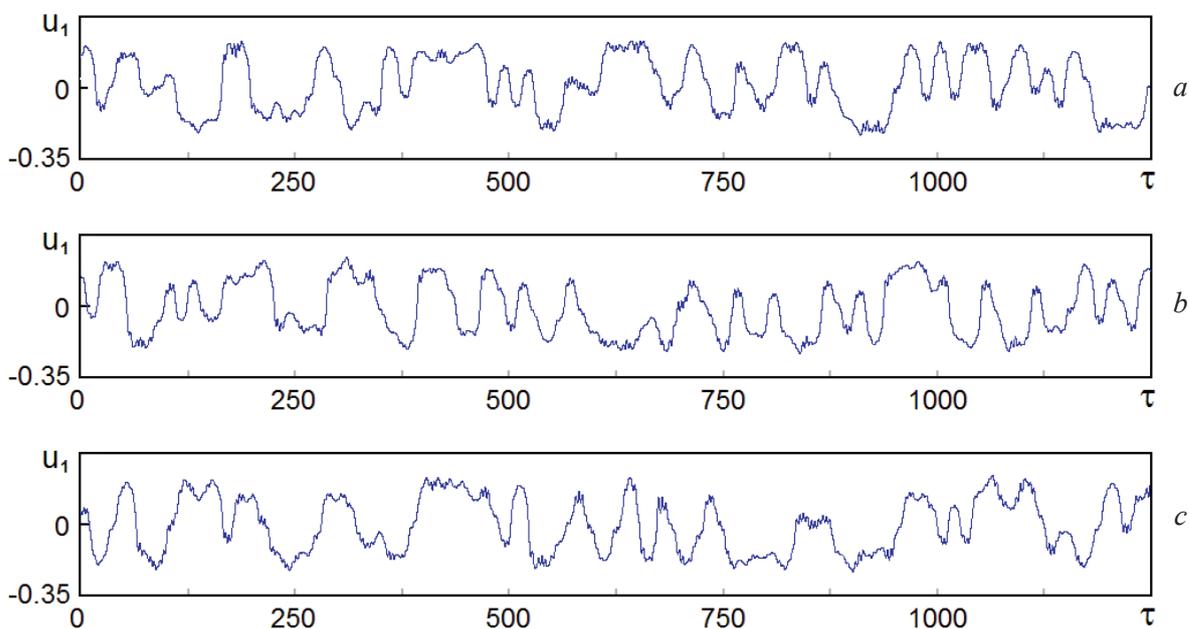


Рис. 7. Временные зависимости переменной u_1 , полученные при численном решении уравнений для моделей (17), (19) и (11), соответственно (a), (b) и (c)

Хотя точного совпадения графиков на диаграммах (a), (b), (c) ожидать не приходится из-за хаотической природы динамики и ее чувствительности к малым вариациям начальных условий, они находятся в разумном соответствии

(общий вид реализаций, характерные масштабы по осям абсцисс и ординат). В этом можно усмотреть подтверждение правомерности аппроксимаций, сделанных при последовательном упрощении модели. Такого рода соответствие



можно наблюдать также и при сравнении графиков с осциллограммами на рис. 5, полученными при моделировании в среде Multisim. На рис. 8 показан спектр сигнала, генерируемого в модели (17)², который, как можно видеть, согласуется с тем, что был получен при схемотехническом моделировании (см. рис. 6), и со спектром системы (9), (10) (см. рис. 5).

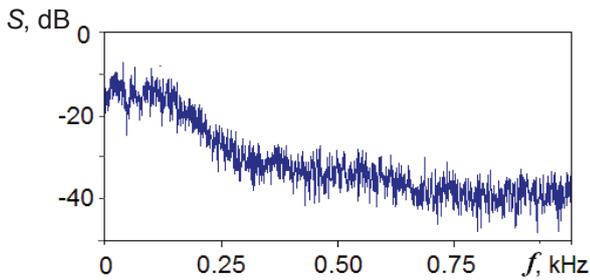


Рис. 8. Спектр мощности для сигнала, порождаемого временной зависимостью переменной u_1 в модели (17) при параметрах (20)

Как можно убедиться, динамика электронного устройства аналогична исходной задаче

² Для систем (17) и (11) вид спектра практически такой же и поэтому не приводится.

(9), (10) в том смысле, что траектория в пространстве координатных переменных $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ располагается вблизи поверхности Шварца. Это иллюстрирует рис. 9, где на панелях (a), (b), (c) представлены траектории, полученные численным интегрированием уравнений для моделей (17), (19) и (11) соответственно. Их можно сравнить с рис. 4, для исходной системы – геодезического потока на поверхности отрицательной кривизны. Из рис. 9 видно, что траектория близка к поверхности Шварца, хотя не располагается точно на ней – картинка слегка «распушена» в поперечном направлении. Этот эффект становится более выраженным с ростом параметра μ , по мере удаления от критической точки возникновения хаотических автоколебаний $\mu=0$.

На рис. 9, d приводится диаграмма, полученная обработкой результатов схемотехнического моделирования в среде Multisim. Для ее построения схема была дополнена тремя специальными модулями обработки сигналов, в каждом из которых сигнал с выхода управляемых напряжением генераторов V1, V2, V3 подвергался умножению на опорные сигналы $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ (рис. 10). После фильтрации

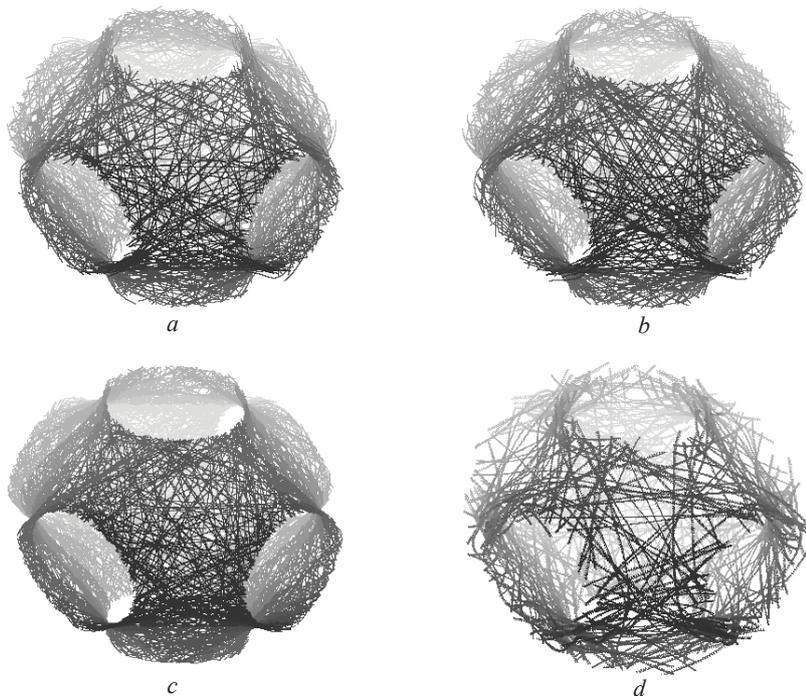


Рис. 9. Вид траекторий в трехмерном пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ для модельных систем, описываемых уравнениями (17), (21) и (11), соответственно (a), (b) и (c), и для электронного устройства, отвечающего схеме, приведённой на рис. 3, с указанными там номиналами компонент по результатам моделирования в среде Multisim (d). Методика построения диаграммы (d) описана в тексте

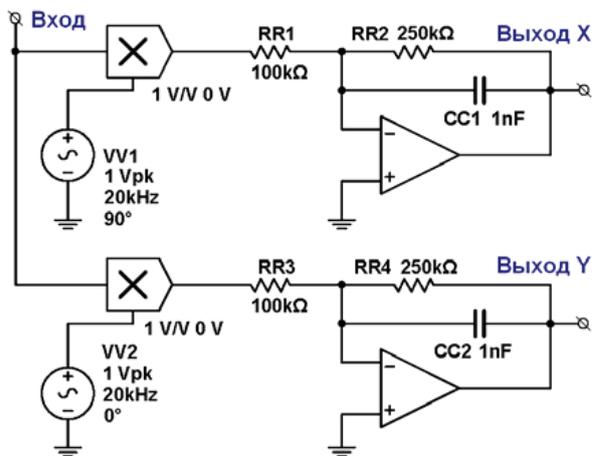


Рис. 10. Схема модуля обработки сигналов для построения фазовых траекторий в конфигурационном пространстве при схемотехническом моделировании. Схема, приведенная на рис. 1, дополнялась тремя такими модулями, для которых входными сигналами служили изменяющиеся во времени напряжения с выхода генераторов V1, V2, V3. Существенно, что источники переменного напряжения VV1 и VV2 сдвинуты по фазе на 90° относительно друг друга

с выделением низкочастотных составляющих, полученные три пары сигналов (x_k, y_k) , $k = 1, 2, 3$, подаются на входы трех осциллографов, и в процессе функционирования схемы производится запись этих сигналов в файл для последующей обработки. Для построения диаграммы, по данным, полученным с модулей, в каждый момент времени вычислялись три угловые переменные $\theta_k = \arg(x_k + iy_k)$, $k = 1, 2, 3$, и соответствующая точка отображалась на графике. Полученная диаграмма наглядно показывает, что функционирование устройства отвечает динамике по траекториям вблизи поверхности Шварца, как и для моделей, описываемых уравнениями (17), (19) и (11).

На рис. 11 показан график зависимости от параметра всех семи показателей Ляпунова, рассчитанных для модели (17) с помощью традиционного алгоритма [34–36]. Во всем представленном интервале по параметру μ имеем один положительный, два близких к нулю и остальные отрицательные показатели Ляпунова. Зависимость показателей от параметра в этой области плавная, без изрезанности, что позволяет предполагать сохранение гиперболической природы хаоса. Аналогичные графики для моделей (19) и (11) приводятся на рис. 12, 13.

Идея проверки гиперболичности на основе статистики углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами на фазовой

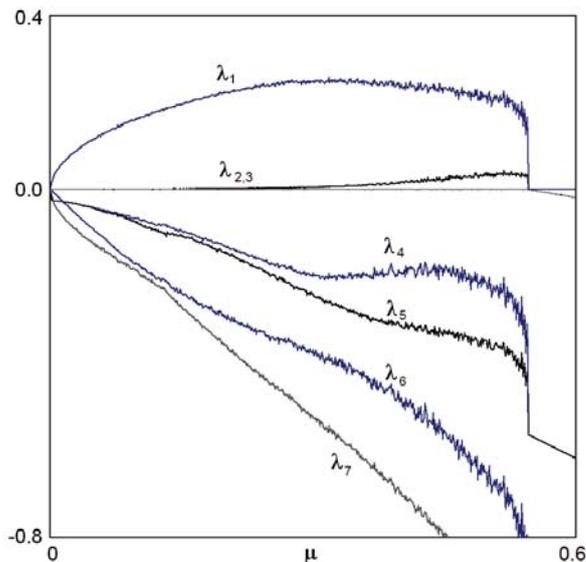


Рис. 11. Показатели Ляпунова системы (17) в зависимости от параметра μ при остальных параметрах, заданных в соответствии с (20)

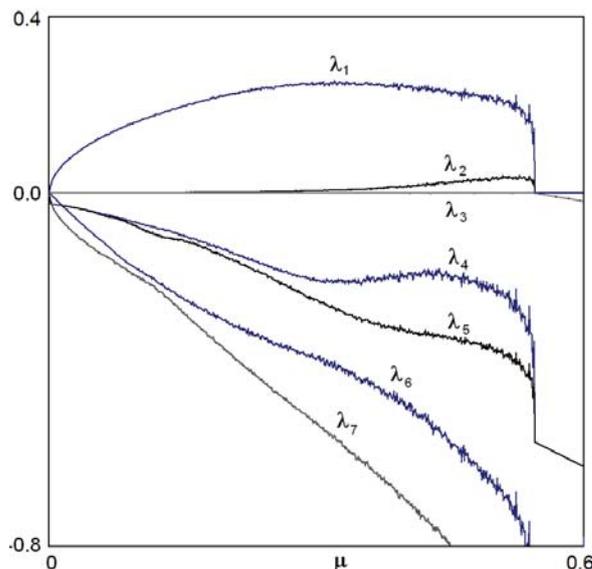


Рис. 12. Показатели Ляпунова системы (19) в зависимости от параметра μ при остальных параметрах, заданных в соответствии с (20)

траектории была предложена для седловых инвариантных множеств в работе [37]. Впоследствии она использовалась применительно к аттракторам [38–43, 16, 17]. Методика состоит в том, что в точках одной и той же принадлежащей инвариантному множеству типичной траектории определяются углы между подпространствами векторов малых возмущений при проходе вперед и назад во времени и анализируется их статистическое распределение.

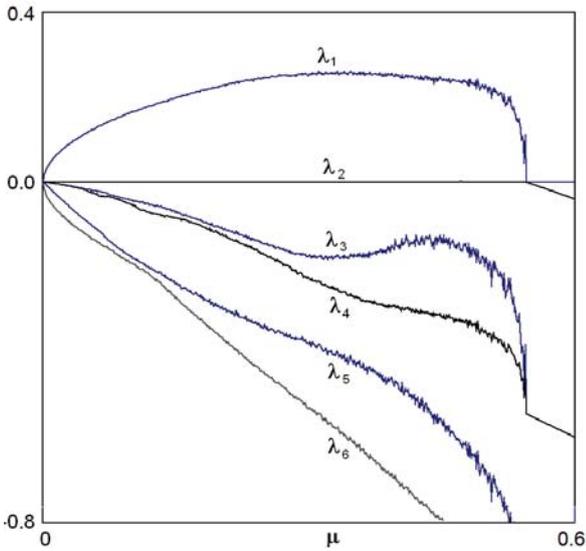


Рис. 13. Показатели Ляпунова системы (11) в зависимости от параметра μ при остальных параметрах, заданных в соответствии с (20)

Если нет углов, близких к нулю, то это указывает на гиперболичность инвариантного множества. Если же обнаруживается положительная вероятность нулевых углов, то касания между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями присутствуют, и гиперболичности нет.

Процедура начинается с вычисления опорной орбиты $\mathbf{x}(t)$ на аттракторе, для чего проводится численное решение системы уравнений, кратко записываемой в виде $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, за достаточно большой временной интервал.

Интересуясь одномерным подпространством, ассоциирующимся с наибольшим показателем Ляпунова, интегрируем линеаризованное уравнение для вектора возмущения $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)\tilde{\mathbf{x}}$ вдоль найденной траектории $\mathbf{x}(t)$. Нормируя векторы $\tilde{\mathbf{x}}$ на единицу на каждом шаге n , получаем набор векторов $\{\mathbf{x}_n\}$.

Далее проводим интегрирование линейного уравнения $\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)]^T \mathbf{u}$, где T означает сопряжение, в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории [42]. Это позволяет получить набор нормированных на единицу векторов $\{\mathbf{u}_n\}$, определяющих ортогональное дополнение к сумме устойчивого и нейтрального подпространств векторов возмущения на опорной траектории.

Теперь для оценки угла ϕ между подпространствами на каждом n -м шаге вычисляем угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами $\tilde{\mathbf{x}}_n$, \mathbf{u}_n и полагаем $\phi_n = \pi/2 - \beta_n$.

На рис. 14 показаны полученные численно гистограммы распределения углов для аттракторов систем (17), (19) и (11) при значениях безразмерных параметров, отвечающих номиналам схемы, приведённой на рис. 3, согласно (20). Как можно видеть, для всех трех моделей диаграммы выглядят однотипно, причем распределение четко отделено от нулевых значений углов ϕ_n . Таким образом, тест подтверждает гиперболичность аттрактора.

Для сравнения на рис. 15 представлены гистограммы, полученные в ситуации, когда гиперболичность нарушается, что имеет место при достаточно больших величинах параметра μ . В самом деле, они демонстрируют присутствие углов вблизи нуля, что говорит о наличии касаний устойчивых и неустойчивых многообразий и негиперболической природе аттрактора. Поскольку в исходной системе – геодезическом потоке на поверхности отрицательной кривизны – этого не наблюдалось, естественно полагать, что отсутствие гиперболичности обусловлено возможностью отклонения принадлежащих аттрактору траекторий от поверхности, заданной уравнением $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0$.

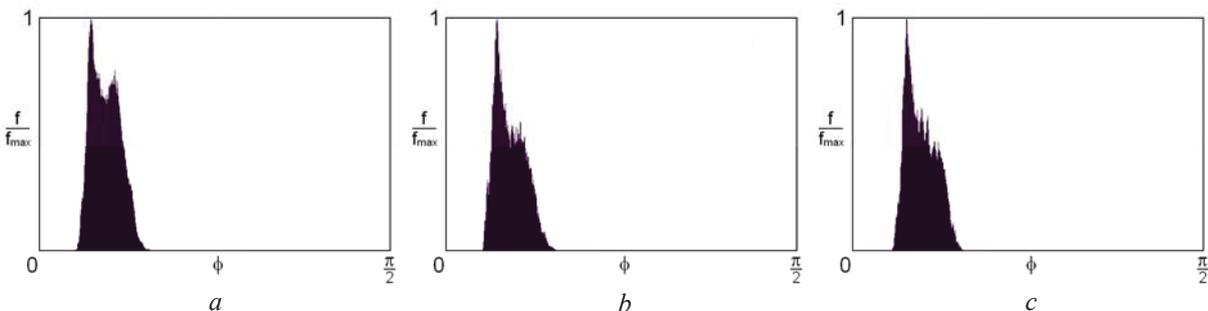


Рис. 14. Полученные численно гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами: a – в модели (17), b – в модели (19) и c – в модели (11) для $R_{1,4,7} = 2.53$ кОм, $\mu = 0.07497$. Распределения не включают нулевых углов ϕ , т.е. гиперболичность аттрактора подтверждается

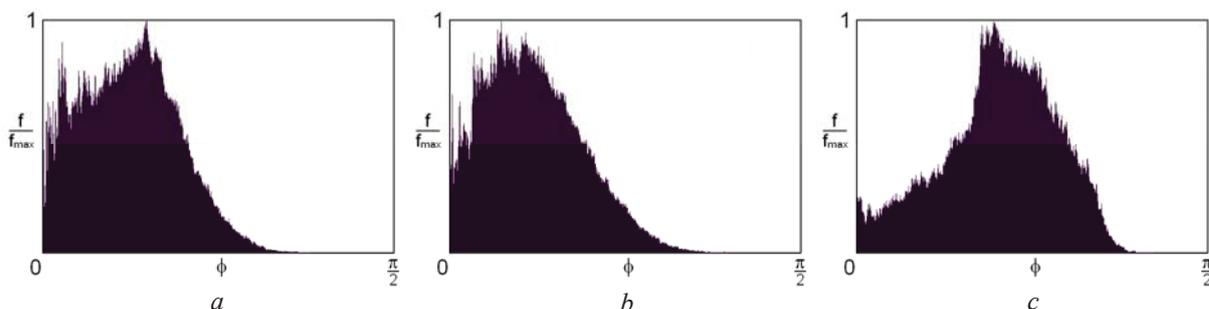


Рис. 15. Полученные численно гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами: a – в модели (17), b – в модели (19) и c – в модели (11) для $R_{1,4,7}=2.5$ кОм, $\mu=0.4544$. Распределения включают нулевые углы ϕ , гиперболичности нет

Заключение

В настоящей работе предложен подход к построению электронного генератора грубого хаоса, состоящий в том, что за основу берется задача о геодезическом потоке на поверхности отрицательной кривизны, где реализуется гиперболическая динамика Аносова. Далее принимается модификация системы к такому виду, чтобы сделать возможным построение электронной аналоговой схемы, описываемой соответствующими уравнениями. Проведено моделирование предложенного устройства в среде Multisim. Также представлены модельные уравнения разной степени аппроксимации, описывающие систему, и проведено компьютерное исследование порождаемой ими хаотической динамики. С использованием критерия, основанного на статистике углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств векторов возмущения опорной фазовой траектории на аттракторе, показано, что гиперболическая природа динамики сохраняется, по крайней мере, в определенной области изменения параметров.

В отличие от ранее рассматривавшихся электронных схем с гиперболическими аттракторами [40, 44–49], в данном случае гиперболичность характеризуется приблизительной равномерностью при растяжении и сжатии элементов фазового объема в ходе эволюции в непрерывном времени. С этим связаны хорошие спектральные свойства сигнала – плавное распределение спектральной мощности по частоте без пиков и провалов.

Хотя конкретная описанная в статье схема функционирует в низкочастотном диапазоне (килоггерцы), представляется возможным построение аналогичных устройств также и в области высоких частот.

Гиперболический хаос характеризуется грубостью, или структурной устойчивостью,

выступающей как его математически строго обоснованный атрибут. Поэтому для любых практических приложений хаоса представляются предпочтительными устройства, генерирующие именно гиперболический хаос в силу малой чувствительности к вариации параметров, различного рода несовершенствам, помехам и т.д.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-12-20035, раздел 1, модель геодезического потока на поверхности Шварца) и РФФИ (проект №16-02-00135, разделы 2,3, схемотехническая реализация и анализ динамики электронного устройства).

Список литературы

1. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи математических наук. 1970. Т. 25, № 1 (151). С. 113–185.
2. Shilnikov L. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353–2001.
3. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов А. В., Солодов В. В., Старков А. Н., Степин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». М.: ВИНТИ, 1991. Т. 66. С. 5–242.
4. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
5. Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
6. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
8. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.



9. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. 2-е изд. М. : Физматлит, 2005. 292 с.
10. Banerjee S., Yorke J. A., Grebogi C. Robust chaos // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, № 14. P. 3049–3052.
11. Elhadj Z., Sprott J. C. Robust Chaos and Its Applications. Singapore : World Scientific, 2011. 472 p.
12. Дмитриев А. С., Ефремова Е. В., Максимов Н. А., Панаас А. И. Генерация хаоса. М. : Техносфера, 2012. 424 с.
13. Аносов Д. В. Динамические системы в 60-е годы : гиперболическая революция. Математические события XX века. М. : Фазис, 2003. С. 1–18.
14. Pesin Ya. B. Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity // European Mathematical Society, 2004. 144 p.
15. Bonatti C., Diaz L. J., Viana M. Dynamics beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 2005. 384 p.
16. Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы : от математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
17. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы : от математики к физике. М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2013. 488 с.
18. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
19. Balazs N. L., Voros A. Chaos on the pseudosphere // Physics Reports. 1986. Vol. 143, № 3. P. 109–240.
20. Bums K., Donnay V. J. Embedded surface with ergodic geodesic flows // Intern. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1997. Vol. 7. P. 1509–1527.
21. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия. М. : Наука, 1990. 672 с.
22. Struik D. J. Lectures on classical differential geometry. Courier Dover Publications, 1988.
23. Meeks W. H., Pérez J., Pérez J. A survey on classical minimal surface theory. University Lecture Series. Vol. 60. American Mathematical Society, 2012. 182 p.
24. Тёрстон У. П., Уикс Д. Р. Математика трехмерных многообразий // В мире науки. 1984. № 9. С. 74–88.
25. Hunt T. J., MacKay R. S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. P. 1499–1510.
26. Кузнецов С. П. Хаос в системе трех связанных роторов: от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 5–17.
27. Кузнецов С. П. Гиперболический хаос в автоколебательных системах на основе тройного шарнирного механизма: Проверка отсутствия касаний устойчивых и неустойчивых многообразий фазовых траекторий // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 1. С. 121–143.
28. Козлов В. В. Замкнутые орбиты и хаотическая динамика заряда в периодическом электромагнитном поле // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2, № 1. С. 3–12.
29. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. 304 с.
30. Гантмахер Ф. П. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М. : Физматлит, 2005. 264 с.
31. Goldstein H., Poole Ch.P. Jr., Safko J. L. Classical Mechanics, 3rd ed. Boston, Mass. : Addison-Wesley, 2001. 680 p.
32. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 446 с.
33. Best Roland E. Phase-Locked Loops : Design, Simulation and Applications. 6th ed. McGraw Hill, 2007. 490 p.
34. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems : A method for computing all of them // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9–30.
35. Шустер Г. Детерминированный хаос : Введение. М. : Мир, 1988. 240 с.
36. Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. М. : Физматлит, 2006. 356 с.
37. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity. 1993. Vol. 6. P. 779–798.
38. Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Physics Letters A. 2000. Vol. 270. P. 301–307.
39. Ginelli F., Poggi P., Turchi A., Chaté H., Livi R., Politi A. Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors // Physical Review Letters. 2007. Vol. 99. P. 130601.
40. Kuznetsov S. P. Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 144101.
41. Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.
42. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // Physical Review E. 2012. Vol. 85. 015203.
43. Kuznetsov S. P., Kruglov V. P. Verification of Hyperbolicity for Attractors of Some Mechanical Systems with Chaotic Dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, № 2. P. 160–174.
44. Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в Журнал технической физики. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1–8.
45. Баранов С. В., Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 11–23.
46. Kuznetsov S. P. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011. Vol. 21. 043105.
47. Аржанухина Д. С. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом на основе связанных



- осцилляторов Ван дер Поля // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2013. № 3 (72). С. 20–30.
48. Кузнецов С. П., Пономаренко В. И., Селезнев Е. П. Автономная система – генератор гиперболического хаоса. Схемотехническое моделирование и эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 5. С. 17–30.
49. Isaeva O. B., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Savin D. V., Seleznev E. P. Hyperbolic Chaos and Other Phenomena of Complex Dynamics Depending on Parameters in a Nonautonomous System of Two Alternately Activated Oscillators // Intern. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2015. Vol. 25, № 12. P. 1530033.

Образец для цитирования:

Кузнецов С. П. От динамики Аносова на поверхности отрицательной кривизны к электронному генератору грубого хаоса // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 131–144. DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144.

From Anosov's Dynamics on a Surface of Negative Curvature to Electronic Generator of Robust Chaos

S. P. Kuznetsov

Sergey P. Kuznetsov, Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch, 38 Zelenaya str., Saratov, 410019, Russia, spkuz@yandex.ru

Background and Objectives: Systems with hyperbolic chaos should be of preferable interest due to structural stability (roughness) that implies insensitivity to variation of parameters, manufacturing imperfections, interferences, etc. However, until recently, exclusively formal mathematical examples of this kind of dynamical behavior were known. It makes sense to turn to purposeful constructing the systems with hyperbolic dynamics appealing to tools of physics and electronics. **Materials and Methods:** Departing from a formal example of hyperbolic dynamics, that is a classical problem of geodesic flow on a surface of negative curvature, the idea is to modify the setup it in such way that the dynamical equations become appropriate to be associated with an electronic circuit hoping that due to the roughness the hyperbolic dynamics will survive this transformation. **Results:** The electronic scheme is elaborated and the dynamical equations are derived. Numerical integration of the equations and simulation of the electronic circuit using the software product NI Multisim supplemented with appropriate processing of the data obtained indicate correspondence of the observed dynamics with those for the geodesic flow. So, the system operates as a generator of robust chaos, at least in some wide range of parameters, and the produced signal has rather good spectral properties, without pronounced peaks and dips in the power spectral density distribution. **Conclusion:** Due to roughness as the mathematically proven attribute of hyperbolic dynamics, the systems of this class seem preferable for practical applications of chaos. Although the circuit considered in the article operates at rather low frequencies (kilohertz), it seems possible to implement similar devices at high frequencies as well.

Key words: dynamic system, chaos, attractor, hyperbolicity, Anosov's dynamics, chaos generator, Lyapunov exponent, self-oscillations, electronic circuit, spectrum.

References

- Smale S. Differentiable Dynamical Systems. *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*, 1967, vol. 73, pp. 747–817.
- Shilnikov L. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1353–2001.
- Anosov D. V., Gould G. G., Aranson S. K., Grines V. Z., Plykin R. V., Safonov A. V., Sataev E. A., Shlyachkov S. V., Solodov V. V., Starkov A. N., Stepin A. M. *Dynamical Systems IX: Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour* (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 9). Springer, 1995. 236 p.
- Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54)*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1996. 824 p.
- Sinai Ya. G. The Stochasticity of Dynamical Systems. *Selected Translations, Selecta Math. Soviet.*, 1981, vol. 1, no. 1, pp. 100–119.
- Andronov A. A., Pontryagin L. S. Grubye sistemy [Systemes Grossiers]. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1937, vol. 14, no. 5, pp. 247–250 (in Russian).
- Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Theory of Oscillators*. Pergamon Press, 1966. 864 p.
- Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. *Oscillations and Waves: In Linear and Nonlinear Systems*. Springer Science & Business Media, 2012. 578 p.
- Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Ryskin N. M. *Nelinejnye kolebanija* [Nonlinear Oscillations]. 2nd ed. Moscow, Fizmatlit, 2005. 292 p. (in Russian).
- Banerjee S., Yorke J. A., Grebogi C. Robust Chaos. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, no. 14, pp. 3049–3052.
- Elhadj Z., Sprott J. C. *Robust Chaos and Its Applications*. World Scientific, Singapore, 2011. 472 p.
- Dmitriev A. S., Efremova E. V., Maksimov N. A., Panas A. I. *Generacija haosa* [Generation of chaos]. Moscow, Technosfera, 2012. 424 p. (in Russian).
- Anosov D. V. *Dynamical Systems in the 1960s: The Hyperbolic Revolution. Mathematical Events of the Twentieth Century*. Eds. A. A. Bolibruch, Yu. S. Osipov, Ya. G. Sinai. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and PHASIS, Moscow, 2006, pp. 1–18.
- Pesin Ya. B. *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*. European Mathematical Society, 2004. 144 p.
- Bonatti C., Diaz L. J., Viana M. *Dynamics beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 2005. 384 p.
- Kuznetsov S. P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics. *Physics–Uspekhi*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
- Kuznetsov S. P. *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012. 336 p.



18. Anosov D. V. Geodezicheskie potoki na zamknutyh rimanovyh mnogoobraznykh otricatel'noj krivizny [Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature]. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1967, vol. 90, pp. 3–210 (in Russian).
19. Balazs N. L., Voros A. Chaos on the pseudosphere. *Physics Reports*, 1986, vol. 143, no. 3, pp. 109–240.
20. Bums K., Donnay V. J. Embedded surface with ergodic geodesic flows. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1997, vol. 7, pp. 1509–1527.
21. Aleksandrov A. D., Netsvetaev N. Yu. *Geometrija* [Geometry]. Moscow, Nauka, 1990. 672 p. (in Russian).
22. Struik D. J. *Lectures on classical differential geometry*. Courier Dover Publications, 1988. 240 p.
23. Meeks W. H., Pérez J., Pérez J. *A survey on classical minimal surface theory. University Lecture Series, vol. 60. American Mathematical Society*, 2012. 182 p.
24. Thurston W. P., Weeks J. R. The Mathematics of Three-Dimensional Manifolds. *Scientific American*, 1984, vol. 251, no. 1, pp. 94–106.
25. Hunt T. J., MacKay R. S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor. *Nonlinearity*, 2003, vol. 16, pp. 1499–1510.
26. Kuznetsov S. P. Haos v sisteme treh svjazannyh rotatorov: ot dinamiki Anosova k giperbolicheskomu attraktoru [Chaos in the System of Three Coupled Rotators: From Anosov Dynamics to Hyperbolic Attractor]. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 5–17 (in Russian).
27. Kuznetsov S. P. Hyperbolic Chaos in Self-oscillating Systems Based on Mechanical Triple Linkage: Testing Absence of Tangencies of Stable and Unstable Manifolds for Phase Trajectories. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 649–666.
28. Kozlov V. V. Zamknutyje orbity i haoticheskaja dinamika zarjada v periodicheskom jelektronnom pole [Closed orbits and chaotic dynamics of a charged particle in a periodic electromagnetic field]. *Regular and Chaotic Dynamics*, 1997, vol. 2, no. 1, pp. 3–12 (in Russian).
29. Arnold V. I. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media, 2012. 351 p.
30. Gantmacher F. R. *Lectures in Analytical Mechanics*. Moscow, Mir, 1975.
31. Goldstein H., Poole Ch. P. Jr., Safko J. L. *Classical Mechanics*. 3rd ed. Boston, Mass., Addison-Wesley, 2001. 680 p.
32. Shakhgildyan V. V., Lyahovkin A. A. *Sistemy fazovoj avtopodstrojki chastoty* [Phase-Locked Loops]. Moscow, Svyaz', 1972. 446 p. (in Russian).
33. Best Roland E. *Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Applications*. 6th ed. McGraw Hill, 2007. 490 p.
34. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
35. Schuster H. G., Just W. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Wiley-VCH, 2005. 312 p.
36. Kuznetsov S. P. *Dinamicheskij haos* [Dynamical Chaos]. 2nd ed. Moscow, Fizmatlit, 2006. 356 p. (in Russian).
37. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, pp. 779–798.
38. Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems. *Physics Letters A*, 2000, vol. 270, pp. 301–307.
39. Ginelli F., Poggi P., Turchi A., Chaté H., Livi R., Politi A. Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99. 130601.
40. Kuznetsov S. P. Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type. *Physical Review Letters*, 2005, vol. 95. 144101.
41. Kuznetsov S. P., Seleznev E. P. A strange attractor of the Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2006, vol. 102, no. 2, pp. 355–364.
42. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos. *Physical Review E*, 2012, vol. 85. 015203.
43. Kuznetsov S. P., Kruglov V. P. Verification of Hyperbolicity for Attractors of Some Mechanical Systems with Chaotic Dynamics. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 160–174.
44. Kuznetsov S. P., Ponomarenko V. I. Realization of a Strange Attractor of the Smale–Williams Type in a Radiotechnical Delay-Feedback Oscillator. *Technical Physics Letters*, 2008, vol. 34, no. 9, pp. 771–773.
45. Baranov S. V., Kuznetsov S. P., Ponomarenko V. I. Haos v fazovoj dinamike oscilljatora van der Polja s modulirovannoj dobrotnost'ju i dopolnitel'noj zapazdyvajushhej obratnoj svjaz'ju [Chaos in the phase dynamics of qswitched van der Pol oscillator with additional delayed feedback loop]. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 11–23 (in Russian).
46. Kuznetsov S. P. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2011, vol. 21, 043105.
47. Arzhanukhina D. S. Shemy jelektronnyh ustrojstv s giperbolicheskim haosom na osnove svjazannyh oscilljatorov Van der Polja [Diagram of the electronic hyperbolic chaos on the basis of related van der Pol oscillators]. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2013, no. 3 (72), pp. 20–30 (in Russian).
48. Kuznetsov S. P., Ponomarenko V. I., Seleznev E. P. Autonomous system generating hyperbolic chaos: Circuit simulation and experiment. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 22, no. 2, pp. 36–49 (in Russian).
49. Isaeva O. B., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Savin D. V., Seleznev E. P. Hyperbolic Chaos and Other Phenomena of Complex Dynamics Depending on Parameters in a no.nautonomous System of Two Alternately Activated Oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2015, vol. 25, no. 12, 1530033.

Please cite this article in press as:

Kuznetsov S. P. From Anosov's Dynamics on a Surface of Negative Curvature to Electronic Generator of Robust Chaos. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 131–144. DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144.