



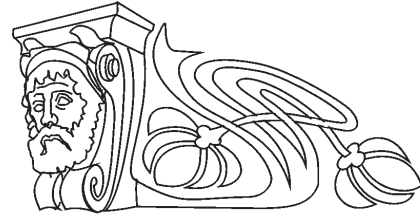
УДК 537.86

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ АВТОНОМНОЙ РЕГУЛЯЦИИ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ С КОНТУРОМ БАРОРЕФЛЕКТОРНОГО КОНТРОЛЯ СРЕДНЕГО АРТЕРИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ В ВИДЕ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю. М. Ишбулатов¹, А. С. Караваев^{1,2}, В. И. Пономаренко^{1,2},
М. Д. Прохоров², Б. П. Безручко^{1,2}

¹Саратовский государственный университет

²Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: karavaevas@gmail.com



Предложена математическая модель вегетативной регуляции деятельности сердечно-сосудистой системы человека в виде системы дифференциальных уравнений, часть из которых содержит запаздывающие члены. Спектральный анализ демонстрирует лучшее качественное и количественное соответствие предложенной модели экспериментальным данным по сравнению с другими известными моделями.

Ключевые слова: математическая модель, система с запаздыванием, спектр мощности, сердечно-сосудистая система.

Model of Cardiovascular System Autonomic Regulation with a Circuit of Baroreflectory Control of Mean Arterial Pressure in the Form of Delayed-Feedback Oscillator

Y. M. Ishbulatov, A. S. Karavaev, V. I. Ponomarenko,
M. D. Prokhorov, B. P. Bezruchko

A mathematical model of human cardiovascular system autonomic regulation is proposed having the form of differential equation set. Some equations of the model contain terms with time delay. The spectral analysis shows that the proposed model exhibits better qualitative and quantitative coincidence with experimental data than the known models.

Keywords: mathematical model, time-delay system, power spectrum, cardiovascular system.

Введение

Исследования сложных многокомпонентных систем реального мира, как правило, сопровождаются попытками построения моделей этих объектов. По мере получения новых знаний о таких объектах их модельные представления развиваются, совершенствуются и усложняются, стартуя от представлений в виде качественных структурных схем. Финальным этапом и целью такой работы является формализация полученных знаний в виде математических моделей, которые претендуют не только на качественное, но и на количественное описание исследуемых явлений и систем. Особое значение такое моделирование имеет в физиологии и медицине. Изуче-

ние особенности функционирования и взаимодействия систем регуляции организма человека, в частности, контуров нервной регуляции работы сердечно-сосудистой системы, имеет важнейшее фундаментальное и прикладное значение и привлекает внимание исследователей [1, 2].

Создание таких математических моделей, структура которых соответствует исследуемым объектам, а коэффициенты несут физический смысл, открывает широкий спектр возможностей [3]. Анализ поведения таких моделей позволяет прогнозировать поведение организма во времени, а также при воздействии патологических факторов и лекарственных препаратов. Решение задачи реконструкции параметров моделей с известной структурой по экспериментальным данным дает уникальную информацию о состоянии систем организма, позволяя, в частности, оценить параметры, прямое измерение которых затруднительно или невозможно. Значения привносимых возможностей для решения задач медицинской диагностики трудно переоценить [4–8].

Значительные сложности математического описания объектов реального мира, особенно объектов биологической природы, приводят к необходимости заведомого упрощения модельного представления по сравнению с оригинальным объектом. При этом, как правило, модель создается для описания конкретного состояния, в частности, конкретной патологии. Попытки создания «универсальных» моделей, как правило, оказываются безуспешными в связи со сложностью задачи, либо такие «универсальные» модели оказываются слишком общими, а их коэффициенты не имеют физического смысла. В этом случае невозможно претендовать на ко-



личественное описание моделируемых систем, процессов и явлений с их помощью.

В настоящее время предложен ряд моделей регуляции сердечно-сосудистой системы (ССС), включающих исследуемый нами контур барорефлекторного контроля тонуса артериальных сосудов. Однако модель данного контура, предложенная в работе [9], учитывающая воздействие процесса дыхания, является линейной и демонстрирует неустойчивое поведение. Нелинейная модель в виде автогенератора с запаздыванием [10], предложенная по результатам прямых экспериментов на кроликах *in vitro*, демонстрирует устойчивый предельный цикл и хорошо соответствует экспериментальным данным. Однако в оригинальной работе исследователи рассматривали автономную систему, не учитывая воздействия на нее никаких внешних факторов и ее взаимодействия с другими регуляторными процессами. При этом, как показано в работах [11–13], такое взаимодействие сильно и его степень несет ценную диагностическую информацию о состоянии ССС. В модели, предложенной в [14] и последователей [15, 16], предлагается использовать системы дифференциальных уравнений, часть из которых имеет запаздывание.

Например, модель, предложенная в [15], учитывает несколько взаимодействующих процессов регуляции тонуса сосудов, симпатическую и парасимпатическую иннервацию сердца, процесс дыхания. Однако в этих многокомпонентных моделях уравнения, описывающие процесс барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов, линейны и не могут демонстрировать автоколебаний, что не соответствует современным представлениям об устройстве этой системы. Кроме того, такие модели принципиально не позволяют моделировать наблюдаемый в экспериментах захват частот и фаз автоколебаний процессом дыхания [17, 18]. Следствием таких особенностей известных моделей является, в том числе, их неспособность воспроизведения типичных для реальных данных спектральных плотностей мощности, отражающих процессы симпатической, парасимпатической регуляции и дыхания. Эти процессы проявляются в спектрах кардиоинтервалограмм (последовательность интервалов между сердечными сокращениями, R-R-интервалы) в виде характерных спектральных составляющих, имеющих частоты в так называемой HF – высокочастотной и LF – низкочастотной областях спектров мощности [1, 2].

Сказанное выше подтверждает актуальность и важность создания математической модели, учитывающей современные представления об устройстве систем автономной регуляции деятельности ССС и воспроизводящей спектральные свойства сигналов кардиоинтервалограмм. В данной работе предлагается такая математическая модель.

Модель автономной регуляции сердечно-сосудистой системы

В основе предлагаемой модели лежат сложившиеся представления о функционировании сердечно-сосудистой системы, использованные авторами статьи в [12] и некоторыми другими исследователями, в частности [13, 14]. В них учитывается взаимодействие различных контуров регуляции, однако контуры описываются уравнениями, структура каждого из которых не допускает возникновения устойчивой автономной динамики на предельном цикле. Поэтому контур барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов, который в соответствии с известными результатами [10, 19, 20] обладает высокой степенью автономности и способностью к автоколебаниям, был заменен на модель, в основе которой лежат результаты, полученные в [10]. В этой работе по результатам серии экспериментов *in vitro* на кроликах была предложена автономная математическая модель системы барорефлекторной регуляции среднего артериального давления в виде дифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием. Были оценены значения параметров этой модели, соответствующие здоровому человеку, и был показан автоколебательный характер динамики данной модели для предложенных значений параметров.

Предложенная нами модель включает 15 алгебраических и дифференциальных уравнений (1)–(15), отражающих структуру, представленную на рис. 1. Частота сердечных сокращений задается работой синусного узла и модулируется влиянием симпатических и парасимпатических нервов (10), причем центры, управляющие симпатической и парасимпатической активностью, расположенные в центральной нервной системе (рис. 1). Сократимость сердца также модулируется активностью симпатических нервов. Сократимость сердца и частота сердечных сокращений определяют систолическое давление, которое быстро нарастает до максимума (примерно 0.1 с в соответствии с [14]) от момента сокращения левого желудочка.

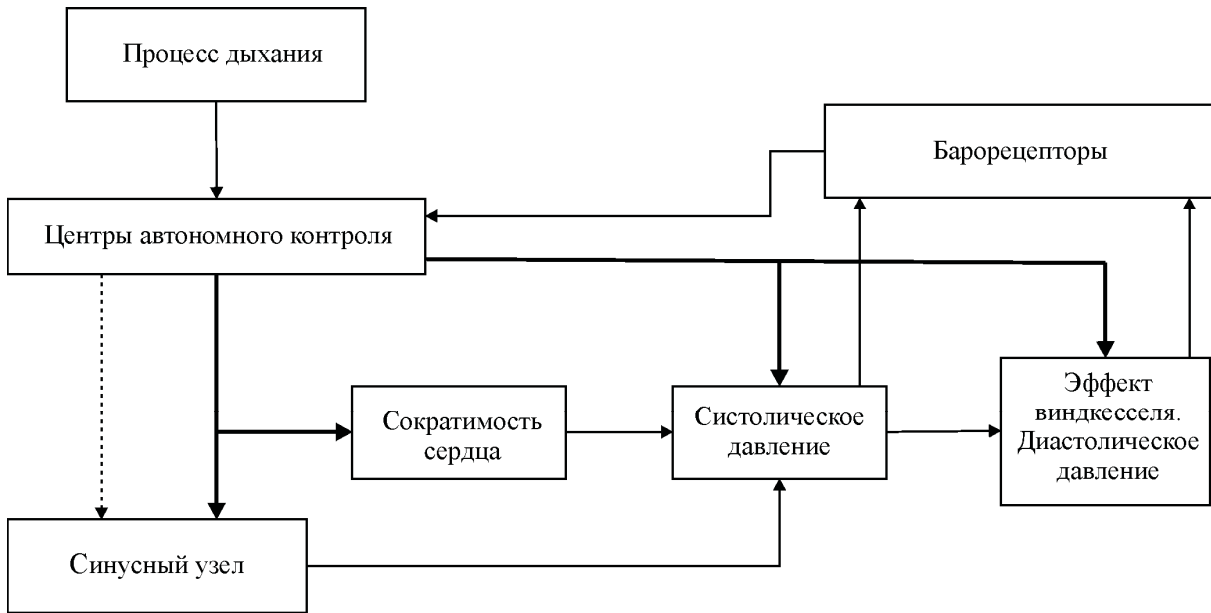


Рис. 1. Структурная схема предложенной модели. Влияние вагуса отмечено пунктирной линией, симпатическая иннервация – жирной линией

Далее инерционные свойства артериальных сосудов (так называемый эффект Виндкесселя) обеспечивают сглаживание импульса давления, и оно релаксирует от максимума, достигнутого в фазе систолы, до следующего сердечного сокращения. Изменения артериального давления воспринимаются артериальными барорецепторами, активность которых влияет на работу центров автономной нервной регуляции. Эти центры представлены ядрами симпатического и парасимпатического отделов нервной системы. В частности, согласно результатам, полученным в [10], в этих центрах реализуется нелинейное преобразование сигнала $-f$, учитываемое в уравнении (4) нашей модели. Введенный нами в модель [14] контур регуляции среднего артериального давления, управляемый центрами симпатической регуляции, расположенными в продолговатом мозге [10], влияет на тонус артериальных сосудов, модулируя величины систолического и диастолического давления с характерной частотой около 0.1 Гц. Процесс дыхания влияет на активность центров автономной регуляции.

Изменение активности барорецепторов происходит в ответ на изменение как кровяного давления, так и его производной, в соответствии с экспериментальными результатами, представленными в [21]:

$$v_b = k_1(p - p^{(0)}) + k_2 \frac{dp}{dt}. \quad (1)$$

Изменения активности барорецепторов приводит к изменению активностей симпатических и парасимпатических контуров барорефлекторной регуляции артериального давления:

$$v_s = \max(0, v_s^{(0)} - k_s^b v_b + k_s^r |\sin(\pi f_r + \Delta\phi_s^r)|), \quad (2)$$

$$v_p = \max(0, v_p^{(0)} - k_p^b v_b + k_p^r |\sin(\pi f_r + \Delta\phi_p^r)| + \xi), \quad (3)$$

где v_s и v_p – симпатическая и парасимпатическая активности соответственно f_r – частота дыхания, а ξ – нормально распределенный розовый шум со среднеквадратичным отклонением 0.4, который, как показано в работе [19], имеет центральное происхождение.

Для описания контура симпатической регуляции тонуса артериальных сосудов авторы статьи отказались от линейных представлений и в соответствии с работой [10] ввели автоколебательный контур, описываемый уравнением

$$\varepsilon \frac{d\bar{p}}{dt}(t) = -\bar{p}(t) + f(\bar{p}(t - \tau)) + k_m^r \sin(2\pi f_r t), \quad (4)$$

где ε – инерционность периферийных сосудов; $\bar{p}(t)$ – среднее артериальное давление; τ – суммарное время афферентных и эфферентных задержек в контуре барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов; f – сигмоидальная функция, моделирующая обработку информации о среднем артериальном давлении, приходящей от барорецепторов в центральной нервной системе:



$$f(x(t-\tau)) = R \left(\frac{r^*}{1 + \alpha e^{-\beta(x(t-\tau)-x^*)}} - \frac{r^*}{1 + \alpha e^{\beta(x(t-\tau)-x^*)}} + y^* \right), \quad (5)$$

где R – коэффициент усиления центральной нервной системы; r^* , α , β , x^* , y^* – параметры нелинейной функции.

Воздействие симпатического и парасимпатического контуров барорефлекторной регуляции на частоту сердечных сокращений (ЧСС) выражается через введение факторов соответственно симпатического и парасимпатического влияний f_s и f_p :

$$f_s = 1 + k_\phi^{cNa} (c_{cNa} (\hat{c}_{cNa} - c_{cNa})) \frac{c_{cNa}^{n_{cNa}}}{\hat{c}_{cNa}^{n_{cNa}} + c_{cNa}^{n_{cNa}}}, \quad (6)$$

$$f_p = 1 + k_\phi^p \left(v_p(t - \theta_p) + \frac{v_p^{n_p}(t - \theta_p)}{\hat{v}_p^{n_p} + v_p^{n_p}(t - \theta_p)} \right) F(\phi). \quad (7)$$

Симпатическая нервная система воздействует на ЧСС изменением концентрации норадреналина в сердце c_{cNa} :

$$\frac{dc_{cNa}}{dt} = -\frac{c_{cNa}}{\tau_{cNa}} + k_{cNa}^s v_s(t - \theta_{cNa}), \quad (8)$$

где θ_{cNa} – время запаздывания, обусловленное конечностью скорости нервной проводимости, и временем, за которое норадреналин вызывает изменения в сердце. $F(\phi)$ – кривая фазовой эффективности, описываемая уравнением

$$F(\phi) = \phi^{1.3} (\phi - 0.45) \frac{(1 - \phi)^3}{(1 - 0.8)^3 + (1 - \phi)^3}. \quad (9)$$

Агентом парасимпатической системы является ацетилхолин, изменение концентрации которого происходит гораздо быстрее, почти не отставая от активности парасимпатической нервной системы. Таким образом, вместо изменения концентрации агента используется непосредственно нервный сигнал контура.

Работа синусного узла описывается моделью *integrate-and-fire*:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{T_o} f_s f_p, \quad (10)$$

где ϕ – фаза сердечного сокращения, T_o – период сокращений денервированного сердца.

Венный возврат и диастолическое давление в конце предыдущего цикла вместе с ЧСС определяют силу сердечных сокращений:

$$S'_i = S^{(0)} + k_S^c c_{cNa} + k_S^l T_{i-1} \quad (11)$$

$$S_i = S'_i + (\hat{S} - S'_i) \frac{S_i^{ms}}{S_i^{ms} + \hat{S}^{ms}}, \quad (12)$$

где T_i – длительность предыдущего сердечного цикла.

Воздействие симпатического контура барорефлекторной регуляции тонуса периферийных сосудов влияет на изменение артериального давления двумя способами, оба способа учитываются в предложенной модели. Первый способ состоит в модуляции артериального давления сигналом $\bar{p}(t)$ среднего артериального давления с выхода контура (4). Данное воздействие активно в первую, систолическую, часть сердечного цикла, в ходе которого артериальное давление увеличивается до систолического:

$$\frac{dp_I}{dt}(t) = D + Si \frac{(t - Ti)}{T_{sys}} \exp\left(1 - \frac{(t - Ti)}{T_{sys}}\right) + k_p^M \bar{p}(t), \quad (13)$$

где D – диастолическое давление в конце предыдущего цикла, T_{sys} – фиксированная длина систолической части сердечного цикла. Второй способ заключается в модуляции сопротивления периферийных сосудов сигналом нервной регуляции $f(\bar{p}(t - \tau_e))$, определяющим реакцию центральной нервной системы на изменение среднего артериального давления. Снижение давления в артериальных сосудах после систолы описывается моделью Виндкесселя:

$$\frac{dp_{II}}{dt}(t) = -\frac{p_{II}}{RC}, \quad (14)$$

где C – константа, определяющая эластичность аорты; R – сопротивление периферийных сосудов, модулируемое сигналом $f(\bar{p}(t - \tau_e))$:

$$R = R_o (1 + k_v^M f(\bar{p}(t - \tau_e))), \quad (15)$$

где τ_e – время эфферентных задержек в контуре симпатической регуляции тонуса артериальных сосудов.

Параметры модели, использованные в ходе численного моделирования, представлены в таблице.



Параметры модели ((1)–(15))

$p^{(0)}$	50 мм рт. ст.	k_p^r	0.1	y^*	0	$S^{(0)}$	25 мм рт. ст.
k_1	0.02 1/мм рт. ст.	$\Delta\phi_s^r$	0.0	$k_{c_{vNa}}^s$	1.2	$k_s^c c_{cNa}$	40 мм рт. ст.
k	0.0013 с/мм рт. ст.	ε	2.0	θ_{vNa}	1.65 с	k_s^t	10 1/мм рт.ст.
$v_s^{(0)}$	0.0	τ	3.6 с	k_ϕ^{cNa}	1.6	\hat{S}	70 мм рт.ст.
k_s^b	0.7	k_m^r	0.5	\hat{c}_{cNa}	2.0	n_s	2.5
k_s^r	0.1	R	1.65	n_{cNa}	2.0	T_{sy}	0.125 с
f_r	0.2 1/с	r^*	1	k_p^p	5.8	k_p^M	0.045
$\Delta\phi_s^r$	0.0	α	1	\hat{v}_p	2.5	$R_o C$	1.5 с
$v_p^{(0)}$	0.0	β	2	n_p	2.0	k_v^M	0.1
k_p^b	0.3	x^*	0	θ_p	0.5 с	τ_e	3.24 с

Результаты численного моделирования

Возможности предложенной модели исследовались в ходе сопоставления экспериментальных кардиоинтервалограмм здоровых испытуемых, данных полученных из сигнала активности синусного узла предложенной модели (уравнение (7)) и модели, предложенной в [14].

На рис. 2 сопоставляются спектральные плотности мощности экспериментальной кар-

диоинтервалограммы (рис. 2, а), выделенной из фоновой записи ЭКГ здорового испытуемого, сделанной в I стандартном отведении по Эйнтховену длительностью 30 мин и результаты численного моделирования с использованием двух модельных представлений (рис. 2, б). Длительности реализаций, полученных в численном моделировании, соответствовали длительности экспериментальной реализации.

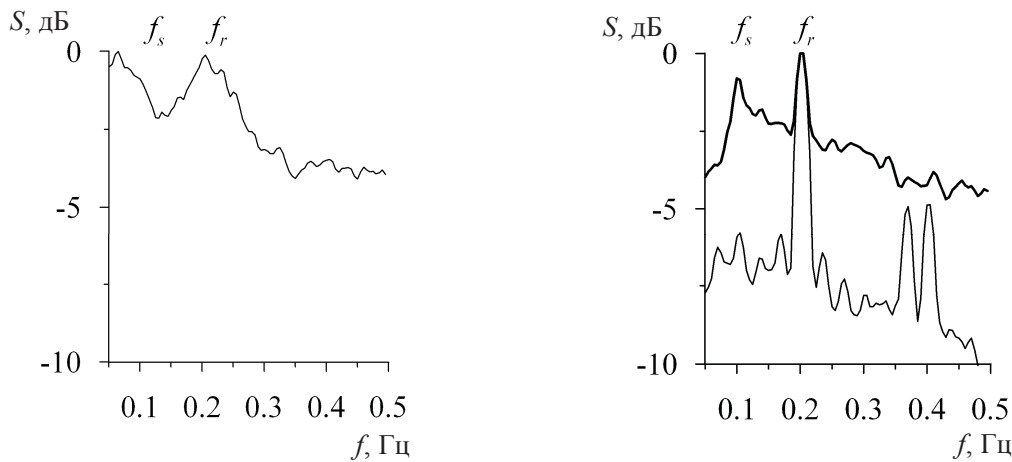


Рис. 2. Сопоставление спектральной плотности мощности кардиоинтервалограмм, полученных: а – в эксперименте, б – путем численного интегрирования модельных уравнений. Тонкая линия – для модели, предложенной в работе [14], жирная линия – для модели, предложенной в данной статье

Сопоставление спектров мощности ритмов, свойственных нашей модели и модели [14], демонстрирует наличие лишь в наших спектрах составляющей, соответствующей 10-секундным ритмам, наблюдаемым в эксперименте – f_s . Этот результат достигнут благодаря введению в структуру модели автоколебательного контура с запаздыванием, моделирующего регуляцию тонуса артериальных сосудов. В обоих сопо-

ставляемых на рис. 2, б спектрах виден пик, соответствующий частоте дыхания f_r .

В качестве количественной меры для сопоставления двух моделей и экспериментальных данных применялся широко используемый информативный индекс LF/HF [1], отражающий соотношение активности симпатического и парасимпатического отделов в системе вегетативной регуляции деятельности ССС [2]. С



физической точки зрения индекс представляет собой отношение спектральных плотностей мощности в двух указанных спектральных диапазонах. Индекс LF/HF рассчитывался по 6 кардиоинтервалограммам здоровых испытуемых длительностью по 5 мин. Кроме того, авторы статьи анализировали реализации такой же длины, полученные путем численного моделирования с использованием собственной модели (с параметрами, приведенными в таблице) и модели [14] (с параметрами, указанными в работе [14]). Анализировались по 6 временных реализаций кардиоинтервалограмм.

В результате средняя величина индекса LF/HF, рассчитанная по экспериментальным данным, составила 11.539 ± 3.697 (приводится среднее и стандартное отклонение). Анализ реализаций, полученных с помощью предложенной авторами статьи модели, показывает среднее значение индекса 0.505 ± 0.162 , а для модели Seidel – Herzel [14] – 0.002 ± 0.001 . Подчеркнем, что в соответствии со статистическими данными А. Н. Флейшмана [1] значения индекса LF/HF от десятых долей до десятков могут наблюдаться в ритмах здоровых обследуемых, а значения порядка тысячных долей не наблюдаются. Такие низкие значения индекса для модели [14] можно объяснить отсутствием в ее спектре выраженной составляющей около 0.1 Гц в связи с тем, что модельное уравнение, описывающее соответствующий регуляторный контур, линейно (линейный релаксатор с запаздыванием) и не может демонстрировать автоколебательную динамику на предельном цикле.

Заключение

Предложена математическая модель системы вегетативной регуляции деятельности сердечно-сосудистой системы человека в виде системы дифференциальных уравнений, часть из которых имеет запаздывание. В модели был учтен автоколебательный характер динамики контура барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов. Это позволило наблюдать в спектрах временных реализаций выраженный пик на частоте около 0.1 Гц (так называемый LF диапазон), чего ранее не удавалось добиться в других известных аналогичных моделях. Предложенная модель, в отличие от широко используемой модели [14], позволяет получать значения известного индекса LF/HF, характерные для здоровых людей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00291).

Список литературы

1. Флейшман А. Н. Медленные колебания гемодинамики. Теория, практическое применение в клинической медицине. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1999. 543 с.
2. Баевский Р. М., Иванов Г. Г., Чирейкин Л. В., Гаврилушкин А. П., Довгалецкий П. Я., Кукушкин Ю. А., Миронова Т. Ф., Прилуцкий Д. А., Семенов А. В., Федоров В. Ф., Флейшман А. Н., Медведев М. М. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (методические рекомендации) // Вестн. аритмологии. 2001. Т. 24. С. 65–87.
3. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов : ГосУНЦ «Колледж», 2005. 299 с.
4. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Хорев В. С. Восстановление времени запаздывания по временным рядам с применением метода ближайших соседей // Письма в Журнал технической физики. 2013. Т. 39, вып. 15. С. 32–39.
5. Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Сысоев И. В. Реконструкция систем с запаздыванием под внешним периодическим воздействием // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 4. С. 613–625.
6. Смирнов Д. А., Сидак Е. В., Безручко Б. П. Интервальные оценки времени запаздывания связи по временным рядам // Письма в Журнал технической физики. 2011. Т. 37, вып. 1. С. 64–71.
7. Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Восстановление систем нейтрального типа с запаздыванием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 3–16.
8. Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Гриднев В. И., Киселев А. Р., Безручко Б. П., Посненкова О. М., Струнина А. Н., Шварц В. А. Методика реконструкции модели системы симпатической барорефлекторной регуляции артериального давления по экспериментальным временным рядам // Технологии живых систем. 2007. Т. 4, № 4. С. 34–41.
9. Burgess D. E., Hundley J. C., Brown D. R., Li S. -G., Randal D. C. First-order differential-delay equation for the baroreflex predicts the 0.4-Hz blood pressure rhythm in rats // American J. of Physiology. 1997. Vol. 273. P. 1878–R1884.
10. Ringwood J. V., Malpas S. C. Slow oscillations in blood pressure via a nonlinear feedback model // American J. of Physiology – Regulatory, Integrative and Comparative Physiology. 2001. Vol. 280. P. 1105.
11. Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Gridnev V. I., Bodrov M. B., Bespyatov A. B. Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular



- system // Physical Review E. 2003. Vol. 68. P. 041913.
12. Karavaev A. S., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Kiselev A. R., Gridnev V. I., Ruban E. I., Bezruchko B. P. Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system // Chaos. 2009. Vol. 19. P. 033112.
 13. Kiselev A. R., Gridnev V. I., Prokhorov M. D., Karavaev A. S., Posnenkova O. M., Ponomarenko V. I., Bezruchko B. P., Shvartz V. A. Evaluation of 5-year risk of cardiovascular events in patients after acute myocardial infarction using synchronization of 0.1-Hz rhythms in cardiovascular system // Annals of Noninvasive Electrocardiology. 2012. Vol. 17. P. 204–213.
 14. Seidel H., Herzel H. Bifurcations in a nonlinear model of the baroreceptor-cardiac reflex // Physica D : Nonlinear Phenomena. 1998. Vol. 115. P. 145–160.
 15. Kotani K., Struzik Z.R., Takamasu K., Stanley H.E., Yamamoto Y. Model for Complex Heart Rate Dynamics in Health and Disease // Physical Review E. 2005. Vol. 72. P. 041904.
 16. Ottensen J. T. Modelling the dynamical baroreflex-feedback control // Mathematical and Computer Modelling. 2000. Vol. 31. P. 167.
 17. Прохоров М. Д., Бодров М. Б., Пономаренко В. И., Гриднев В. И., Беспятов А. Б. Исследование синхронизации между ритмами сердечно-сосудистой системы человека по последовательностям R-R-интервалов // Биофизика. 2005. Т. 50, вып. 5. С. 914–919.
 18. Smirnov D. A., Bodrov M. B., Perez Velazquez J. L., Wennberg R. A., Bezruchko B. P. Estimation of coupling between oscillators from short time series via phase dynamics modeling : Limitations and application to EEG data // Chaos. 2005. Vol. 15. P. 024102.
 19. Киселев А. Р., Беспятов А. Б., Колижирина О. М., Гриднев В. И., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Довгалецкий П. Я. Внутренняя синхронизация основных 0.1 Гц-частотных ритмов в системе вегетативного управления сердечно-сосудистой системой // Физиология человека. 2007. Т. 33, № 2. С. 69–75.
 20. Bunde A., Havlin S., Kantelhardt J. W., Penzel T., Peter J. H., Voigt K. Correlated and uncorrelated regions in heart-rate fluctuations during sleep // Physical Review Letters. 2000. Vol. 85. P. 3736.
 21. Warner H. R. The frequency-dependent nature of blood pressure regulation by the carotid sinus studied with an electric analog // Circulation. 1958. Res. 6. P. 35–40.

УДК 519.6

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТОБРАЖЕНИЯ И. М. АКУЛИНИЧЕВА

В. М. Аникин

Саратовский государственный университет
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Формулируются уравнения Перрона – Фробениуса и аналитически рассчитывается автокорреляционная функция для двумерного отображения И. М. Акулиничева.

Ключевые слова: детерминированный хаос, двумерные отображения, автокорреляционные функции.

Statistic Characteristics of Akulinichev's Map

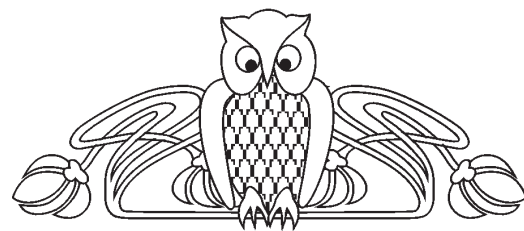
V. M. Anikin

Perron – Frobenius equations for Akulinichev's map are formulated. The autocorrelation function of the map orbits is analytically calculated.

Key words: deterministic chaos, two-dimensional maps, autocorrelation functions.

Введение

В теории детерминированного хаоса на «особом положении» находятся динамические системы, допускающие точные решения [1]. Они служат своего рода «поверочным эталоном», с



которым можно соотносить решения, полученные исключительно численными методами. В статье рассматривается одно из таких отображений – двумерное отображение, впервые введенное И. М. Акулиничевым. В [2] он рассмотрел ряд свойств двумерного отображения, определенного на единичном квадрате, с точки зрения динамической системы теории чисел. В данной работе мы дополняем описание свойств этого отображения с позиции операторного подхода – на базе линейного оператора Перрона – Фробениуса (ОПФ), определяющего вероятностные характеристики итераций этого отображения.

1. Определение динамической системы

Двумерное отображение И. М. Акулиничева формируется посредством выделения дробных частей двух алгебраических выражений, переводящее единичный квадрат в себя: