system // Physical Review E. 2003. Vol. 68. P. 041913.
12. *Karavaev A. S., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Kiselev A. R., Gridnev V. I., Ruban E. I., Bezruchko B. P.* Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system // Chaos. 2009. Vol. 19. P. 033112.
13. *Kiselev A. R., Gridnev V. I., Prokhorov M. D., Karavaev A. S., Posnenkova O. M., Ponomarenko V. I., Bezruchko B. P., Shvartz V. A.* Evaluation of 5-year risk of cardiovascular events in patients after acute myocardial infarction using synchronization of 0.1-Hz rhythms in cardiovascular system // Annals of Noninvasive Electrocardiology. 2012. Vol. 17. P. 204–213.
14. *Seidel H., Herzel H.* Bifurcations in a nonlinear model of the baroreceptor-cardiac reflex // Physica D : Nonlinear Phenomena. 1998. Vol. 115. P. 145–160.
15. *Kotani K., Struzik Z.R. Takamasu K. Stanley H.E., Yamamoto Y.* Model for Complex Heart Rate Dynamics in Health and Disease // Physical Review E. 2005. Vol. 72. P. 041904.
16. *Ottensen J. T.* Modelling the dynamical baroreflex-feedback control // Mathematical and Computer Modelling. 2000. Vol. 31. P. 167.
17. *Прохоров М. Д., Бодров М. Б., Пономаренко В. И., Гриднев В. И., Беспятов А. Б.* Исследование синхронизации между ритмами сердечно-сосудистой системы человека по последовательностям R-R-интервалов // Биофизика. 2005. Т. 50, вып. 5. С. 914–919.
18. *Smirnov D. A., Bodrov M. B., Perez Velazquez J. L., Wennberg R. A., Bezruchko B. P.* Estimation of coupling between oscillators from short time series via phase dynamics modeling : Limitations and application to EEG data // Chaos. 2005. Vol. 15. P. 024102.
19. *Киселев А. Р., Беспятов А. Б., Колижирина О. М., Гриднев В. И., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Довгалевский П. Я.* Внутренняя синхронизация основных 0.1 Гц-частотных ритмов в системе вегетативного управления сердечно-сосудистой системой // Физиология человека. 2007. Т. 33, № 2. С. 69–75.
20. *Bunde A., Havlin S., Kantelhardt J. W., Penzel T., Peter J. H., Voigt K.* Correlated and uncorrelated regions in heart-rate fluctuations during sleep // Physical Review Letters. 2000. Vol. 85. P. 3736.
21. *Warner H. R.* The frequency-dependent nature of blood pressure regulation by the carotid sinus studied with an electric analog // Circulation. 1958. Res. 6. P. 35–40.

УДК 519.6

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТОБРАЖЕНИЯ И. М. АКУЛИНИЧЕВА

В. М. Аникин

Саратовский государственный университет
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Формулируются уравнения Перрона – Фробениуса и аналитически рассчитывается автокорреляционная функция для двумерного отображения И. М. Акулиничева.
Ключевые слова: детерминированный хаос, двумерные отображения, автокорреляционные функции.

Statistic Characteristics of Akulinichev's Map

V. M. Anikin

Perron – Frobenius equations for Akulinichev's map are formulated. The autocorrelation function of the map orbits is analytically calculated.
Key words: deterministic chaos, two-dimensional maps, autocorrelation functions.

Введение

В теории детерминированного хаоса на «особом положении» находятся динамические системы, допускающие точные решения [1]. Они служат своего рода «поверочным эталоном», с которым можно соотносить решения, полученные исключительно численными методами. В статье рассматривается одно из таких отображений – двумерное отображение, впервые введенное И. М. Акулиничевым. В [2] он рассмотрел ряд свойств двумерного отображения, определенного на единичном квадрате, с точки зрения динамической системы теории чисел. В данной работе мы дополняем описание свойств этого отображения с позиции операторного подхода – на базе линейного оператора Перрона – Фробениуса (ОПФ), определяющего вероятностные характеристики итераций этого отображения.

1. Определение динамической системы

Двумерное отображение И. М. Акулиничева формируется посредством выделения дробных частей двух алгебраических выражений, переводящее единичный квадрат в себя:

$$T(x,y) = (\{x+\gamma\},\{y+2x+\gamma\}), \quad x,y \in (0,1), \tag{1}$$

где $0<\gamma<1$ – фиксированное иррациональное число, а фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа. Предположение об иррациональном характере параметра γ существенно для теоретического обеспечения бесконечности нециклических траекторий отображения.

Если итерации в (1) начинаются с некоторой начальной точки $(x_0, y_0) \in (0,1)$, то в более явном покомпонентном представлении отображение (1.1) на *n*-м шаге переписывается как

$$\begin{cases} x_{n+1} = \{x_n + \gamma\}, & x_n \in (0,1), \\ y_{n+1} = \{y_n + 2x_n + \gamma\}, & y_n \in (0,1). \end{cases} \tag{2}$$

Введенное двумерное отображение обладает точным аналитическим решением, выражающим значения переменных на любом шаге итераций через начальные значения:

$$\begin{cases} x_n = \{x_0 + \gamma n\}, & 0 \le x_n \le 1, \\ y_n = \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2\}, & 0 \le y_n \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, значение x_n вычисляется посредством выделения дробной части линейного соотношения относительно *n*, а значение y_n – посредством выделения дробной части квадратного трехчлена относительно *n*.

Доказательство (3) можно провести посредством сведения точного решения (3) к виду (2), что и будет означать его непротиворечивость. В самом деле, на $(n+1)$-м шаге итераций на основании (3) должны иметь:

$$x_{n+1} = \{x_0 + \gamma(n+1)\} = \{x_0 + \gamma n + \gamma\} = \{[x_0 + \gamma n] + \{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} = \{\{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} \equiv \{x_n + \gamma\}; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \{y_0 + 2x_0(n+1) + \gamma(n+1)^2\} = \{y_0 + 2x_0 n + 2x_0 + \gamma n^2 + 2\gamma n + \gamma\} = \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2 + 2(x_0 + \gamma n) + \gamma\} = \\ &= \{[y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2] + \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2\} + 2[x_0 + \gamma n] + 2\{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} = \{(y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2) + 2\{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} \equiv \{y_n + 2x_n + \gamma\}, \end{aligned} \tag{5}$$

ч.т.д. В (4) и (5) введено обозначение для целой части $[a]$ числа *a* как ближайшего целого, меньшего *a*, и учтено, что $a = [a] + \{a\}$, $\{a\} = \{[a] + \{a\}\}$.

Преобразования для различного числа итераций отображения (1) связаны друг с другом по правилу композиции:

$$T^n T^m (x_0, y_0) = T^{n+m}(x_0, y_0), \tag{6}$$

т. е. эволюция системы в процессе итераций может быть найдена посредством преобразования $T^m(x_0, y_0)$ к состоянию (x_0, y_0), а затем – преобразования $T^n(x_m, y_m)$ к новому состоянию (x_m, y_m) (*m* и *n* – натуральные числа). Другими словами, (1.1) можно рассматривать как полугруппу преобразований фазового пространства (единичного квадрата) в себя.

Показать это можно посредством преобразований, аналогичных использованным в (5). Согласно (3) имеем:

$$T^n(x_0, y_0) = (x_n, y_n) = (\{x_0 + \gamma n\}, \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2\}); \tag{7}$$

$$\begin{aligned} T^{n+m}(x_0, y_0) = (\{x_0 + \gamma(n+m)\}, \{y_0 + 2x_0(n+m) + \gamma(n+m)^2\}) = (\{x_0 + \gamma m + \gamma n\}, \\ \{y_0 + 2x_0 m + 2x_0 n + \gamma(n^2 + 2nm + m^2)\}). \end{aligned} \tag{8}$$

Замечая, что

$$\{x_0 + \gamma m + \gamma n\} = \{[x_0 + \gamma m] + \{x_0 + \gamma m\} + \gamma n\} = \{\{x_0 + \gamma m\} + \gamma n\} = \{x_m + \gamma n\};$$

$$\begin{aligned} &\{y_0 + 2x_0 m + \gamma m^2 + 2x_0 n + 2\gamma nm + \gamma n^2\} = \\ &= \{[y_0 + 2x_0 m + \gamma m^2] + \{y_0 + 2x_0 m + \gamma m^2\} + 2n(x_0 + \gamma m) + \gamma n^2\} = \\ &= \{y_m + 2n[x_0 + \gamma m] + 2n\{x_0 + \gamma m\} + \gamma n^2\} = \{y_m + 2x_m n + \gamma n^2\}, \end{aligned}$$

устанавливаем справедливость (6):

$$x_{n+m} = \{x_0 + \gamma n + \gamma m\} = \{x_n + \gamma m\}; \tag{9}$$

$$y_{n+m} = \{y_0 + 2x_0(n+m) + \gamma(n+m)^2\} = \{y_n + 2mx_n + \gamma m^2\}; \tag{10}$$

$$T^{n+m}(x_0, y_0) = T^n(x_m, y_m) = T^n T^m(x_0, y_0). \tag{11}$$

2. Оператор и уравнения Перрона–Фробениуса для управляющей компоненты

Покажем далее, что отображение (1) обладает инвариантной мерой в форме меры Лебега, сохраняемой при преобразованиях (1). В другой терминологии это означает, что (1) является эргодическим преобразованием. Наличие инвариантной меры доказывается, в частности, посредством нахождения неподвижной точки ОПФ данного отображения. Отображение (1) специфично в том плане, что преобразование по одной из координат (x) происходит независимо от второй координаты. Поэтому можно ввести два оператора Перрона–Фробениуса, один из которых соотнесен с одномерным преобразованием «независимой» координаты

$$x_{n+1} = \{x_n + \gamma\};\ 0 \le x_n < 1;\ 0 \le \gamma < 1, \tag{12}$$

а второй оператор – собственно с двумерным отображением (1).

Получим выражение ОПФ для отображения (12), учитывая, что для отображения с итеративной функцией $g(x)$

$$x_{n+1} = g(x_n),\ x_n \in (0,1), \tag{13}$$

оператор имеет вид

$$Pf(x) = \int_0^1 \delta(x - g(\xi)) f(\xi) d\xi\ . \tag{14}$$

В случае отображения (12) оператор записывается как

$$Pf(x) = \int_0^1 \delta(x - \{\xi + \gamma\}) f(\xi) d\xi\ . \tag{15}$$

Проведем в (15) линейную замену переменных $\eta = \xi + \gamma$, приводящую к изменению нижнего ($\xi = 0, \eta = \gamma$) и верхнего ($\xi = 1, \eta = 1 + \gamma$) пределов интегрирования в (15) и представлению ОПФ в виде

$$Pf(x) = \int_\gamma^{1+\gamma} \delta(x - \{\eta\}) f(\eta - \gamma) d\eta = \int_\gamma^1 \delta(x - \{\eta\}) f(\eta - \gamma) d\eta + \int_1^{1+\gamma} \delta(x - \{\eta\}) f(\eta - \gamma) d\eta\ .$$

Поскольку для $\gamma \le \eta < 1$ $\{\eta\} = \eta, [\eta] = 0$, а для $1 \le \eta < 1 + \gamma$ $\{\eta\} = \eta - 1$, $[\eta] = 1$ (в обоих случаях $\eta - [\eta] = \{\eta\}$), дальнейшие преобразования дают:

$$Pf(x) = \int^1 \delta(x - \eta) f(\eta - \gamma) d\eta + \int^{1+\gamma} \delta(x + 1 - \eta) f(\eta - \gamma) d\eta = f(x - \gamma) \cdot \Theta_{\gamma,1}(x) + f(x + 1 - \gamma) \cdot \Theta_{0,\gamma}(x), \tag{16}$$

где $\Theta_{a,b}(x)$ – характеристическая функция интервала (a,b), равная единице внутри интервала и нулю – за его пределами.

Оператор Перрона–Фробениуса определяет правило преобразования вероятностных плотностей при итерациях отображения (12), где величины x_n трактуются как случайные. Если распределение стартового значения отлично от инвариантного, то вероятностные плотности $f_n(x)$ для каждого шага итераций отображения (12) выражаются как

$$f_{n+1}(x) = f_n(x + 1 - \gamma) \cdot \Theta_{0,\gamma}(x) + f_n(x - \gamma) \cdot \Theta_{\gamma,1}(x)\,. \tag{17}$$

Уравнение (17) можно трактовать как «нестационарное» уравнение Перрона–Фробениуса: оно содержит вероятностные плотности, относящиеся к различным шагам итерационного процесса. Под «стационарным» уравнением Перрона – Фробениуса мы будем понимать уравнение относительно инвариантной плотности $f^*(x)$. Оно получается подстановкой $f^*(x)$ в обе части уравнения (17):

$$f^*(x) = f^*(x + 1 - \gamma) \cdot \Theta_{0,\gamma}(x) + f^*(x - \gamma) \cdot \Theta_{\gamma,1}(x)\,. \tag{18}$$

В отличие от классической теории вероятностей, на базе которой и выводится выражение для ОПФ (14), особым предметом интереса теории *детерминированного хаоса* является ситуация, когда нелинейное преобразование вероятностной плотности не меняет ее вида. Это и есть инвариантная плотность распределения. Уравнения типа (18) дают возможность для аналитического или численного расчета инвариантной плотности, которая, таким образом, и является неподвижной функциональной «точкой» ОПФ. В общем виде функциональное уравнение, определяющее инвариантную плотность, имеет вид

$$Pf^*(x) = f^*(x), \tag{19}$$

где символом P обозначен ОПФ для рассматриваемого отображения.

Особый интерес имеет решение нестационарного уравнения Перрона–Фробениуса (17) в форме, выражающей $f_n(x)$ через начальное распределение $f_0(x)$. Для этого необходимо знание точного траекторного решения для отображения (12). Оно было найдено выше как компонента точного решения для двумерного отображения (1) и выражается формулой (3):

$$x_n = \{x_0 + n\gamma\} = \{x_0 + [n\gamma] + \{n\gamma\}\} = \{x_0 + \{n\gamma\}\}. \tag{20}$$

С использованием (20) уравнение (17) запишется как

$$f_n(x) = \int_0^1 \delta(x - \{x_0 + n\gamma\}) f_0(x_0) dx_0 = \int_0^1 \delta(x - \{\xi + \{n\gamma\}\}) f_0(\xi) d\xi . \tag{21}$$

Уравнение (21) непосредственно связывает $f_n(x)$ и $f_0(x)$. Для того чтобы воспользоваться фильтрующими свойствами дельта-функции, в (21) необходимо произвести замену переменных так, чтобы аргумент дельта-функции не содержал *функций* от переменной интегрирования, а содержал лишь аргумент вида $c - \xi$, где c – величина, не зависящая от переменной интегрирования. Такое представление достигается в результате следующей цепочки вычислений:

$$f_n(x) = \int_{\{n\gamma\}}^{1+\{n\gamma\}} \delta(x - \{\eta\}) f_0(\eta - \{n\gamma\}) d\eta = \int_{\{n\gamma\}}^{1} \delta(x - \{\eta\}) f_0(\eta - \{n\gamma\}) d\eta + \int_{1}^{1+\{n\gamma\}} \delta(x - \{\eta\}) f_0(\eta - \{n\gamma\}) d\eta. \tag{22}$$

В (22) по сравнению с (21) введена новая переменная интегрирования согласно замене $\eta = \xi + \{n\gamma\}$, что привело к изменению пределов интегрирования. На различных участках интегрирования значения целых $\lfloor \eta \rfloor$ и дробных $\{\eta\}$ частей имеют различные значения: $\{n\gamma\} \le \eta < 1$, $\lfloor \eta \rfloor = 0$ и $\{\eta\} = \eta$ для интервала интегрирования $(\{n\gamma\}, 1)$, а для интервала интегрирования $(1, 1 + \{n\gamma\})$ имеем $1 \le \eta < 1 + \{n\gamma\}$, $\lfloor \eta \rfloor = 1$ и $\{\eta\} = \eta - 1$. Поэтому далее из (22) следует искомое решение нестационарного уравнения Перрона–Фробениуса через начальное вероятностное распределение:

$$f_n(x) = f_0(x + 1 - \{n\gamma\}) \Theta_{0,\{n\gamma\}}(x) + f_0(x - \{n\gamma\}) \Theta_{\{n\gamma\},1}(x) . \tag{23}$$

Обратимся теперь к стационарному уравнению Перрона–Фробениуса (18). Его решением является *равномерное распределение*:

$$f^*(x) = \Theta_{0,1}(x), \quad x \in [0,1), \tag{24}$$

что проверяется непосредственной подстановкой (24) в (18). Тем самым отображение (12) можно рассматривать как генератор псевдослучайных (с равномерным распределением) точек на единичном интервале.

Как следует из формального рассмотрения (23), если распределение стартового значения $f_0(x)$ отображения (12) совпадает с инвариантной плотностью (24), то и все последующие распределения будут равномерными, что, собственно, согласуется со смыслом инвариантной плотности. Корректность проведенных вычислений можно подтвердить и непосредственным расчетом $f_n(x)$ по формуле (21), когда задана начальная плотность $f_0(x) = \Theta_{0,1}(x)$. Воспроизводя в «облегченной» форме проводившиеся ранее расчеты, получим в этом случае для $f_n(x)$:

$$f_n(x)=\int_0^1 \delta(\{\xi+\gamma n\}-x)\cdot f_0(\xi)d\xi=\int_0^1 \delta(\{\xi+\gamma n\}-x)d\xi=$$

$$=\int_0^1 \delta(\{\xi+\lfloor\gamma n\rfloor+\{\gamma n\}\}-x)d\xi=\int_0^1 \delta(\{\xi+\{\gamma n\}\}-x)d\xi=$$

$$=\int_{\{\gamma n\}}^{1+\{\gamma n\}} \delta(\{\eta\}-x)d\eta=\int_{\{\gamma n\}}^{1} \delta(\{\eta\}-x)d\eta+\int_{1}^{1+\{\gamma n\}} \delta(\{\eta\}-x)d\eta=$$

$$=\int_{\{\gamma n\}}^{1} \delta(\eta-x)d\eta+\int_{1}^{1+\{\gamma n\}} \delta(\eta-1-x)d\eta=\Theta_{\{\gamma n\},1}(x)+\Theta_{1,1+\{\gamma n\}}(1+x)=$$

$$=\Theta_{\{\gamma n\},1}(x)+\Theta_{0,\{\gamma n\}}(x)=1,\quad x\in[0,1),$$

поскольку

$$\eta=\xi+\{\gamma n\},\quad \{\gamma n\}\le\eta<1\Rightarrow[\eta]=0,\quad \{\eta\}=\eta-[\eta]=\eta;$$
$$1\le\eta<1+\{\gamma n\}\Rightarrow[\eta]=1,\quad \{\eta\}=\eta-[\eta]=\eta-1.$$

Таким образом, когда $f_0(x)=\Theta_{0,1}(x)$, все случайные величины, получаемые в процессе отображения (12), оказываются одинаково распределенными:

$$x_n\overset{d}{=}x_0,\; f_n(x)=f_0(x)=\Theta_{0,1}(x),\quad x\in[0,1). \tag{26}$$

3. Оператор и уравнения Перрона – Фробениуса для двумерного отображения

Точное траекторное решение для y-компоненты отображения (1) определяется формулой (3):

$$y_n=\{y_0+2x_0n+\gamma n^2\}. \tag{27}$$

При фиксированных начальных координатах $(x_0,\,y_0)$ распределение y_n является вырожденным:

$$\rho_n(y\,|\,x_0,y_0)=\delta(\{y_0+2x_0n+\gamma n^2\}-y)\,. \tag{28}$$

Когда y_0 рассматривается как случайная величина, «полное» условное распределение y_n определяется как

$$\rho_n(y\,|\,x_0)=\int_0^1 \delta(\{y_0+2x_0n+\gamma n^2\}-y)\cdot\rho_0(y_0|x_0)dy_0\,, \tag{29}$$

где $\rho_0(y_0\,|\,x_0)$ – условное распределение начального значения координаты y (при условии задания начального значения координаты x). Формула (29) носит общий характер в том плане, что применима для любого условного распределения $\rho_0(y_0\,|\,x_0)$. Для конкретного расчета $\rho_n(y\,|\,x_0)$ требуется задать вид условной плотности $\rho_0(y_0\,|\,x_0)$. Естественно, с математической точки зрения наиболее простым является ее задание в форме равномерного распределения:

$$\rho_0(y_0|x_0)=\Theta_{0,1}(y_0). \tag{30}$$

Тогда с учетом (30) соотношение (29) принимает вид

$$\begin{aligned}\rho_n(y\,|\,x_0)&=\int_0^1 \delta(\{y_0+[2x_0n+\gamma n^2]+\{2x_0n+\gamma n^2\}\}-y)\cdot 1\cdot dy_0=\\&=\int_0^1 \delta(\{y_0+\{2x_0n+\gamma n^2\}\}-y)dy_0.\end{aligned} \tag{31}$$

Вводя переменную $\xi=y_0+\{2x_0n+\gamma n^2\},\quad 0\le y_0<1$, далее получим:

$$\begin{aligned}\rho_n(y\,|\,x_0)&=\int_{\{2x_0n+\gamma n^2\}}^{1+\{2x_0n+\gamma n^2\}}\delta(\{\xi\}-y)d\xi=\int_{\{2x_0n+\gamma n^2\}}^{1}\delta(\{\xi\}-y)d\xi+\int_{1}^{1+\{2x_0n+\gamma n^2\}}\delta(\{\xi\}-y)d\xi=\int_{\{2x_0n+\gamma n^2\}}^{1}\delta(\xi-y)d\xi+\int_{1}^{1+\{2x_0n+\gamma n^2\}}\delta(\xi-1-y)d\xi=\\&=\Theta_{\{2x_0n+\gamma n^2\},1}(y)+\Theta_{1,1+\{2x_0n+\gamma n^2\}}(1+y)=\Theta_{\{2x_0n+\gamma n^2\},1}(y)+\Theta_{0,\{2x_0n+\gamma n^2\}}(y)=\Theta_{0,1}(y).\end{aligned} \tag{32}$$

(Учтено, что при $\xi < 1$ $[\xi] = 0, \{\xi\} = \xi - [\xi] = \xi$, а при $\xi > 1$ $[\xi] = 1, \{\xi\} = \xi - [\xi] = \xi - 1$).

Таким образом, в предположении о равномерности условного распределения начального значения y_0 (при фиксированном x_0) условное распределение величины y_n на *n*-м шаге итераций будет также равномерным:

$$\rho_n(y \mid x_0) = \Theta_{0,1}(y) = 1, \quad y \in [0,1). \tag{33}$$

В предположении и равномерности распределения начального значения x_0 *безусловное* распределение y_n также будет равномерным:

$$\rho_n(y) = \int_0^1 \rho_n(y \mid x_0)\rho_0(x_0)dx_0 = \Theta_{0,1}(y) = 1, \quad y \in [0,1). \tag{34}$$

Исследуемое отображение (2) можно привести к симметричной записи по обоим компонентам, если во втором уравнении для компоненты y_n ввести «эффективное» значение параметра $\gamma_{эф}^{(n)} = \{2x_n + \gamma\}$, зависящее от шага итерации. Отображение (2) примет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = \{x_n + \gamma\}, \\ y_{n+1} = \{y_n + 2x_n + \gamma\} = \{y_n + \{2x_n + \gamma\}\} = \{y_n + \gamma_{эф}^{(n)}\}. \end{cases} \tag{35}$$

Интересно отметить, что при итерациях переменная x_n «управляет» положением точки разрыва итеративной функции для y_n: на каждом шаге итераций кусочно-линейная функция, задающая отображение, видоизменяется. Это свойство может быть использовано, например, в хаотических схемах кодирования информации.

Как уже отмечалось во введении, переход к вероятностному описанию динамических систем основан на рассмотрении динамических уравнений как стохастических, куда случайность вносится через начальные условия. Полученные результаты для отдельных компонент рассматриваемого отображения позволяют записать и двумерный инвариантный закон распределения $f_n(x, y)$ для случайного вектора (x_n, y_n). Если начальное распределение компонент (x_0, y_0) задать в виде $f_0(x, y) = \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y)$, то x_0 и y_0 суть независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале [0,1) Маргинальные законы получаются интегрированием по соответствующей координате:

$$\rho_0(x) = \int_0^1 f_0(x, y)dy = \int_0^1 \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y)dy = \int_0^1 \Theta_{0,1}(x)dy = \Theta_{0,1}(x); \tag{36}$$

$$\rho_0(y) = \int_0^1 f_0(x, y)dx = \int_0^1 \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y)dx = \int_0^1 \Theta_{0,1}(y)dx = \Theta_{0,1}(y). \tag{37}$$

Выше было показано, что одинаковыми распределениями в форме (36) и (37) будут в этом случае описывать все x_n и y_n:

$$x_n \overset{d}{=} x_0, \quad y_n \overset{d}{=} y_0 . \tag{38}$$

Двумерные же плотности вероятности на *n*-м шаге итераций и инвариантная двумерная плотность распределения будут иметь соответственно вид

$$f_n(x,y) = \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y), \ f(x,y) = \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y). \tag{39}$$

Если компоненты двумерного отображения заданы функциями

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n), \tag{40}$$

то соответствующий ОПФ вычисляется по правилу:

$$Pf(x, y) = \iint_{D(x,y)} f(x, y)\delta(x - \varphi_1(u,v))\delta(y - \varphi_2(u,v))dudv , \tag{41}$$

где $D(x, y)$ – двумерная область определения отображения. Отображение (40) осуществляет преобразование $D \to D$ (из области *D* в ту же область *D*), сохраняющее площадь. В самом деле, ОПФ определяет правило, по которому вероятностное распределение случайного вектора (X,Y), где *X* и *Y* – координаты случайной точки $(X,Y) \in D$, трансформируется под действием преобразований

(40). Рассматривая случайную точку (X, Y) в качестве исходной, в результате преобразования (40) получим случайный вектор $(\tilde{X},\tilde{Y})$:

$$\tilde{X}=\varphi_1(X,Y),\ \tilde{Y}=\varphi_2(X,Y). \tag{42}$$

Формально говоря, имеем систему четырех случайных величин $(X,Y,\tilde{X},\tilde{Y})$, исчерпывающей вероятностной характеристикой которой служит четырехмерная плотность распределения $f_4(x,y,\tilde{x},\tilde{y})$. Интегрируя эту характеристику по всей области изменения переменных x и y, получим выражение для искомого дифференциального закона распределения $\tilde{f}_2(\tilde{x},\tilde{y})$:

$$\tilde{f}_2(\tilde{x},\tilde{y})=\iint\limits_{D(x,y)} f_4(x,y,\tilde{x},\tilde{y})dxdy. \tag{43}$$

Но, с другой стороны, совместная плотность распределения $f_4(x,y,\tilde{x},\tilde{y})$, согласно общим закономерностям теории вероятностей, может быть представлена произведением исходного распределения $f_2(x,y)$ и условного распределения $f_c(\tilde{x},\tilde{y}\,|\,x,y)$, определяющего вероятностное описание случайного вектора $(\tilde{X},\tilde{Y})$ при условии, что компоненты вектора (X,Y) имеют некоторые детерминированные значения (x,y):

$$f_4(x,y,\tilde{x},\tilde{y})=f(x,y)f_c(\tilde{x},\tilde{y}\,|\,x,y). \tag{44}$$

Подставляя (44) в (43), получим для искомого распределения:

$$\tilde{f}_2(\tilde{x},\tilde{y})=\iint\limits_{D(x,y)} f(x,y)f_c(\tilde{x},\tilde{y}\,|\,x,y)\,dxdy. \tag{45}$$

Но поскольку связь между координатами (x,y) и $(\tilde{x},\tilde{y})$ является *сугубо детерминированной*, условная вероятность имеет вид (вырожденного распределения):

$$f_c(\tilde{x},\tilde{y}\,|\,x,y)=\delta(\tilde{x}-\varphi_1(x,y))\delta(\tilde{y}-\varphi_2(x,y)) \tag{46}$$

(символом δ обозначена дельта-функция Дирака). Поэтому в общем виде уравнение Перрона–Фробениуса для двумерных отображений имеет представление (41). Оно принимает вид функционального уравнения (т.е. в известном смысле упрощается) при рассмотрении конкретных отображений. В нашем случае функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ имеют вид (2):

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n)=\{x_n+\gamma\}, & x_n\in(0,1),\\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n)=\{y_n+2x_n+\gamma\}, & y_n\in(0,1). \end{cases} \tag{47}$$

Поэтому двумерный ОПФ в этом случае записывается как

$$Pf(x,y)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \delta(x-\{\xi+\gamma\})\cdot\delta(y-\{\eta+2\xi+\gamma\})\cdot f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{48}$$

Вводя новые переменные

$$\bar{\xi}=\xi+\gamma,\ 2\bar{\xi}=2\xi+2\gamma,\quad 2\bar{\xi}-\gamma=2\xi+\gamma,\quad \xi=\bar{\xi}-\gamma,$$

получаем далее:

$$Pf(x,y)=\int\limits_{\gamma}^{1+\gamma}\delta(x-\{\bar{\xi}\})\,d\bar{\xi}\int\limits_0^1\delta(y-\{\eta+2\bar{\xi}-\gamma\})f(\bar{\xi}-\gamma,\eta)\,d\eta. \tag{49}$$

Дальнейшие преобразования проводятся на основе замены переменных $\bar{\eta}=\{2\bar{\xi}-\gamma\}+\eta$, $\bar{\eta}-\{2\bar{\xi}-\gamma\}=\eta$:

$$\begin{aligned} Pf(x,y)&=\int\limits_{\gamma}^{1+\gamma}\delta(\{\bar{\xi}\}-x)d\bar{\xi}\int\limits_{\{2\bar{\xi}-\gamma\}}^{1+\{2\bar{\xi}-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f_n(\bar{\xi}-\gamma,\bar{\eta}-\{2\bar{\xi}-\gamma\})d\bar{\eta}=\\ &=(\int\limits_{\gamma}^{1}\delta(\{\bar{\xi}\}-x)d\bar{\xi}+\int\limits_{1}^{1+\gamma}\delta(\{\bar{\xi}\}-x)d\bar{\xi})\vdots\int\limits_{\{2\bar{\xi}-\gamma\}}^{1+\{2\bar{\xi}-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f_n(\bar{\xi}-\gamma,\bar{\eta}-\{2\bar{\xi}-\gamma\})d\bar{\eta}. \end{aligned} \tag{50}$$

Замечая, что на интервале $(\gamma,1)$ $[\bar{\xi}]=0, \{\bar{\xi}\}=\bar{\xi}$, а на интервале $(1,1+\gamma)$ $[\bar{\xi}]=1,\quad \{\bar{\xi}\}=\bar{\xi}-1$, с учетом свойства дельта-функции получим из (50) далее:

$$Pf(x,y)=\int_{\gamma}^{1}\delta(\bar{\xi}-x)d\bar{\xi}\int_{\{2\bar{\xi}-\gamma\}}^{1+\{2\bar{\xi}-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f(\bar{\xi}-\gamma,\bar{\eta}-\{2\bar{\xi}-\gamma\})d\bar{\eta}\}+$$

$$+\int_{1}^{1+\gamma}\delta(\bar{\xi}-1-x)d\bar{\xi}\int_{\{2\bar{\xi}-\gamma\}}^{1+\{2\bar{\xi}-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f(\bar{\xi}-\gamma,\bar{\eta}-\{2\bar{\xi}-\gamma\}d\bar{\eta}\}=$$

$$=\Theta_{\gamma,1}(x)\int_{\{2x-\gamma\}}^{1+\{2x-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f(x-\gamma,\bar{\eta}-\{2x-\gamma\})d\bar{\eta}+$$

$$+\Theta_{0,\gamma}(x)\int_{\{2(1+x)-\gamma\}}^{1+\{2(1+x)-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f(x+1-\gamma,\bar{\eta}-\{2(1+x)-\gamma\}d\bar{\eta}.$$

Поскольку $\{2+2x-\gamma\}=\{2x-\gamma\}$, то далее получаем:

$$Pf(x,y)=\Theta_{\gamma,1}(x)\int_{\{2x-\gamma\}}^{1+\{2x-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f(x-\gamma,\bar{\eta}-\{2x-\gamma\})d\bar{\eta}+\Theta_{0,\gamma}(x)\int_{\{2x-\gamma\}}^{1+\{2x-\gamma\}}\delta(\{\bar{\eta}\}-y)f_n(x+1-\gamma,\bar{\eta}-\{2x-\gamma\})d\bar{\eta}=$$

$$=\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f(x-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f(x-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\})+$$

$$+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f(x+1-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f(x+1-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\}$$

(учтено, что при $0\le x<\gamma$ имеет место $1\le x+1<1+\gamma$; $1-\gamma\le x+1-\gamma<1$, а при $0\le y<\{2x-\gamma\}$ – $-1\le y+1<1+\{2x-\gamma\}$; $1-\{2x-\gamma\}\le y+1-\{2x-\gamma\}<1$).

Таким образом, ОПФ для двумерного отображения (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned}Pf(x,y)&=\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f(x-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f(x-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\})+\\&+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f(x+1-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f(x+1-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\}).\end{aligned}\tag{51}$$

Нестационарное уравнение Перрона–Фробениуса, соотнесенное с двумерным отображением (1), на основании (51) имеет вид

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x,y)&=\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f_n(x-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f_n(x-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\})+\\&+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f_n(x+1-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f_n(x+1-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\}).\end{aligned}\tag{52}$$

Стационарное же уравнение Перрона–Фробениуса, определяющее инвариантную плотность отображения, записывается как

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f(x-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{\gamma,1}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f(x-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\})+\\&+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{\{2x-\gamma\},1}(y)f(x+1-\gamma,y-\{2x-\gamma\})+\Theta_{0,\gamma}(x)\Theta_{0,\{2x-\gamma\}}(y)f(x+1-\gamma,y+1-\{2x-\gamma\}).\end{aligned}\tag{53}$$

Непосредственно подстановкой в (53) можно убедиться, что неподвижной точкой ОПФ для исследуемого двумерного отображения является равномерное распределение, определенное на единичном квадрате:

$$f(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in[0,1)\\0,(x,y)\notin[0,1).\end{cases}\tag{54}$$

При этом и распределения координатных составляющих отображения (1) являются равномерными:

$$f(x,y)=\Theta_{0,1}(x)\cdot\Theta_{0,1}(y)\ .\tag{53}$$

4. Автокорреляционные свойства орбит отображения

Рассчитаем автокорреляционную функцию «ведущей» компоненты рассматриваемого двумерного отображения (1):

$$x_{n+1} = \{x_n + \gamma\} = (x_n + \gamma) \bmod 1 = \begin{cases} x_n + \gamma, & 0 \le x_n < 1-\gamma, \\ x_n + \gamma - 1, & 1-\gamma \le x_n < 1, \end{cases} \tag{54}$$

где $\gamma \in (0,1)$ – иррациональное число. Точное решение для хаотического отображения (2.54) имеет вид

$$x_n = \{x_0 + n\gamma\}, \tag{55}$$

так что для шага $n+k$ будем иметь

$$x_{n+k} = \{x_0 + n\gamma + k\gamma\} = \{x_n + k\gamma\}. \tag{56}$$

Представление (56) будем использовать при вычислении смешанного момента

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \overline{x_n \cdot \{x_n + \{k\gamma\}\}}, \tag{57}$$

в свою очередь выходящего в выражение для автокорреляционной функции орбиты (траектории) отображения (56):

$$R(k) = \overline{x_n \cdot x_{n+k}} - \overline{x_n} \cdot \overline{x_{n+k}} = \overline{x_n \cdot \{x_n + \{k\gamma\}\}} - \overline{x_n} \cdot \overline{\{x_n + \{k\gamma\}}, \tag{58}$$

где $\overline{x_n}$ и $\overline{x_{n+k}}$ – средние значения фазовой переменной отображения на n-м и ($n+k$)-м шаге итераций. В выражениях (57) и (58) усреднение должно проводиться по плотности вероятности $f_n(x)$, отвечающей n-му шагу итераций. Выражения для $f_n(x)$ определяют ОПФ (17) и решение нестационарного уравнения Перрона–Фробениуса (23). Как было показано выше, если распределение стартовой точки является инвариантным (т. е. в нашем случае равномерным), то инвариантным (равномерным) являются распределения для всех шагов итераций (см. формулу (23)). В общей записи (при отличии $f_n(x)$ от инвариантного распределения) получим для смешанного момента (57):

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \overline{x_n \cdot \{x_n + \{k\gamma\}\}} = \int_0^1 x\{x + \{k\gamma\}\} f_n(x)dx. \tag{59}$$

Вводя в (59) новую переменную по правилу

$$x + \{ka\} = \xi, \quad x = \xi - \{ka\}, \quad dx = d\xi,$$

получим далее:

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \int_{\{k\gamma\}}^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\})\{\xi\} f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi =$$

$$= \int_{\{k\gamma\}}^{1} (\xi - \{k\gamma\})\{\xi\} f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi + \int_{1}^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\})\{\xi\} f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi.$$

Здесь при $\{k\gamma\} \le \xi < 1$ $\{\xi\} = \xi$, а при $1 \le \xi < 1 + \{ka\}$ $\lfloor \xi \rfloor = 1$, $\{\xi\} = \xi - 1$. Поэтому выражение для смешанного момента и автокорреляционной функции примут соответственно вид

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \int_{\{k\gamma\}}^{1} \xi(\xi - \{k\gamma\}) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi + \int_{1}^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\})(\xi - 1) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}), \tag{60}$$

$$\begin{aligned} R(k) = &\int_{\{k\gamma\}}^{1} \xi(\xi - \{k\gamma\}) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi + \int_{1}^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\})(\xi - 1) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}) - \\ &- \int_0^1 \xi f_n(\xi) d\xi \int_0^1 \{\xi + \{k\gamma\}\} f_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{61}$$

поскольку средние значения, исчисленные в сечениях n и $n+k$, определяются как

$$\overline{x_n} = \int_0^1 x f_n(x) dx, \quad \overline{x_{n+k}} = \int_0^1 \{x + \{k\gamma\}\} f_n(x) dx. \tag{62}$$

Представления (60) – (62) справедливы для любого распределения стартовой точки отображения (54). Дальнейшие упрощения можно провести, считая начальное распределение инвариантным (равномерным). В этом случае для смешанного момента получим следующее выражение:

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \int_{\{k\gamma\}}^{1} (\xi^2 - \{k\gamma\}\cdot\xi)d\xi + \int_{1}^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\})(\xi - 1)d\xi =$$

$$= \int_{\{k\gamma\}}^{1+\{k\gamma\}} (\xi^2 - \{k\gamma\}\xi)d\xi - \int_{1}^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\})d\xi = \frac{\xi^3}{3} - \{\gamma a\}\cdot\frac{\xi^2}{2}\Big|_{\{k\gamma\}}^{1+\{k\gamma\}} - \Big(\frac{\xi^2}{2} - \{k\gamma\}\cdot\xi\Big)\Big|_{1}^{1+\{k\gamma\}} =$$

$$= \frac{(1+\{k\gamma\})^3}{3} - \{k\gamma\}\cdot\frac{(1+\{k\gamma\})^2}{2} - \frac{(\{k\lambda\})^3}{3} + \{k\gamma\}\cdot\frac{(\{k\gamma\})^2}{2} - \tag{63}$$

$$- \Big(\frac{(1+\{k\gamma\})^2}{2} - \{k\gamma\}\cdot(1+\{k\gamma\}) - \frac{1}{2} + \{k\gamma\}\Big) = \frac{1}{2}\left(\{ka\}^2 - \{ka\} + \frac{2}{3}\right).$$

Соответственно среднее значения фазовой переменной на любом шаге итераций равно

$$\overline{x_p} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \tag{64}$$

Объединяя (63) и (64), для автокорреляционной функции орбит отображения (54) в случае распределения стартовой точки по инвариантному закону окончательно получим:

$$R(k) = \frac{1}{2}\{k\gamma\}^2 - \frac{1}{2}\{k\gamma\} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\{k\gamma\}^2 - \{k\gamma\} + \frac{1}{6}\right). \tag{65}$$

Поведение автокорреляционной функции зависит от значения иррационального параметра γ. Покажем, что, во-первых, знак автокорреляционной функции может меняться от итерации к итерации и, во-вторых, на некоторых шагах итерации возможно полное «расцепление» корреляций в динамической системе (54), т. е. есть обращение $R(n)$ в ноль. В самом деле, вводя обозначение $z = \{k\gamma\}$ (фигурные скобки, напомним, применены для операции взятия дробной части числа), условие обращения автокорреляционной функции в ноль на основании (65) можно записать в виде квадратного уравнения:

$$f(z) = z^2 - z + \frac{1}{6} = 0. \tag{66}$$

Корни уравнения (66) действительны и принадлежат отрезку (0,1):

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}. \tag{67}$$

Следовательно, для любого значения параметра γ возможно осуществление смены знака значения автокорреляционной функции орбиты траектории отображения (54) с течением итераций. Минимальное (причем, отрицательное) значение функция (66) (и тем самым автокорреляционная функция орбит) принимает в точке $z_{\min} = 1/2 : f(z_{\min}) = -1/12$. Максимальные (и положительные) значения функция (66) принимает на границах единичного отрезка: $f(0) = f(1) = 1/6$.

Заключение

Рассмотрено двумерное отображение И. М. Акулиничева, определяемое выделением дробных частей двух алгебраических выражений. При преобразованиях точки квадрата переводятся в область этого же квадрата, при этом сохраняется лебегова мера – площадь квадрата. Математически данное отображение задает операция взятия дробных частей от линейной и квадратической функций.

Аналитически выявлены (с учетом результатов [2]) следующие характеристики и свойства отображения:

точные траекторные решения для точек двумерного отображения как по координате x, так и в области квадрата $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

наличие полугрупповых свойств у изучаемого отображения;

нестационарное и стационарное уравнения Перрона–Фробениуса для отображения, образованного x-компонентой исходного двумерного отображения;

решения нестационарного и стационарного уравнений Перрона–Фробениуса для x-компоненты исходного двумерного отображения, что является доказательством существования инвариантной меры в виде равномерного распределения (эргодичности отображения);

одинаковая (равномерная) распределенность координат x_n отображения в случае распределения начального значения x_0 по равномерному закону;

условная и безусловная плотности вероятности, характеризующие случайное поведение y-координаты исходного двумерного отображения;

нестационарное и стационарное уравнения Перрона-Фробениуса для исследуемого двумерного отображения;

инвариантная мера для двумерного отображения в виде равномерного распределения на квадрате, а также по y-координате;

автокорреляционная функция для траектории движения точки по x-координате, что позволяет аналитически оценить характер статистической зависимости точек траектории в процессе итераций: эта зависимость имеет колебательный характер, при этом существуют алгебраические иррациональные точки $\{k\gamma\}$, отвечающие некоторому шагу итераций k, при котором происходит «расцепление» корреляций ($R(k) = 0$).

Результаты представляют интерес для теории динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, теории чисел и функционального анализа, поскольку содержат элементы решения спектральной задачи для двумерного линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса [3–6], что актуально для оценки скорости расцепления корреляций в исследуемой динамической системе [1, 7–8].

Прикладные возможности результатов связаны с применением отображения в имитационных экспериментах в качестве генератора псевдослучайных точек на единичном квадрате, а также при решении задач криптографической защиты данных, поскольку параметр для y-компоненты отображения меняется с каждой итерацией, что является дополнительной алгоритмической защитой против несанкционированного раскодирования данных [9,10].

Список литературы

1. *Аникин В. М., Голубенцев А. Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
2. *Акулиничев И. М.* О динамической системе, связанной с распределением дробных долей многочлена второй степени // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 3. С. 503–505.
3. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Перрона – Фробениуса для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67–73.
4. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С.* Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Там же. 2006. Т. 14, № 2. С. 16–34.
5. *Аникин В. М., Ремизов А. С., Аркадакский С. С.* Собственные функции и числа оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Там же. 2007. Т. 15, № 2. С. 62–75.
6. *Аникин В. М.* Спектральные задачи для оператора Перрона – Фробениуса // Там же. 2009. Т. 17, № 4. С. 35–48.
7. *Аникин В. М., Чебаненко С. В.* Аналитический расчет корреляционных функций дискретных хаотических сигналов // Гетеромагнитная микроэлектроника. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 8. С. 103–109.
8. *Аникин В. М., Муштаков А. В.* Автокорреляционная функция орбит кусочно-линейного хаотического отображения общего вида // Там же. 2014. Вып. 17. С. 12–23.
9. *Аникин В. М., Чебаненко С. В.* Хаотические отображения и кодирование информации : модификации исторически первого алгоритма // Там же. 2011. Вып. 9. С. 81–95.
10. *Аникин В. М., Ноянова С. А., Чебаненко С. В.* Кодирование информации на базе отображения пекаря // Там же. 2012. Вып. 12. С. 52–60.