



УДК 530.18

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ ПРИ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ АМПЛИТУД

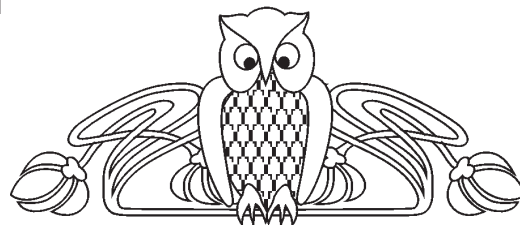
Е. В. Сидак^{1,2}, Д. А. Смирнов^{1,2}, Б. П. Безручко^{1,2}

¹Саратовский государственный университет

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники

им. В. А. Котельникова РАН

E-mail: sidakev@gmail.com



Показано, что использование известной интервальной оценки времени запаздывания связи между осцилляторами, основанной на эмпирическом моделировании фазовой динамики и формализме максимального правдоподобия, может давать ошибочные выводы о величине запаздывания. Это имеет место, когда на фазы существенно влияет динамика амплитуд, что типично для нелинейных автоколебательных систем, находящихся под действием сильных шумов или в хаотических режимах. Предложен эмпирический критерий для диагностики таких ситуаций и модифицированная оценка запаздывания, позволяющая устранить ошибочные выводы. Оба подхода использованы для оценки связей между климатическими процессами Эль-Ниньо – Южное колебание и Северо-Атлантическое колебание по данным наблюдений.

Ключевые слова: запаздывающие связи, нелинейная динамика, моделирование фазовой динамики, система Ресслера, Эль-Ниньо – Южное колебание, Северо-Атлантическое колебание.

Phase Dynamics Modeling Technique for Estimation of Delayed Couplings between Nonlinear Oscillators Accounting for Influence of Amplitudes

E. V. Sidak, D. A. Smirnov, B. P. Bezruchko

An established interval estimator of a time delay in coupling between oscillators, which is based on empirical modeling of phase dynamics and maximum likelihood formalism, is shown to give sometimes erroneous conclusions about the value of the time delay. It occurs when the dynamics of amplitudes affects phases, which is typical of nonlinear oscillatory systems under the influence of strong noises or in chaotic regimes. We suggest an empirical criterion to diagnose such situations and a modified estimator of time delay which allows one to avoid erroneous conclusions. Both approaches are applied to the estimation of couplings between climate processes El-Nino/Southern Oscillation and North Atlantic Oscillation from observational data.

Key words: delayed couplings, nonlinear dynamics, phase dynamics modeling, Roessler system, El-Nino/Southern Oscillation, North Atlantic Oscillation.

DOI: 10.18500/1817-3020-2015-15-4-28-37

Введение

Построение маломерных стохастических моделей наблюдаемой динамики (см., например, [1, 2]) по временным рядам востребовано

в различных приложениях, включая прогноз качественных изменений динамики [3, 4] и оценку характеристик взаимодействия между элементами сложной системы (см., например [5–8]). Для решения последней задачи перспективен метод эмпирического моделирования фазовой динамики [7–10], который уже применялся для выявления связей между колебательными процессами при исследовании патологической активности во время паркинсоновского тремора [11, 12] и взаимодействия крупномасштабных климатических процессов Эль-Ниньо – Южное колебание (ЭНЮК) и Северо-Атлантическое колебание (САК) [13, 14]. При этом важен вопрос о выявлении запаздывания воздействий и об оценке времени запаздывания [10], а такую оценку часто требуется получить по относительно коротким и зашумленным данным, почему она может оказаться весьма неточной и поэтому необходимо снабжать ее оценкой погрешности (доверительного интервала).

В предположении белого шума в фазовой динамике исследуемых систем аналитическое выражение для доверительного интервала оценки времени запаздывания связи было получено в [15]. Затем была предложена более общая интервальная оценка [16], учитывающая возможные ненулевые автокорреляции шумов, и эффективность была проиллюстрирована на фазовых осцилляторах с цветными гауссовыми шумами. При этом ограничение ее применимости состоит в том, что предполагаются гауссовы шумы, независимые от значений фаз. Для маломерных нелинейных автоколебательных систем в хаотических или сильно возмущенных периодических режимах эти условия могут нарушаться из-за того, что на фазы существенно влияет нелинейная динамика амплитуд, на которую, в свою очередь, влияют фазы, что меняет статистические свойства «эффективного шума» в фазовой динамике



(см., например, [5, 17]). Поэтому целесообразно исследовать применимость этой интервальной оценки запаздывания связи в подобных более сложных условиях, что важно для обеспечения её надежности при широком практическом применении. В данной работе проводится такое исследование, в численных экспериментах иллюстрируются возможности проблематических ситуаций и предлагаются варианты дальнейшего обобщения выражений для интервальной оценки с целью преодоления возникающих трудностей. В качестве иллюстрации возможных приложений на практике различные варианты интервальной оценки использованы при анализе временных рядов климатических процессов ЭНЮК и САК.

Оценка для случая белых шумов

Известный подход [15] основан на построении эмпирической модели фазовой динамики наблюдаемых процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для этого сначала по имеющимся временным рядам $x_1(t)$ и $x_2(t)$ одним из известных методов (см., например, [5]) рассчитываются временные ряды фаз колебаний $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$, где $t_i = i\Delta t$, Δt – интервал выборки, N – длина ряда. Форма математической модели выбирается на основе следующих соображений. Известно [5, 18, 19], что фазовая динамика периодических автоколебательных процессов, возмущенных слабыми шумами и слабо связанных, достаточно точно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} d\phi_1(t)/dt &= \omega_1 + G_1(\phi_1(t), \phi_2(t - \Delta_{2 \rightarrow 1}^*)) + \xi_1(t), \\ d\phi_2(t)/dt &= \omega_2 + G_2(\phi_2(t), \phi_1(t - \Delta_{1 \rightarrow 2}^*)) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр ω_k определяет угловую частоту колебаний, $\xi_k(t)$ – белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = \sigma_{\xi_k}^2 \delta(t-t')$, $\Delta_{2 \rightarrow 1}^*$ и $\Delta_{1 \rightarrow 2}^*$ – времена запаздывания связи. Функции G_k 2π -периодичны по обоим аргументам и определяют взаимодействие осцилляторов и собственную нелинейность их фазовой динамики. При анализе дискретных временных рядов удобно рассматривать разностную форму уравнений, которую можно получить путем интегрирования уравнений (1) на интервале конечной ширины t .

$$\begin{aligned} \phi_k(t + \tau) - \phi_k(t) &= F_k(\phi_k(t), \phi_j(t - \Delta_{j \rightarrow k}^*)) + \varepsilon_k(t), \\ k, j &= 1, 2, j \neq k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon_k(t) \approx \int_t^{t+\tau} \xi_k(t') dt'$ – гауссовский шум с нуле-

вым средним и дисперсией $\sigma_{\varepsilon_k}^2 \approx \sigma_{\xi_k}^2 \tau$. Автокорреляционная функция (АКФ) фазового шума ε_k

$$C_k(t') = \langle \varepsilon_k(t)\varepsilon_k(t-t') \rangle / \sigma_{\varepsilon_k}^2, \quad (3)$$

где угловые скобки означают математическое ожидание, линейно спадает на интервале $(0, \tau]$.

По временному ряду строится модель (2) с тригонометрическими многочленами F_k невысокого порядка. Для этого сначала при фиксированном пробном времени запаздывания $\Delta_{j \rightarrow k}$ коэффициенты \mathbf{a}_k многочлена F_k определяются методом наименьших квадратов, т.е. путем минимизации среднего квадрата ошибки модели

$$S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k) = \frac{1}{N - \tau/\Delta t} \sum_{i=1}^{N-\tau/\Delta t} (\phi_k(t_i + \tau) - \phi_k(t_i) - F_k(\phi_k(t_i), \phi_j(t_i - \Delta_{j \rightarrow k})) \mathbf{a}_k)^2,$$

отыскивается минимальное значение $S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k)$ при фиксированном $\Delta_{j \rightarrow k}$: $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}) = \min_{\mathbf{a}_k} S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k)$. Далее

величина $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ минимизируется как функция пробного запаздывания $\Delta_{j \rightarrow k}$ (рис. 1). Точка минимума $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k} = \arg \min_{\Delta_{j \rightarrow k}} s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ принимается в качестве оценки времени запаздывания, а само минимальное значение s_k^2 есть оценка дисперсии шума $\varepsilon_k(t)$. Такая оценка запаздывания оказывается смещенной при достаточно общих условиях на $-\tau/2$, т.е. время запаздывания недооценивается [15]. Несмещенной оценкой тогда является величина $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k} + \tau/2$. Для получения

доверительного интервала определяют дисперсию величины $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$ исходя из формализма максимального правдоподобия. В случае независимых приращений фаз на последовательных неперекрывающихся интервалах времени оценка дисперсии имеет вид

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2}{N'} \left(\frac{\partial^2 S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})}{\partial \Delta_{j \rightarrow k}^2} \Big|_{\Delta_{j \rightarrow k} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k}} \right)^{-1}, \quad (4)$$

где N' – число независимых значений ε_k . Поскольку при белом шуме в фазовой динамике (1) значения ε_k , разделенные интервалом не менее τ , статистически независимы друг от друга, то имеет место $N' = \frac{N - \tau/\Delta t}{\tau/\Delta t}$. При достаточной

длине ряда оценка $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr}$ распределена по нормальному закону так, что 95%-ный доверитель-



ный интервал для времени запаздывания имеет вид $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr} \pm 1.96 \hat{\sigma}_{\Delta_{j \rightarrow k}}$. Для оценки второй производной в (4) зависимость $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ в окрестности Q точки минимума (см. рис. 1) аппроксимируется

квадратичной параболой (штриховая линия на рис. 1), при этом использование Q шириной в один характерный период колебаний дает приемлемый результат [15].

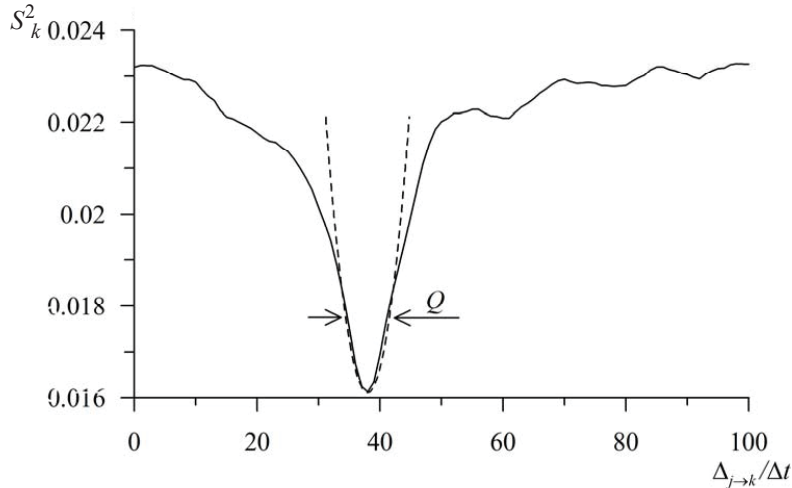


Рис. 1. Иллюстрация метода получения интервальной оценки запаздывания на примере временного ряда от фазовых осцилляторов вида (1) с $\omega_1 = 0.95$, $\omega_2 = 1.05$ в случае белых шумов ξ_1 и ξ_2 с автоковариационными функциями $\langle \xi_1(t)\xi_1(t') \rangle = 0.36\delta(t-t')$, $\langle \xi_2(t)\xi_2(t') \rangle = 0.01\delta(t-t')$ и однонаправленной связи с запаздыванием $\Delta_{1 \rightarrow 2} = 40\Delta t$ при $G_2(\phi_2, \phi_1) = k \sin(\phi_2, \phi_1)$ [15]

Оценка для случая коррелированных шумов

В работе [16] на примере фазовых осцилляторов, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями первого порядка с цветными шумами, было показано, что оценка на основе (4) может приводить к большому числу ложных выводов, сильно превышающему заявленный уровень 5%. Для диагностики этой ситуации рассматривалась АКФ шума ε_k , которая оценивалась по остаточным ошибкам модели как $C_k(l\Delta t) = \langle \hat{\varepsilon}_k(t_i)\hat{\varepsilon}_k(t_i - l\Delta t) \rangle_i / \hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2$, $l = 1, 2, \dots$, где угловые скобки означают среднее по моментам наблюдений. При цветных шумах со значительным временем автокорреляции, превышающем интервал τ в дискретной модели (2), АКФ спадает до малой величины на интервале, значительно большем τ . Подобная ситуация возможна и для эталонных нелинейных осцилляторов, где свойства «эффективных фазовых шумов» определяются, например, влиянием существенно меняющихся хаотических амплитуд [5, 17]. При этом АКФ фазовых шумов может спадать долго, распределение не быть нормальным и т.п.

В работе [16] была предложена поправка к оценке времени запаздывания, учитывающая

эту трудность. Для этого оценивается АКФ $C_k(l\Delta t)$ по остаточным ошибкам модели и определяется время ее спада T до некоторой малой величины (для рядов длиной порядка 100 характерных периодов эмпирически подобранная величина 0.2 дает приемлемый результат). Количество независимых значений ε_k на длине ряда определяется временем T . Оно оценивается снизу как $N'' = \frac{N\Delta t}{L}$, где $L = \max[T, \tau]$, так как значения шумов практически некоррелированы, если разделены интервалом длины L . Тогда оценка дисперсии $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$ принимает вид

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2}{N''} \left(\frac{\partial^2 s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})}{\partial \Delta_{j \rightarrow k}^2} \Big|_{\Delta_{j \rightarrow k} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k}} \right)^{-1}. \quad (5)$$

В остальном формализм остается тем же.

Ошибки оценки из-за влияния нелинейной амплитудной динамики

Для исследования эффективности описанного метода в более общей ситуации, чем фазовые осцилляторы с белыми или цветными шумами [15, 16], рассмотрим систему связан-



ных осцилляторов Ресслера, в которых свойства эффективных фазовых шумов определяются

влиянием амплитуды и «третьей» координаты z и могут быть весьма нетривиальными [5, 17]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\omega_1 y_1(t) - z_1(t) + \xi_1, \\ \dot{y}_1(t) = \omega_1 x_1(t) + a y_1(t), \\ \dot{z}_1(t) = b - z_1(t)(r - x_1(t)); \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_2(t) = -\omega_2 y_2(t) - z_2(t) + \gamma_x(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)) + \xi_2, \\ \dot{y}_2(t) = \omega_2 x_2(t) + a y_2(t) + \gamma_y(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)), \\ \dot{z}_2(t) = b - z_2(t)(r - x_2(t)). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\xi_{1,2}$ – белые шумы с автоковариационными функциями $\langle \xi_k(t) \xi_k(t') \rangle = D_k \delta(t - t')$, γ_x, γ_y – коэффициенты связи. Рассматривались два вида связи: только в уравнении для x ($\gamma_x = 0.05, \gamma_y = 0$) или только для y ($\gamma_x = 0, \gamma_y = 0.05$). Время запаздывания принималось равным $\Delta_0 = 12$, угловые частоты $\omega_1 = 1.015, \omega_2 = 0.985$, $a = 0.1$, $b = 0.1$, параметр r изменялся в широком диапазоне, обеспечивая различные динамические режимы [20], от цикла периода один через каскад бифуркаций удвоения периода до хаоса.

Для получения временных рядов уравнения (6) интегрировались методом Эйлера с шагом 0.001. Анализировались сигналы $x_{1,2}$ с интервалом выборки $\Delta t = 0.3$ (20 точек на периоде), фазы рассчитывались с помощью преобразования Гильберта (см., например, [5, 19]). При каждом наборе значений параметров генерировалось 100 пар временных рядов и подсчитывалась частота f_{err} ложных выводов о величине запаздывания, т.е. таких ситуаций, когда Δ_0 не принадлежит интервалу $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr} \pm 1.96 \hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}$. Оценка применима, если вероятность ложных выводов не больше 0.05, так как доверительный интервал – 95%-ный. При учете статистических флуктуаций частоты f_{err} , которая распределена по

закону Бернулли, допустимое пороговое значение f_{err} для указанного размера ансамбля составляет 0.1 [15, 16].

На рис. 2 и 3 приведены результаты оценки времени запаздывания связи в системе (6) при $\gamma_x = 0.05, \gamma_y = 0$ для периодического ($r = 4$) и хаотического ($r = 10$) режимов по временным рядам длиной 2000 точек (100 характерных периодов) и 2000 точек (1000 характерных периодов). АКФ остаточных ошибок ε_2 при малом уровне шума в периодическом режиме немонотонно и долго спадает до 0.2 (рис. 2, а), а в хаотическом режиме имеет еще более сложную форму (рис. 3, а) – наблюдаются колебания АКФ с периодом, равным удвоенному основному периоду в спектре мощности $x_2(t)$, что отражает особенности динамики на аттракторе Ресслера (чередование оборотов фазовой траектории по двум разным путям) [1, 10]. На рис. 2, 3 можно выделить «благополучные» случаи, где исследуемый метод обеспечивает вероятность ошибочных выводов не более 0.1: это возмущенный периодический режим при $\sqrt{D_1} > 0.7$ (рис. 2, б, кружки) и возмущенный хаотический режим при $\sqrt{D_1} > 0.6$ (рис. 3, б, кружки) при $N = 2000 \Delta t$. При меньших значениях уровня шума f_{err} превышает 0.1.

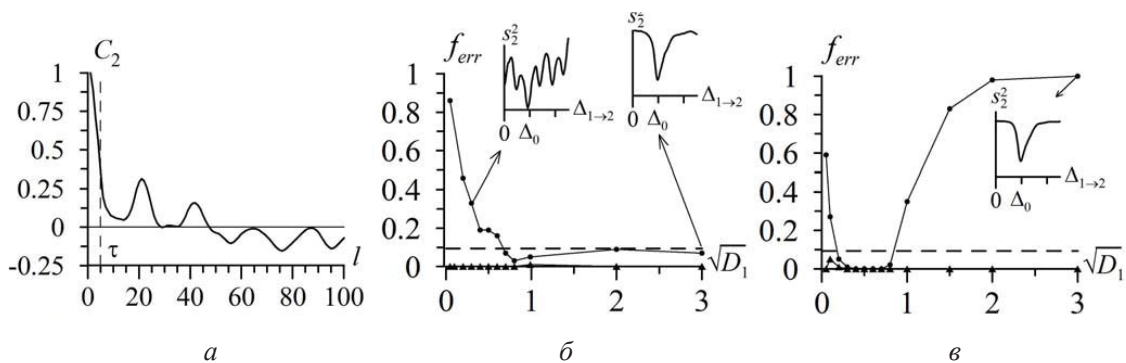


Рис. 2. Оценивание времени запаздывания связи для системы (6) при $\gamma_x = 0.05, \gamma_y = 0$ в периодическом режиме ($a = 0.1, b = 0.1, r = 4$): а – АКФ шумов ε_2 при $\sqrt{D_1} = 0.2, \sqrt{D_2} = 0.089$; б, в – частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе при $N = 2000$ точек (б) и при $N = 20000$ точек (в); кружки – для асимптотического метода, треугольники – для модифицированной «огрубленной» оценки; на вставках – графики $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельных рядов: б – левая – для $\sqrt{D_1} = 0.3, \sqrt{D_2} = 0.089$, правая – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$; в – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$

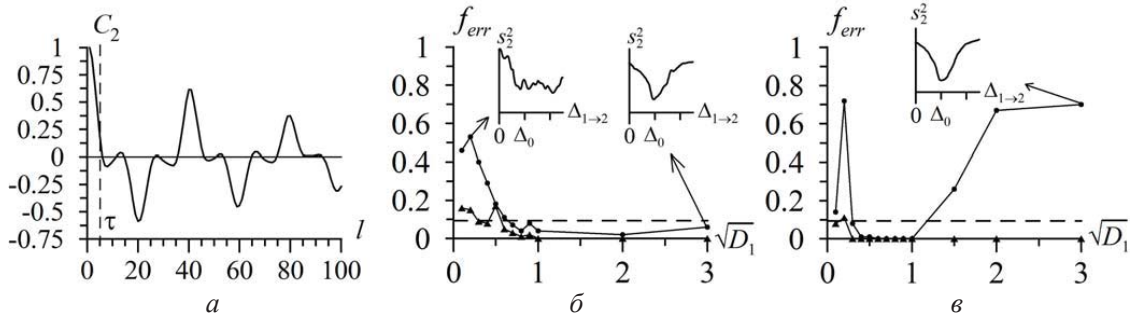


Рис. 3. Оценивание времени запаздывания связи для системы (6) при $\gamma_x = 0.05, \gamma_y = 0$ в хаотическом режиме ($a = 0.1, b = 0.1, r = 10$): a – АКФ шумов ε_2 при $\sqrt{D_1} = 0.2, \sqrt{D_2} = 0.089$; \bar{b}, \bar{v} – частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе при $N=2000$ точек (\bar{b}) и при $N=20000$ точек (\bar{v}); кружки – для асимптотического метода, треугольники – для модифицированной «огрубленной» оценки; на вставках – графики $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельных рядов: \bar{b} – левая – для $\sqrt{D_1} = 0.2, \sqrt{D_2} = 0.089$, правая – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$; \bar{v} – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$

При увеличении длины анализируемого ряда наблюдается большая вероятность ошибочных выводов (рис. 2, \bar{v} , рис. 3, \bar{v} , кружки) при $\sqrt{D_1} > 0.9$ в случае периодического режима и при $\sqrt{D_1} > 1$ в случае хаотического режима. Это вызвано тем, что смещение оценки $\hat{\Delta}_{1 \rightarrow 2}$ относительно истинного времени запаздывания во взаимодействии Δ_0 отличается от ожидаемого для независимых гауссовых шумов значения $-\tau/2$ (по-видимому, это возникает из-за специфических особенностей взаимодействия фаз и амплитуд при данном способе введения связи). При этом ширина доверительного интервала при увеличении длины ряда становится очень мала, приводя к ошибкам. Можно сказать, что при наблюдаемом не вполне верном учете возможного смещения метод дает неоправданно «узкую» интервальную оценку.

При другом способе введения связи ($\gamma_x = 0, \gamma_y = 0.05$) результаты отличаются в сторону большего числа проблематических ситуаций (рис. 4, \bar{b}, \bar{v} , рис. 5, \bar{b}, \bar{v} , кружки), а именно в случае периодического режима f_{err} превышает допустимый уровень 0.1 даже при значительных уровнях шума в ведущей системе $\sqrt{D_1}$ даже при $N = 2000 \Delta t$. Это вызвано еще более существенным по сравнению с предыдущим примером смещением точки минимума $\hat{\Delta}_{1 \rightarrow 2}$ относительно Δ_0 . При малых значениях уровня шума $\sqrt{D_1}$ ($0.2 < \sqrt{D_1} < 0.9$) частота ложных выводов f_{err} не больше требуемого уровня, что обусловлено учетом долгого спада автокорреляционной функции остатков модели до порогового значения 0.2 (рис. 4, a), при увеличении $\sqrt{D_1}$ АКФ начинает спадать быстрее, что приводит к сужению доверительного интервала и увеличению количества ошибок.

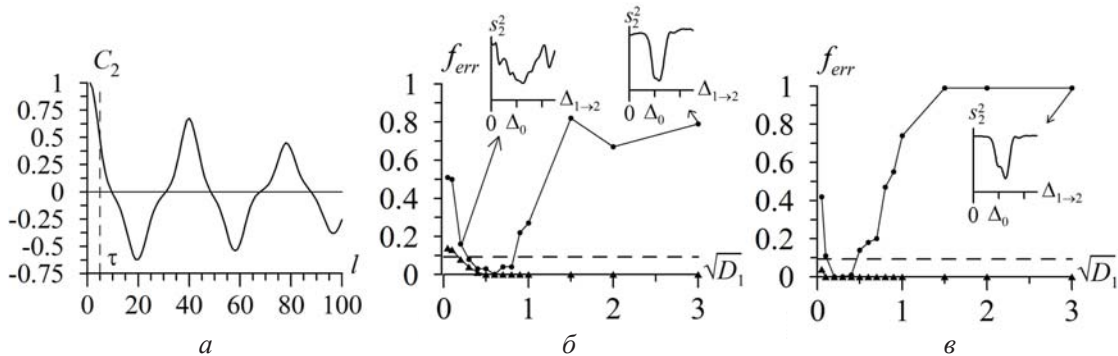


Рис. 4. Оценивание времени запаздывания связи для системы (6) при $\gamma_x = 0, \gamma_y = 0.05$ в периодическом режиме ($a = 0.1, b = 0.1, r = 4$): a – АКФ шумов ε_2 при $\sqrt{D_1} = 0.2, \sqrt{D_2} = 0.089$; \bar{b}, \bar{v} – частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе при $N=2000$ точек (\bar{b}) и при $N=20000$ точек (\bar{v}); кружки – для асимптотического метода, треугольники – для модифицированной «огрубленной» оценки; на вставках – графики $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельных рядов: \bar{b} – левая – для $\sqrt{D_1} = 0.2, \sqrt{D_2} = 0.089$, правая – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$; \bar{v} – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$

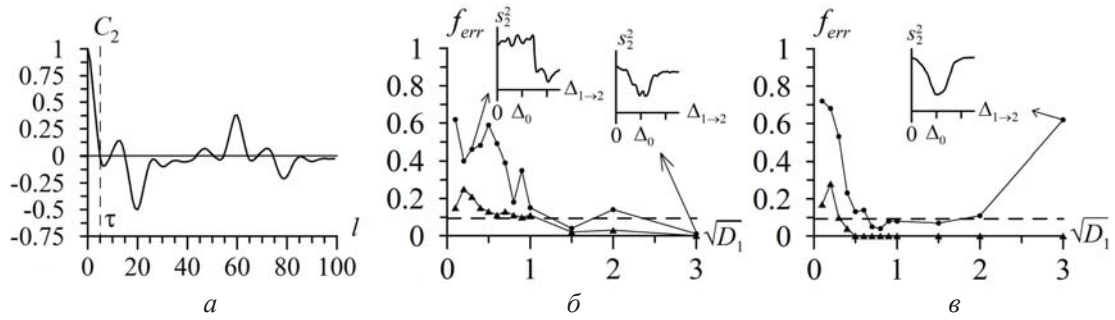


Рис. 5. Оценивание времени запаздывания связи для системы (6) при $\gamma_x = 0, \gamma_y = 0.05$ в хаотическом режиме ($a = 0.1, b = 0.1, r = 10$): *a* – АКФ шумов ε_2 при $\sqrt{D_1} = 0.2, \sqrt{D_2} = 0.089$; *б, в* – частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе при $N = 2000$ точек (*б*) и при $N = 20000$ точек (*в*); кружки – для асимптотического метода, треугольники – для модифицированной «огрубленной» оценки; на вставках – графики $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельных рядов: *б* – левая – для $\sqrt{D_1} = 0.3, \sqrt{D_2} = 0.089$, правая – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$; *в* – для $\sqrt{D_1} = 3, \sqrt{D_2} = 0.089$

Заметим, что рассмотренные ситуации отличаются от ранее предполагавшихся независимых гауссовых шумов тем, что график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ не близок к параболе. По этому признаку мы предлагаем диагностировать проблемы. А именно несимметричность графика относительно точки минимума (вставки на рис. 2, *б, в*, рис. 3, *б, в*, рис. 4, *б, в*, рис. 5, *б, в*), наличие точек перегиба или дополнительных глубоких локальных минимумов свидетельствуют о том, что рассматриваемый метод может дать ошибочные оценки. Оказывается, что во всех рассмотренных проблематических ситуациях такой критерий позволяет выявить опасность ошибок

Огрубленные оценки

Полагаем, что перспективной идеей для получения более надежных оценок запаздывания в таких случаях является отказ от локальной аппроксимации графика параболой и грубая оценка ширины глобального минимума. В соответствии с ней ниже мы предлагаем возможные конкретные варианты дополнения «асимптотического» метода оценки времени запаздывания связи, основанного на формализме максимального правдоподобия, более грубым методом. Рассмотрим график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для системы (6) при $\gamma_x = 0.05, \gamma_y = 0$ (рис. 6). Пусть $s_{2, \min}^2 = \min_{\Delta_{1 \rightarrow 2}} s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ – минимальное значение s_2^2 в выбранном диапазоне пробных запаздываний $\Delta_{1 \rightarrow 2}$, а $s_{2, \max}^2 = \max_{\Delta_{1 \rightarrow 2}} s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ – максимальное. Проведем линию $y(\Delta_{1 \rightarrow 2}) = s_{2, \min}^2 + (s_{2, \max}^2 - s_{2, \min}^2) / 2$ и примем в качестве интервальной оценки отрезок между точками пересечения $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$

и $y(\Delta_{1 \rightarrow 2})$, а именно $[\Delta_L; \Delta_R]$, где Δ_L – левая точка пересечения, Δ_R – правая (рис. 6). Ширина доверительного интервала тогда равна $M = |\Delta_R - \Delta_L|$.

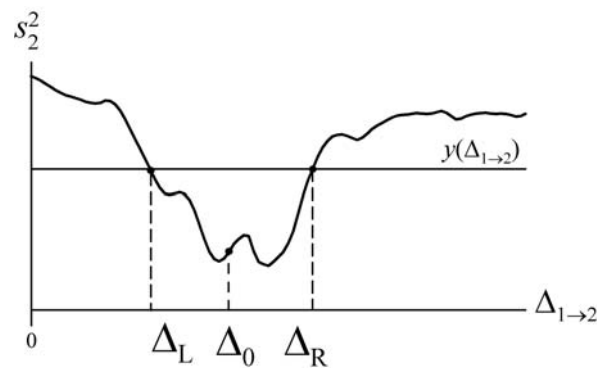


Рис. 6. Иллюстрация модифицированной интервальной оценки запаздывания

Используя такую модифицированную оценку, мы получили вероятность ошибочных оценок менее 0.05 во всех рассмотренных случаях за счет некоторого уширения доверительного интервала (см. рис. 2–5, треугольники). Например, f_{err} при $\gamma_x = 0.05, \gamma_y = 0, \sqrt{D_1} = 2, \sqrt{D_2} = 0.089, N = 1000$ периодов для такого «глобального» метода равна 0 (при доверительном интервале шириной $\pm 15\Delta t$), тогда как исходный «локальный» метод дает $f_{err} = 0.98$.

Судя по проведенным численным экспериментам, средний уровень – это величина, пригодная «с запасом», чтобы избежать ошибочных выводов для широкого класса колебательных систем. Такие оценки называют также «консер-



вативными». Чтобы получить более узкий доверительный интервал, можно использовать величину u не на среднем уровне между «фоном» и минимумом, а несколько ниже. Такое значение u следует подбирать эмпирически для тех или иных классов осцилляторов, чтобы частота ошибочных выводов о величине запаздывания была не более заданного уровня значимости 0.05. Это требует дополнительных исследований. В тех случаях, когда нужна повышенная надежность вывода о наличии запаздывания связи и ошибки крайне нежелательны, уместна предложенная оценка с использованием секущей на среднем уровне.

Приложение к реальным данным

В качестве примера применения обеих интервальных оценок (асимптотической и огрубленной) для анализа реальных сложных процессов рассмотрим задачу исследования взаимодействия процессов ЭНЮК и САК, которые представляют собой ведущие моды межгодовой климатической изменчивости в целом для Земли и для Северного полушария [21]. Выявление механизмов, формирующих эти процессы, – проблема большого фундаментального и практического значения. Особый интерес вызывает вопрос о наличии и характере взаимного влияния ЭНЮК и САК. В [13, 14] выявлено влияние ЭНЮК на САК с помощью метода моделирования фазовой динамики и высказано предположение о наличии запаздывания около 20–24 месяцев. Однако из-за отсутствия интервальных оценок времени запаздывания этот вывод нельзя было сделать с надежностью. Используем рассмотренные в данной работе оценки для уточнения этого вопроса.

Для анализа в качестве характеристики САК в [13, 14] использовалась первая мода разложения поля высоты изобарической поверхности 500 гПа в средней тропосфере Северного полушария на основе анализа «повернутых главных компонент» [22]. Индекс САК (x_1), таким образом, является характеристикой (модой) полушарного масштаба. В качестве индекса Эль-Ниньо (x_2) использовалась величина Т(Ниньо-3,4), характеризующая ТПО в соответствующей экваториальной области Тихого океана (Ниньо-3,4 – 5°N–5°S, 170°W–120°W) (все данные доступны на сайте <http://www.ncer.noaa.gov>). Следует отметить, что временные ряды с надежными данными для этих характеристик являются сравнительно короткими – со второй половины XX века (с 1950

по 2004 г. в [13, 14], т.е. 660 среднемесячных значений, рис. 7, а, б).

Для сопоставления с результатами работ [13, 14] мы использовали для анализа данные за тот же период (1950–2004 гг.). Временные ряды представлены на рис. 7, а, б. Фазы определялись путем построения аналитического сигнала с помощью комплексного вейвлета Морле $\psi(t) = \pi^{-1/4} \exp(-j\omega_0 t) \exp(-t^2/2)$, что эквивалентно полосовой фильтрации и последующему преобразованию Гильберта [23–26], но такой подход менее подвержен краевым эффектам, что важно при анализе коротких сигналов. А именно для сигнала $x_k(t)$ определяется комплексный сигнал

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t') \psi^*((t-t')/s) dt',$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, s – фиксированный временной масштаб. Фаза рассчитывается как аргумент комплексной величины $z_k(t)$. При этом имеет место полосовая фильтрация сигнала $x_k(t)$ с центральной частотой $f \approx \frac{\omega_0}{2\pi s}$, где ширина полосы определяется параметром ω_0 . При использовавшемся в [13, 14] и ниже $\omega_0 = 6$ она равна примерно 1/4 от центральной частоты $f \approx 1/s$, а краевые эффекты проявляются на интервалах длиной 1.4s [27, 28]. В [13, 14] оценивались связи при различных s , т.е. для различных «ритмов» в САК и ЭНЮК. Выводы о наличии связи получены при $s = 32$ месяца для обоих сигналов. На рис. 7, а, б пунктиром показаны временные реализации вещественной части вейвлет-коэффициента, соответствующего $s = 32$ мес.

На рис. 7, в, г представлена зависимость $s_1^2(\Delta_{2 \rightarrow 1})$ при $\tau = 8$ мес. и АКФ остаточных ошибок модели. На графике $s_1^2(\Delta_{2 \rightarrow 1})$ наблюдается минимум при $\Delta = 32$ мес. Аппроксимирующая парабола показана тонкой линией. Соответствующая «асимптотическая» точечная оценка времени запаздывания составляет $\hat{\Delta}_{2 \rightarrow 1} = 36$ мес., а интервальная оценка от 29 до 43 мес., что подтверждает прежние предположения [13, 14] о наличии запаздывания этой связи.

При этом на графике $s_1^2(\Delta_{2 \rightarrow 1})$ имеются локальные минимумы, и согласно наиболее осторожному подходу есть основания применить огрубленную оценку, хотя эти минимумы не столь выраженные, поэтому возможно применимы приближение фазовых осцилляторов

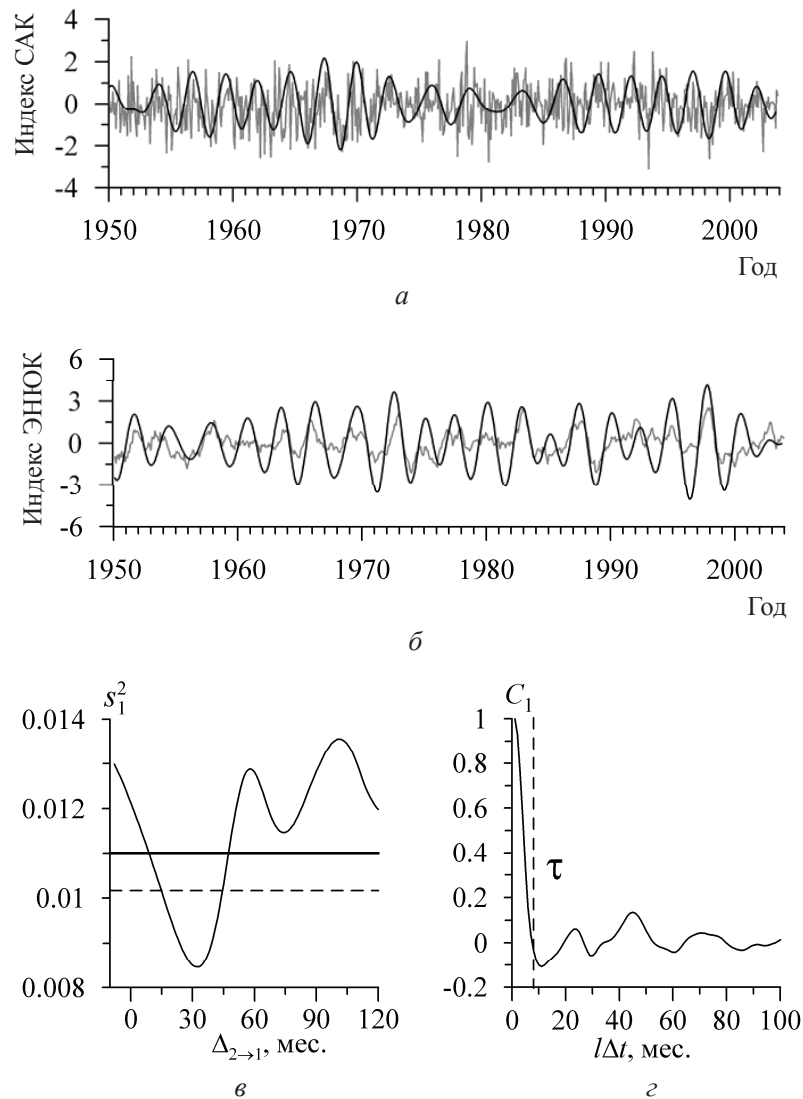


Рис. 7. Анализ запаздывания в связи между ЭНЮК на САК: *а, б* – временные ряды индексов САК (*а*) и ЭНЮК (*б*) (серые линии) и вейвлет-коэффициенты для масштаба $s = 32$ месяца (черные); *в* – зависимость $s_1^2(\Delta_{2 \rightarrow 1})$, горизонтальные линии: секущая на половинном уровне $y(\Delta_{2 \rightarrow 1}) = s_{2, \min}^2 + (s_{2, \max}^2 - s_{2, \min}^2) / 2$ (сплошная линия), секущая на уровне 1/3 $y(\Delta_{2 \rightarrow 1}) = s_{2, \min}^2 + (s_{2, \max}^2 - s_{2, \min}^2) / 3$ (штриховая линия); *г* – АКФ остатков модели, вертикальная пунктирная линия показывает значение $\tau = 8$ месяцев

с гауссовыми шумами и использованный выше асимптотический метод. Даже при использовании секущей на среднем уровне это дает интервальную оценку запаздывания от 8 до 47 мес., т.е. интервал не включает ноль, что вновь подтверждает вывод о наличии запаздывания.

Заключение

В работе показано, что асимптотический метод оценки времени запаздывания связи [15,

16], основанный на моделировании фазовой динамики, может давать ошибочные выводы о наличии запаздывания в случае систем, у которых маломерная нелинейная динамика амплитуд существенно влияет на фазы (например, для систем Ресслера с малым динамическим шумом). Для диагностики этой ситуации предложен критерий, основанный на форме графика зависимости ошибки модели от пробного запаздывания. Для получения более надежных оценок предложен



огрубленный метод, основанный на оценке «ширины» глобального минимума этой зависимости.

Оба метода применены для оценки связи между климатическими процессами Эль-Ниньо-Южное колебание и Северо-Атлантическое колебание. Прежнее [13, 14] предположение о наличии запаздывающего влияния ЭНЮК на САК подтверждается в рамках модели фазовых осцилляторов при использовании как асимптотического, так и огрубленного метода, даже в его наиболее консервативной форме (секущая на среднем уровне). Заметим, что несколько более «слабый» вариант огрубленного метода (секущая на уровне $1/3$, рис. 7, в штриховая линия) дает заметно более узкий доверительный интервал, т.е. «уточняет» оценку времени запаздывания. Однако выбор секущей при расчете огрубленной оценки требует дополнительных исследований, и данный пример представляется хорошей иллюстрацией целесообразности таких исследований, а также возможностей и места каждого из методов (асимптотического и огрубленного) при практическом использовании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00291).

Список литературы

1. Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 529 с.
2. Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Extracting knowledge from time series : An introduction to nonlinear empirical modeling. Berlin : Springer-Verlag, 2010. 432 p.
3. Loskutov E. M., Molkov Ya. I., Mukhin D. N., Feigin A. M. Markov chain Monte Carlo method in Bayesian reconstruction of dynamical systems from noisy chaotic time series // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. P. 066214.
4. Molkov Y. I., Mukhin D. N., Loskutov E. M., Timushev R. I., Feigin A. M. Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84. P. 036215.
5. Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М. : Техносфера, 2003. 496 с.
6. Karavaev A. S., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Kiselev Gridnev V. I., Ruban E. I., Bezruchko B. P. Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system // Chaos. 2009. Vol. 19. P. 033112.
7. Smirnov D. A., Bezruchko B. P. Detection of coupling in ensembles of stochastic oscillators // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. P. 046204.
8. Kralemann B., Rosenblum M., Pikovsky A. Reconstructing phase dynamics of oscillator networks // Chaos. 2011. Vol. 21. P. 025104.
9. Smirnov D., Bezruchko B. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 046209.
10. Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A. Estimation of delay in coupling from time series // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 046213.
11. Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А. Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // Успехи физических наук. 2008. Т. 178, № 3. С. 323.
12. Smirnov D., Barnikol U. B., Barnikol T. T., Bezruchko B. P., Hauptmann C., Buehrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H. -J., Tass P. A. The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // Europhys. Lett. 2008. Vol. 83. P. 20003.
13. Mokhov I. I., Smirnov D. A. El Nino-Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // Geophys. Res. Lett. 2006. Vol. 33. P. L03708.
14. Mokhov I. I., Smirnov D. A. Study of the Mutual Influence of the El Nino-Southern Oscillation Processes and the North Atlantic and Arctic Oscillations // Izvestiya, Atmospheric And Oceanic Physics. 2006. Vol. 42, № 5. P. 598-614.
15. Смирнов Д. А., Сидак Е. В., Безручко Б. П. Интервальные оценки времени запаздывания связи по временным рядам // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 3, вып. 1. С. 64-71.
16. Сидак Е. В., Смирнов Д. А., Безручко Б. П. Оценка времени запаздывания воздействия по временным рядам с учетом автокорреляционной функции фазового шума // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, вып. 20. С. 104-110.
17. Smirnov D., Sidak E., Bezruchko B. Detection of coupling between oscillators with analytic tests for significance // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. Vol. 222. P. 2441-2451.
18. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin : Springer-Verlag, 1984. 176 p.
19. Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Phase synchronization in regular and chaotic systems // Intern. J. Bifurc. Chaos. 2000. Vol. 10. P. 2291-2305.
20. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И. Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. С. 163-179.
21. Climate Change 2001 : The Scientific Basis. Intergovernmental Panel on Climate Change / eds. J. T. Houghton, Y. Ding, D. J. Griggs, M. Noguer [et al.]. Cambridge : Cambridge Univ. Press. 2001. 881 p.
22. Barnston A. G., Livezey R. E. Classification, seasonality and persistence of low frequency atmospheric circulation patterns // Mon. Wea. Rev. 1987. Vol. 115. P. 1083.
23. Lachaux J. P., Rodriguez E., Le Van Quyen M., Lutz A., Martinerie J., Varela F. J. Studying single-trials of phase synchronous activity in the brain // Intern. J. Bif. Chaos. 2000. Vol. 10. P. 2429.



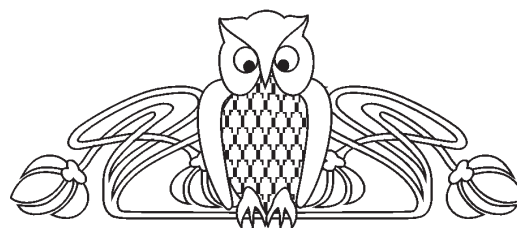
24. Kraskov A. Synchronization and Interdependence Measures and their Applications to the Electroencephalogram of Epilepsy Patients and Clustering of Data: Dissertation (PhD thesis). Research Centre Jülich, John von Neumann Institute for Computing, 2004. 90 p.
25. Kraskov A., Kreuz T., Andrzejak R. G., Stoegbauer H., Nadler W., Grassberger P. Extracting phases from aperiodic signals. 2004. arXiv:cond-mat/0409382. URL: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0409382>.
26. Короновский А. А., Макаров В. А., Павлов А. Н., Ситникова Е. Ю., Храмов А. Е. Вейвлеты в нейродинамике и нейрофизиологии. М. : Физматлит, 2013. 272 с.
27. Torrence C., Compo G. P. A practical guide to wavelet analysis // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 1998. Vol. 79. P. 61.
28. Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М. : Физматлит, 2003. 170 с.

УДК 535.015, 617.7, 617.715, 57.085.2

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОПТИЧЕСКОГО ПРОСВЕТЛЕНИЯ ПРИ УКРЕПЛЕНИИ СКЛЕРЫ МЕТОДОМ ФОТОСШИВАНИЯ КОЛЛАГЕНА

М. Е. Швачкина, А. Б. Правдин

Саратовский государственный университет
E-mail: marevesh@mail.ru



В работе приведен первый оценочный результат по влиянию оптического просветления на эффективность методики укрепления склеры глаза путем формирования рибофлавин/УФ фотосшивок коллагена. В предварительной серии экспериментов была рассмотрена эффективность оптического просветления склеры различными просветляющими агентами в ультрафиолетовой области (на длине волны 370 нм) и также было показано, что оптическое просветление образца склеры чистым глицерином с последующей регидратацией не приводит к изменениям его механических свойств. В эксперименте по рибофлавин/УФ фотосшиванию коллагена показано, что оптическое просветление образца склеры свиньи глицерином в идентичных (по отношению к контролю) условиях обработки рибофлавином и последующего УФ облучения приводит к большему увеличению эффективной жесткости склеры при малых деформациях.

Ключевые слова: фотосшивка коллагена, миопия, механические свойства склеры, оптическое просветление.

On the Use of Optical Clearing in Strengthening the Sclera by Collagen Photocrosslinking

М. Е. Shvachkina, A. B. Pravdin

In the paper, the first evaluation results on the effect of optical clearing on the efficiency of the technique of eye sclera strengthening through the formation of riboflavin / ultraviolet collagen photocrosslinks are presented. In a series of preliminary experiments the effectiveness of different optical clearing agents in clearing sclera in ultraviolet region (370 nm) was studied, and it was also shown that the optical clearing of sclera sample with pure glycerol with subsequent rehydration did not change its mechanical properties. In the experiment on riboflavin / UV collagen photocrosslinking it was shown that the optical clearing of the porcine sclera sample with glycerol, the conditions of treatment with riboflavin and subsequent UV irradiation being identical to the control, leads to a

greater increase in the effective stiffness of sclera at small strains.

Key words: collagen photocrosslinking, myopia, sclera mechanical properties, optical clearing.

DOI: 10.18500/1817-3020-2015-15-4-37-41

В настоящее время одним из распространенных глазных заболеваний является близорукость [1, 2]. Серьезной формой данного заболевания является прогрессирующая миопия, характеризующаяся быстрым падением остроты зрения за короткий промежуток времени. Одной из главных причин развития близорукости является растяжение и истончение склеры.

Склера представляет собой плотную соединительную ткань, которая в основном состоит из коллагеновых волокон, упакованных в пучки в виде ламелей и формирующую характерную слоистую структуру. Примерно 90% от толщины склеры составляет строма, которая в значительной степени определяет ее биомеханические свойства. Строма склеры состоит из косо расположенных и переплетающихся пучков коллагеновых волокон различной толщины и длины, эластических волокон, незначительного количества основного вещества, представленного нейтральными и кислыми мукополисахаридами, а также клеток (склероциты) [3]. Коллагеновые волокна упакованы в пучки и лежат в них параллельно друг другу, однако не так регулярно, как в роговице. Пучки волокон имеют широкий разброс по ширине (1–50 мкм) и толщине (0,5–