



ФИЗИКА

УДК 621.396.1

КОМПЕНСАЦИЯ ПОТЕРЬ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНЕРЦИОННЫХ ИНДУКТИВНЫХ И ЕМКОСТНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

В. С. Анищенко, А. В. Хохлов

Саратовский государственный университет
E-mail: Wadim@info.sgu.ru, hohlov@info.sgu.ru

Введены обобщенные линейные инерционные двухполюсники и рассмотрены собственные колебания в последовательном LCR-контуре с инерционным индуктивным элементом второго порядка. Показано, что введение элемента второго порядка эквивалентно внесению в контур отрицательного трения.

Ключевые слова: колебательный контур, потери, инерционный индуктивный двухполюсник, добротность, отрицательное трение, имитатор индуктивности.

Compensation for Losses in a Resonant Circuit when Using Inertial Inductive and Capacitive Two-poles

V. S. Anishchenko, A. V. Khokhlov

Generalized linear inertial two-poles are introduced, and the eigen-oscillations are considered in a series resonant LCR-circuit with a second-order inertial inductive element. It is shown that the introduction of the second order element is equivalent to entering negative damping into the resonant circuit.

Key words: oscillatory circuit, losses, inertial inductive two-pole, Q-factor, negative damping, inductance simulator.

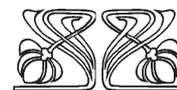
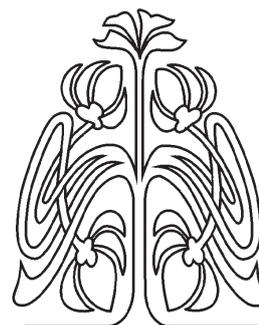
DOI: 10.18500/1817-3020-2015-15-4-5-9

Простейшими элементами радиоэлектроники являются линейные безынерционные сопротивления, индуктивности и емкости [1, 2]. Практические потребности привели к необходимости исследований и создания нелинейных и инерционных элементов радиоцепей, таких как термисторы, мемристоры, нелинейные емкости и др. [3].

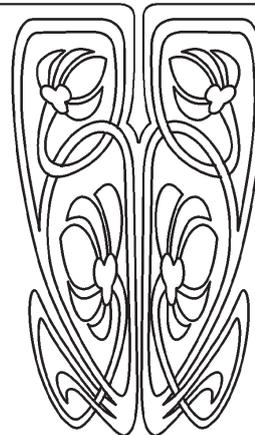
Целью настоящей работы является теоретический и экспериментальный анализ свойств линейных инерционных индуктивности и емкости.

Теоретический анализ. Падение напряжения $U(t)$ на линейном безынерционном индуктивном элементе L при прохождении тока $I(t)$ описывается классическим соотношением $U(t) = R I + L \frac{dI}{dt}$, где R – сопротивление потерь. Если падение напряжения на индуктивном элементе зависит от более высоких производных протекающего тока, то функцию $U(t)$ будем представлять в виде

$$U(t) = R I + L \frac{dI}{dt} + W_L^{(2)} \frac{d^2 I}{dt^2} + W_L^{(3)} \frac{d^3 I}{dt^3} + W_L^{(4)} \frac{d^4 I}{dt^4} + \dots, \quad (1)$$



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





где $W_L^{(i)}$ – постоянные коэффициенты, имеющие соответствующие размерности, $L = \text{const}$. В дальнейшем ограничимся случаем $W_L^{(3)} = W_L^{(4)} = \dots = 0$, т.е. будем считать

$$U(t) = R I + \frac{d}{dt} \left(L I + W_L^{(2)} \frac{dI}{dt} \right). \quad (2)$$

В случаях (1) и (2) индуктивность обладает инерционными свойствами, но остается линейной. Аналогично можно рассмотреть случай инерционной емкости. Если ток $I(t)$, протекающий через емкость C , зависит от более высоких производных воздействующего на него напряжения, то для зависимости $I(t)$ получаем:

$$I(t) = G U + C \frac{dU}{dt} + W_C^{(2)} \frac{d^2 U}{dt^2} + W_C^{(3)} \frac{d^3 U}{dt^3} + W_C^{(4)} \frac{d^4 U}{dt^4} + \dots \quad (3)$$

или в предположении, аналогичном (2),

$$I(t) = G U + \frac{d}{dt} \left(C U + W_C^{(2)} \frac{dU}{dt} \right), \quad (4)$$

где G – проводимость, $C = \text{const}$.

Двухполосники, подчиняющиеся соотношениям (1), (3) будем рассматривать как обобщенные линейные инерционные элементы [4]. Приближения (2), (4) назовем обобщенными реактивными элементами второго порядка. Подобные реактивные элементы высокого порядка были рассмотрены в работах Филиппова [5, 6].

Рассмотрим процесс собственных колебаний в последовательном LCR -контуре с обобщенным индуктивным элементом второго порядка. Пусть емкость C , заряженная до напряжения U_0 , соединена с обобщенным индуктивным элементом, полное падение напряжения на котором описывается выражением (2). Собственные колебания в контуре подчиняются уравнениям

$$L \frac{dI}{dt} + R I + W_L^{(2)} \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad (5)$$

или

$$\frac{d^3 I}{dt^3} + A \frac{d^2 I}{dt^2} + B \frac{dI}{dt} + D I = 0, \quad (6)$$

где $A = L/W_L^{(2)}$, $B = R/W_L^{(2)}$, $D = 1/C W_L^{(2)}$. Будем искать решение уравнения (6) в виде $I(t) = I_0 \exp(kt)$. Для определенности выберем следующие значения параметров $R = 1$ Ом, $L = 1$ мГ, $W_L^{(2)} = 9.1$ мкГ·с, т.е. $|W_L^{(2)}| < 0.01 |L|$, $C = 10$ мФ. Получим характеристическое кубическое уравнение:

$$k^3 + 110 k^2 + 110\,000 k + 11 \cdot 10^6 = 0. \quad (7)$$

Решение кубического уравнения (7) по формуле Кардано [7] дает следующие значения корней:

$k_1 = -100.846$, $k_{2,3} = -4.577 \pm j 330.236$, что соответствует следующим решениям уравнения (7):

$$I_1(t) = I_{01} \exp(-100.846t),$$

$$I_2(t) = I_{02} \exp(-4.577t + j330.236t),$$

$$I_3(t) = I_{03} \exp(-4.577t - j330.236t).$$

Первое решение – это экспоненциально затухающее аperiodическое изменение тока, а сумма второго и третьего решений представляет затухающее квазигармоническое колебание $I(t) = I_0 \exp(-4.577t) \cos(330.236t)$. Если $W_L^{(2)} = 10$ мкГ·с, то собственные колебания будут незатухающими, а при $W_L^{(2)} > 10$ мкГ·с они начинают нарастать. Если $W_L^{(2)} = 10.01$ мкГ·с, то $I_1(t) = I_{01} \exp(-100.146t)$, а сумма второго и третьего решений представляет нарастающее колебание $I(t) = I_0 \exp(0.045t) \cos(316.08t)$. С учетом коэффициента затухания -4.577 можно определить добротность колебательной системы как $Q = 330.236/2 \cdot 4.577 = 36$. Если колебательный контур не содержит обобщенного индуктивного элемента второго порядка, т.е. $W_L^{(2)} = 0$, то при заданных L , C и сопротивлении $R = 0.1$ Ом в ней возникнут затухающие колебания вида $I(t) = I_0 \exp(-50t) \cos(312.25t)$.

Таким образом, при использовании в колебательной системе обобщенного индуктивного элемента коэффициент затухания резко уменьшается (4.577 вместо 50). Это означает, что в колебательной системе возникает отрицательное сопротивление, позволяющее уменьшить потери (эквивалентное сопротивление контура $1 - (330.236)^2 W_L^2 \cong 7.6 \cdot 10^{-3}$ Ом) и увеличить добротность контура почти в 100 раз.

Рассмотрим механизм образования отрицательного сопротивления в обобщенном индуктивном элементе более подробно. Для этого сопоставим два индуктивных элемента с одинаковыми значениями параметров L и R , напряжение на одном из которых (рис. 1, а) зависит только от величины тока и его первой производной, а напряжение на втором (обобщенном) индуктивном элементе зависит еще и от второй производной тока. Вторую цепь можно представить соединением индуктивности L , сопротивления R и «индуктивности второго порядка» $W_L^{(2)}$ (рис. 1, б). Тогда полное падение напряжения на первом индуктивном элементе (рис. 1, в) описывается классической формулой, а полное падение напряжения на втором элементе



(рис. 1, *з*) удовлетворяет соотношению (2). При этом, как показывает решение уравнения (6), на процессы, протекающие во втором индуктивном элементе, заметно влияет даже малая величина $W_L^{(2)}$ по сравнению с L .

Так как оба индуктивных элемента обладают резистивным сопротивлением, часть мощности, поступающей от источника тока $I(t)$, расходуется на потери, остальная мощность циркулирует между источником тока и элементами цепи.

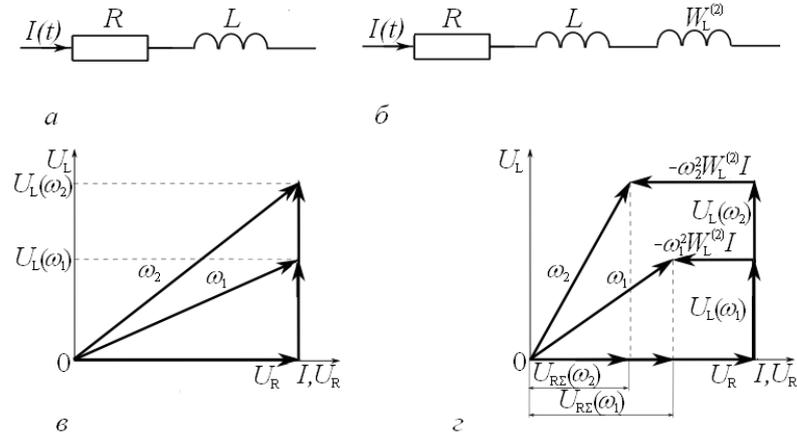


Рис. 1. Электрические схемы простого (*а*) и обобщенного (*б*) индуктивных двухполюсников и диаграммы распределения напряжений в простом (*в*) и обобщенном (*г*) индуктивном двухполюсниках

Когда через обычный двухполюсник (см. рис. 1, *а*) протекает гармонический ток $I(t) = I_m \sin \omega t$, где I_m – амплитуда, ω – частота тока, на сопротивлении R возникает напряжение $U_R = I_m R \sin \omega t$, на индуктивности L – напряжение $U_L = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t$, а полное напряжение на двухполюснике имеет амплитуду $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$ (см. рис. 1, *в*). С ростом частоты воздействия ω амплитуды напряжений U_L и U возрастают, но амплитуда напряжения U_R остается неизменной. Когда такой же ток $I(t)$ поступает на обобщенный индуктивный элемент (см. рис. 1, *б*), на его зажимах возникает напряжение, содержащее согласно (2) три компоненты. На сопротивлении R и на индуктивности L возникают точно такие же напряжения, как в первом случае, т.е. $U_R = I_m R \sin \omega t$ и $U_L = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t$, а на элементе $W_L^{(2)}$ (см. рис. 1, *г*) напряжение будет:

$$U_W = W_L^{(2)} \frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega^2 W_L^{(2)} I_m \sin \omega t = -\omega^2 W_L^{(2)} I.$$

По направлению векторы U_W и U_R противоположны, т.е. «индуктивность второго порядка» создает в цепи отрицательное сопротивление $R_W = -\omega^2 W_L^{(2)}$, а результирующее напряжение $U_{R\Sigma}(\omega, t)$ на суммарном резистивном сопротивлении равно

$$U_{R\Sigma}(\omega, t) = U_R + U_W = (R - \omega^2 W_L^{(2)}) I_m \sin \omega t. \quad (8)$$

Заметим, что подбирая параметры ω и $W_L^{(2)}$, можно получить «идеальный» индуктивный элемент, вообще лишенный потерь. Легко показать, что в емкостном двухполюснике, содержащем параллельное соединение емкости C , резистивной проводимости и «емкости второго порядка» $W_C^{(2)}$, при подключении гармонического напряжения $U(t) = U_m \sin \omega t$, где U_m – амплитуда напряжения, ω – его частота, возникает «отрицательная проводимость» $G_W = -\omega^2 W_C^{(2)}$, а результирующий ток принимает вид

$$I(\omega, t) = I_G + I_C + I_W = (G - \omega^2 W_C^{(2)}) U_m \sin \omega t + \omega C U_m \cos \omega t.$$

При дифференцировании гармонической функции ее фаза поворачивается на угол 90° . При повторном дифференцировании фаза гармонической функции дважды поворачивается на этот угол, и результирующий поворот фазы равен 180° , т.е. знаки напряжения U_W на индуктивности второго порядка $W_L^{(2)}$ и напряжения U_R противоположны, что и объясняет возникновение отрицательного сопротивления.

Эксперимент. Электронная схема имитатора индуктивности второго порядка изображена на рис. 2, *а*. Напряжение на входах схемы записывается в виде



$$U = I R_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I + I_1) dt + (I + I_1) R_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t (I + I_1 + I_2) dt + (I + I_1 + I_2) R_3. \quad (9)$$

Если учесть, что напряжения между входами операционных усилителей равны нулю, т.е.

$$I R_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I + I_1) dt = 0,$$

$$(I + I_1) R_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t (I + I_1 + I_2) dt = 0,$$

то
$$I_1 = -I - R_1 C_1 \frac{dI}{dt},$$

$$I_2 = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 I}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{dI}{dt}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$U = R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 \frac{d^2 I}{dt^2},$$

и параметр $W_L^{(2)} = R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 = R^3 C^2$.

Имитатор индуктивности (см. рис. 2, а) был собран на сдвоенном операционном усилителе TL072A. Конденсаторы C_1 и C_2 имели емкость 0.1 мкФ, резисторы $R_1 = R_2$ – постоянное сопротивление 175 Ом, а резистор R_3 подбирался в зависимости от величины параметра $W_L^{(2)}$. Схема соединения имитатора с последовательным колебательным контуром изображена на рис. 2, б. Источник синусоидального сигнала обладал сопротивлением 1 Ом. Колебательный контур с учетом сопротивления источника имел добротность $Q = 24.85$ и был настроен на частоту 9 070 Гц. Резонансная кривая колебательного контура измерялась с помощью измерителя амплитудно-частотных характеристик СК4-56.

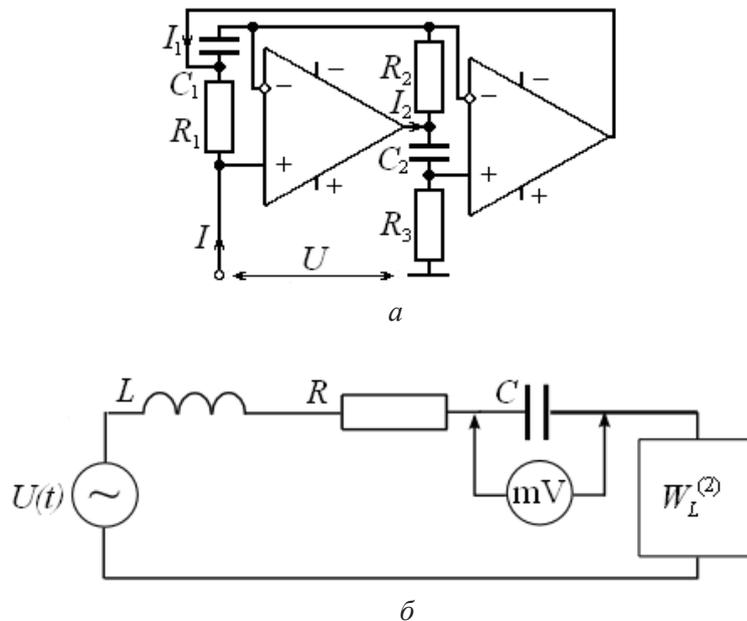


Рис. 2. Электронная схема имитатора индуктивности второго порядка (а) и упрощенная схема измерений в последовательном контуре (б)

Приведенные резонансные кривые колебательного контура представлены на рис. 3 кривой 1 (при отключенном имитаторе индуктивности) и кривой 2 (для колебательного контура с имитатором). Добротность контура Q рассчитывалась по величине полосы пропускания на уровне половинной мощности.

Как следует из рис. 3, использование обобщенной индуктивности привело к увеличению

добротности контура до величины $Q = 112.4$, т.е. в четыре раза. Отметим, что настройка имитатора производилась очень точно, так как при $W_L^{(2)} < 10^{-3}$ мкГн·с добротность контура увеличивалась незначительно, а при $W_L^{(2)} > 9.25 \cdot 10^{-3}$ мкГн·с происходила полная компенсация потерь в контуре и начиналось самовозбуждение на резонансной частоте. Отметим, что полностью аналогичные результаты получены нами с ис-

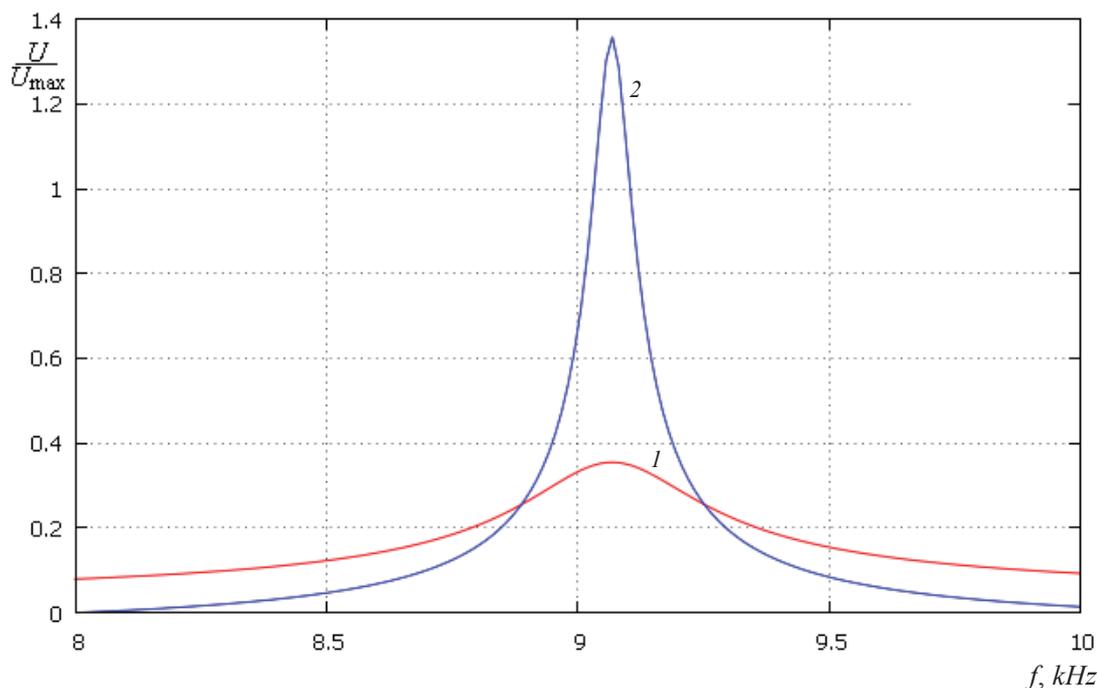


Рис. 3. Резонансные кривые последовательного колебательного контура без индуктивности второго порядка (1) и с индуктивностью второго порядка (2)

пользованием емкостного элемента второго порядка (4). Таким образом, возможность внесения в контур отрицательного трения с помощью обобщенных элементов второго порядка (2) и (4) обоснована нами теоретически и подтверждена экспериментально.

Список литературы

1. Петров К. С. Радиоматериалы, радиокомпоненты и электроника : учеб. пособие. СПб. : Питер, 2003. 506 с.
2. Григорьев Б. И. Элементная база и устройства аналоговой электроники : учеб. пособие. СПб. : СПбГУ ИТМО, 2008 94 с.
3. Itoh M., Chua L. O. Memristor oscillators // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 2008, Vol. 18, № 11. P. 3183–3206.
4. Атабеков Г. И., Купалян С. Д., Тимофеев А. Б., Хохриков С. С. Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле : учеб. пособие. 6-е изд., стер. СПб. ; М. : Лань, 2010. 432 с.
5. Philippow E. Lineare und nichtlineare Transformationsvierpole – Grundlagen, Ertwurt, Anwendung // Zeitschrift für Elektr. Inform. und Energietechnik. Leipzig, 1977. S. 549–567.
6. Филиппов Е., Качан В. И. Математическое описание и устойчивость цепей с искусственными элементами высокого порядка // Изв. вузов. Энергетика. 1983. № 8. С. 24–27.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 11-е изд. М. : Наука, 1975. С. 314.