



## ФИЗИКА

УДК 517.9

### ХАОС В СИСТЕМЕ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ РОТАТОРОВ: ОТ ДИНАМИКИ АНОСОВА К ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМУ АТТРАКТОРУ

С. П. Кузнецов<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

<sup>2</sup>Саратовский государственный университет

<sup>3</sup>Университет Потсдама (Германия)

E-mail: spkuz@yandex.ru

В работе приводится пример системы с хаотической динамикой, построенный на основе трех ротаторов путем модификации консервативной системы с гиперболической динамикой Аносова. Приводятся результаты численного исследования хаотической динамики (портреты аттракторов, реализации, показатели Ляпунова, спектры) и демонстрируется хорошее соответствие динамики на аттракторе предложенной системы с редуцированной моделью, характеризующей динамикой Аносова при соответствующем задании параметра энергии.

**Ключевые слова:** динамическая система, хаос, аттрактор, гиперболичность, динамика Аносова, ротатор, показатель Ляпунова, автоколебания.

#### Chaos in the System of Three Coupled Rotators: from Anosov Dynamics to Hyperbolic Attractor

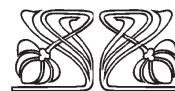
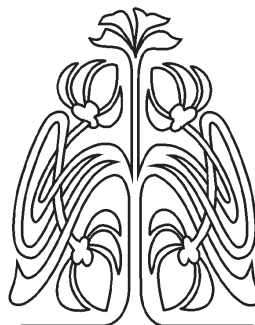
S. P. Kuznetsov

The work presents an example of a system with chaotic dynamics built of three rotators by modifying a conservative system with hyperbolic Anosov dynamics. Results of a computational study of chaotic dynamics are considered (portraits of attractors, time dependences of the variables, Lyapunov exponents, and spectra) and good correspondence is observed between the dynamics on the attractor of the proposed system with the reduced model, characterized by the Anosov dynamics at appropriately defined energy.

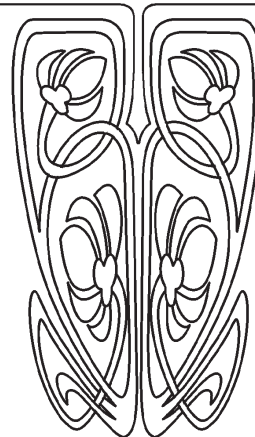
**Key words:** dynamic system, chaos, attractor, hyperbolic dynamics Anosov, rotator, Lyapunov exponent, the self-oscillation.

#### Введение

Ротатор в механике можно представить как твердое тело, способное вращаться вокруг неподвижной оси, смещенной относительно центра масс, так что мгновенное положение определяется циклической переменной – углом поворота, и различающиеся на  $2\pi$  значения этой переменной отвечают при одинаковой мгновенной скорости одному и тому же состоянию ротатора. В широком смысле о ротаторе можно говорить, имея в виду систему любой физической природы, если ее мгновенное состояние задается циклической обобщенной координатой и ее производной по времени – обобщенной скоростью. В такой трактовке ротатор естественно рассматривать как элементарный объект, лежащий в основе многих систем в разных областях физики. Например, при наличии силы тяжести,



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





трансверсальной к оси вращения, механический ротатор соответствует математическому маятнику с нелинейностью синуса [1]. Точно такое же уравнение описывает динамику контакта Джозефсона, где роль угловой переменной играет разность фаз коллективной волновой функции в двух сверхпроводящих областях, разделенных зазором [2, 3]. При помещении маятника в среду с большой вязкостью или при подключении к контакту Джозефсона шунтирующей проводимости приходим к приближенному описанию уравнением первого порядка с нелинейностью синуса [4]. Аналогичное уравнение, известное как уравнение Адлера–Хохлова, возникает также в контексте задач синхронизации автоколебательных систем внешним воздействием в предположении, что оно влияет только на фазу колебаний [5, 6]. Как представляется, перспективы применения моделей на основе ротаторов для реализации и исследования разнообразных феноменов сложной нелинейной динамики далеко не исчерпаны. В настоящей работе предлагается идея использовать связанные ротаторы для построения системы с гиперболическим хаосом.

Представление о гиперболическом хаосе в консервативных системах (системы Аносова) и в диссипативных системах (гиперболические аттракторы) сформировалось в теории динамических систем нескольких десятилетий назад [7–10]. Системы с гиперболической динамикой являются грубыми (структурно устойчивыми), т. е. характеристики динамики малочувствительны к небольшим возмущениям определяющих уравнений<sup>1</sup>.

В фазовом пространстве системы траекторию называют гиперболической (седловой), если в ее окрестности эволюция возмущений аналогична таковой вблизи неустойчивой точки типа седла, т. е. можно определить подпространство векторов возмущения, убывающих по норме при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, убывающих при эволюции в обратном времени. В случае систем с дискретным временем все векторы возмущения должны допускать

представление в виде линейной комбинации векторов, принадлежащих этим двум подпространствам. В системах с непрерывным временем добавляется составляющая, относящаяся к одномерному нейтральному подпространству возмущений вдоль фазовой траектории, которые в среднем не нарастают и не убывают в ходе эволюции во времени. Множество траекторий, которые с течением времени приближаются к данной траектории, называется устойчивым многообразием. Неустойчивое многообразие определяется как множество траекторий, уходящих от опорной орбиты (приближающихся к ней в обратном времени).

Гиперболические хаотические аттракторы, состоящие исключительно из седловых траекторий с описанными свойствами, долгое время были представлены только математическими конструкциями (соленоид Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина, DA-аттрактор Смейла). Физически реализуемые системы с такими аттракторами обнаружены (или, скорее, сконструированы) совсем недавно [11, 12]. Помимо модельных систем, исследованных численно, реализованы радиотехнические устройства с гиперболическими аттракторами, которые исследованы с привлечением схемотехнического моделирования [13–16] и в реальных экспериментах [16–19]. В связи с этим возникли предпосылки для использования устройств, демонстрирующих структурно устойчивый хаос, например, в схемах скрытой коммуникации [20, 21], шумовой локации [22], криптографии [23, 24], для генерации случайных чисел [25, 26]. Привлекательность структурно устойчивых систем с практической точки зрения обусловлена нечувствительностью характеристик генерируемого хаоса к погрешностям изготовления, шумам, помехам и т.п. Кроме того, естественно полагать, что наличие хорошо развитой математической теории обеспечит надежную базу при разработке нетривиальных вопросов, связанных с приложениями.

Следует отметить, что в предложенных до сих пор реальных примерах гиперболический аттрактор получается при редукции динамического описания к отображению Пуанкаре, формально представляющему собой систему с дискретным временем. При этом в промежутках времени между состояниями, отвечающими прохождению сечения Пуанкаре, не приходится говорить о хорошо выраженном равномерном по времени растяжении и сжатии для соответствующих подпространств векторов возмущения. Вопрос о

<sup>1</sup> В свое время существовали ожидания, что гиперболический хаос, в силу грубости, может быть распространен в системах разной физической природы и служить, например, для описания гидродинамической турбулентности. В дальнейшем выяснилось, что встречающиеся в приложениях ситуации хаотической динамики обычно не попадают в класс гиперболических в строгом смысле, так что вопрос о реализации гиперболического хаоса в физических системах оказался надолго заброшенным, а интересы математиков переориентировались на поиск более широких обобщений концепции гиперболичности.



том, можно ли построить физические системы с гиперболическими аттракторами, характеризуемыми хотя бы приблизительно равномерным растяжением и сжатием вдоль траекторий в непрерывном времени, открыт.

Чтобы подойти к решению этого вопроса, естественно обратиться в качестве отправного пункта к консервативным системам с гиперболической динамикой в непрерывном времени – системам Аносова [27, 7]. Простым формальным примером служит задача о движении частицы в пространстве с отрицательной кривизной по геодезическим линиям метрики, заданной положительно-определенной квадратичной формой с гладко зависящими от координат коэффициентами [28]. Такое движение характеризуется неустойчивостью по отношению к поперечным возмущениям, и если оно происходит в ограниченной области, то оказывается хаотическим. Данная задача восходит к Адамару и послужила одним из главных источников вдохновения при создании гиперболической теории [7].

Известен пример механического устройства с динамикой Аносова, который строится на осно-

ве трех ротаторов с наложенной дополнительной механической связью. Это шарнирный механизм «тройное соединение», рассмотренный в научно-популярной математической статье Тёрстона и Уикса при обсуждении динамики систем, у которых конфигурационные пространства представляются нетривиальными многообразиями [29]. Механизм составлен из трех идентичных стержней, присоединенных концами к шарнирам, закрепленным в вершинах равностороннего треугольника (рис. 1). Каждый стержень имеет на другом конце подвижный шарнир, и к этим шарнирам прикреплены другие три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира. Мгновенная конфигурация системы задается угловыми переменными  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , из которых только две являются независимыми из-за наложенных механических связей. Таким образом, конфигурационное пространство представляет собой двумерное многообразие. Топологически, как указали Тёрстон и Уикс, это поверхность рода 3 («крендель с тремя дырками»).

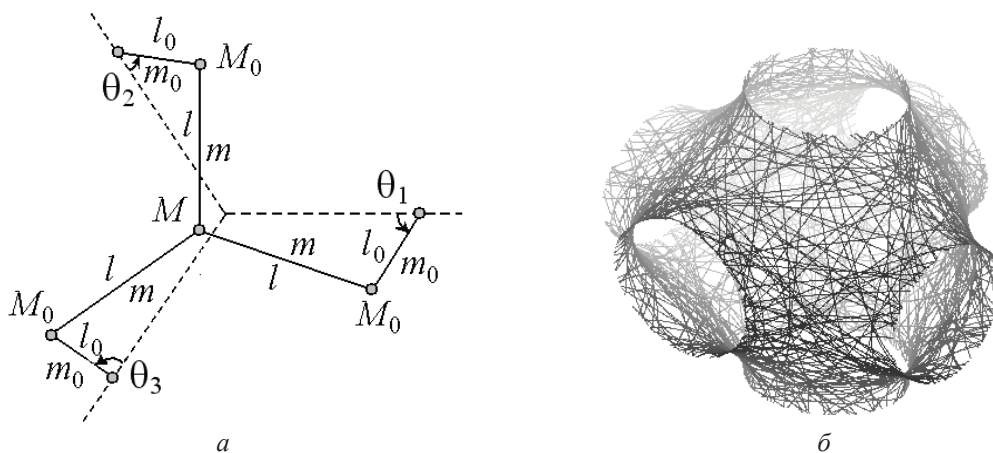


Рис. 1. Механическая система Тёрстона и Уикса, «тройное соединение» (а) и траектория в трехмерном пространстве  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  (б), полученная при вычислениях для величин длин и масс  $l = \frac{41}{40}$ ,  $l_0 = \frac{7}{40}$ ,  $m = \frac{9}{100}$ ,  $M = \frac{13}{100}$ ,  $M_0 = \frac{1}{5}$ ,  $m_0 = 0$ . Траектория непрерывна: при пересечении грани показанной на рисунке кубической ячейки она продолжается от противоположной грани куба в силу периодичности конфигурационного пространства по трем переменным

В отсутствие трения и внешних сил, когда движение происходит по инерции, с сохранением кинетической энергии, МакКэй и Хант [30] установили возможность динамики Аносова, т. е. консервативной разновидности гиперболического хаоса, в этой системе. Кинетическая энергия выражается как квадратичная форма через обобщенные скорости – временные производные локальных координат на двумерном многообразии.

Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от длин и масс элементов конструкции, задает метрику на двумерном многообразии, причем движение имеет место по геодезическим линиям этой метрики. Перебором вариантов был найден набор параметров, при котором метрика характеризуется всюду отрицательной кривизной. На рис. 1, б на трехмерном графике показана типичная траектория в пространстве  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ,



полученная при численном решении механических уравнений движения для этого случая.

В работе МакКэя и Ханта отмечено, что при добавлении трения и надлежащего управления посредством механизма обратной связи, можно получить систему с гиперболическим аттрактором. До сих пор, однако, не было проведено конкретного исследования, в рамках которого такой аттрактор был бы в явном виде представлен.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы ввести в рассмотрение сконструированную на основе связанных ротаторов модель с гиперболическим хаосом и продемонстрировать ее динамику на уровне компьютерного моделирования.

### 1. Консервативная система трех ротаторов с потенциалом взаимодействия

Начнем с механической системы, заданной функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2, \quad (1)$$

что отвечает системе трех ротаторов, у которых угловые координаты задаются переменными  $x_1, x_2, x_3$ , и присутствует взаимодействие, описываемое потенциальной функцией (рис. 2).

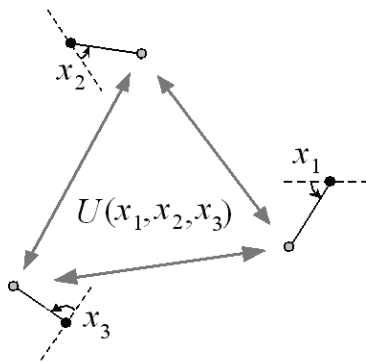


Рис. 2. Схематическое изображение системы трех ротаторов, связанных потенциалом взаимодействия

Эту систему можно рассматривать как модификацию тройного шарнирного механизма Тёрстона – Уикса – МакКэя – Ханта, где вместо внутренних кривошипов и подвижного шарнира, налагающих механическую связь между ротаторами, введен потенциал взаимодействия  $U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2$ . Система уравнений движения, получаемая из функции Лагранжа (1) стандартным образом [31],

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

записывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_1, \\ \ddot{x}_2 &= (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_2, \\ \ddot{x}_3 &= (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_3. \end{aligned} \quad (3)$$

У системы имеется интеграл движения, выражающий закон сохранения энергии

$$W = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2 = \text{const}. \quad (4)$$

На рис. 3 показаны портреты траекторий в трехмерном конфигурационном пространстве, полученные при численном решении уравнений для трех разных значений энергии. Видно, что при малой энергии траектория располагается с высокой степенью соответствия на гладкой поверхности, отвечающей минимуму потенциала  $U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2$ . Эта поверхность, с учетом свойства периодичности конфигурационного пространства по трем циклическим переменным  $x_1, x_2, x_3$ , отвечает многообразию рода 3 («крендель с тремя дырками»), как и для системы Тёрстона и Уикса. С увеличением энергии траектория «распухает» в направлении поперек этой поверхности, что видно на панелях (б) и (в).

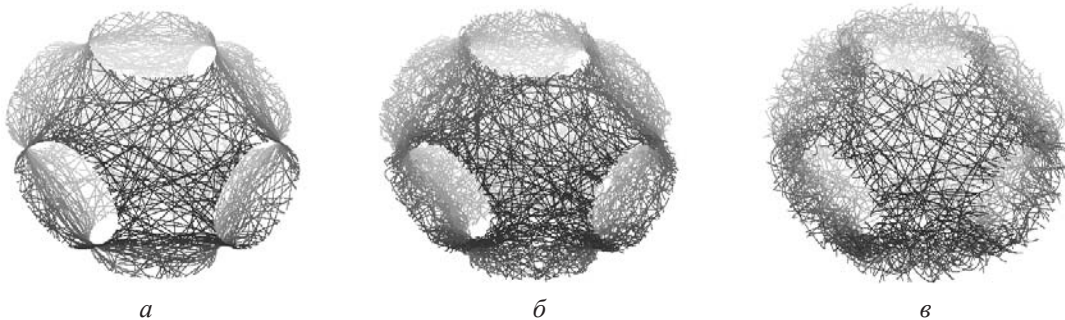


Рис. 3. На каждой картинке показана индивидуальная траектория в трехмерном конфигурационном пространстве консервативной системы, стартующая из точки  $x_1=1.4895, x_2=5.5649, x_3=3.7224$  с начальной скоростью, направленной вдоль эквипотенциальной кривой, для энергии  $W=0.002127$  (а),  $0.034$  (б) и  $0.136$  (в)



## 2. Редуцированная консервативная система и связь с задачей о движении по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны

Установим связь предлагаемой консервативной системы с динамикой на поверхности отрицательной кривизны. Для этого обратимся к редуцированной системе, которая получается в предположении, что на угловые переменные  $x_{1,2,3}$  наложено условие связи

$$F(x_1, x_2, x_3) = \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 = 0, \quad (5)$$

отвечающее минимуму потенциала взаимодействия, что естественно рассматривать как ситуацию, относящуюся к пределу малой энергии. Редуцированную модель можно также интерпретировать как наиболее простой для анализа вариант модели Тёрстона – Уикса – МакКэя – Ханта, соответствующий случаю  $l_0 \ll l$  [30].

Дифференцируя уравнение связи, можно записать

$$(\sin x_1)dx_1 + (\sin x_2)dx_2 + (\sin x_3)dx_3 = 0. \quad (6)$$

Имея конкретную мгновенную конфигурацию системы, соответствующую определенным значениям переменных  $x_i$ , найдем в данной точке все три производные  $\partial F / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  и в качестве обобщенных координат используем те две переменные, производные по которым

$$W(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2) = \frac{1}{2} [E(x_1, x_2)\dot{x}_1^2 + F(x_1, x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + G(x_1, x_2)\dot{x}_2^2], \quad (9)$$

где

$$E(\theta_1, \theta_2) = 1 + \frac{\sin^2 x_1}{1 - (\cos x_1 + \cos x_2)^2}, \quad F(x_1, x_2) = \frac{2 \sin x_1 \sin x_2}{1 - (\cos x_1 + \cos x_2)^2},$$

$$G(x_1, x_2) = 1 + \frac{\sin^2 x_2}{1 - (\cos x_1 + \cos x_2)^2}. \quad (10)$$

Записывая уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_2},$$

получаем

$$2E \ddot{x}_1 + F \ddot{x}_2 + 2E'_1 \dot{x}_1^2 + 2E'_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + F'_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + F'_2 \dot{x}_2^2 = E'_1 \dot{x}_1^2 + F'_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + G'_1 \dot{x}_2^2,$$

$$F \ddot{x}_1 + 2G \ddot{x}_2 + F'_1 \dot{x}_1^2 + F'_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2G'_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2G'_2 \dot{x}_2^2 = E'_2 \dot{x}_1^2 + F'_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + G'_2 \dot{x}_2^2, \quad (11)$$

где штрих и индекс при символах  $E, F, G$  означают частную производную по соответствующей

имеют меньшую абсолютную величину. Пусть это  $x_i$  и  $x_j$ , тогда их принимаем за две обобщенные координаты, а третья угловая переменная  $x_k$  выражается через них из условия связи посредством уравнения  $\cos x_k = (-\cos x_i - \cos x_j)$ . Заметим, что квадрат скорости  $\dot{x}_k$  выражается через две другие производные:

$$\dot{x}_k^2 = \frac{\dot{x}_i^2 \sin^2 x_i + \dot{x}_j^2 \sin^2 x_j}{1 - (\cos x_i + \cos x_j)^2}. \quad (7)$$

Процедура выбора обобщенных координат производится на каждом шаге численного решения задачи, что обеспечивает хорошее (без сингулярностей) описание движения на всем конфигурационном пространстве, представляющем собой многообразие с топологией «бублика с дырками».

В формулу для кинетической энергии

$$W = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \quad (8)$$

подставим выражение одной из угловых скоростей через две других. Результатом будет представление кинетической энергии, отвечающее функции Лагранжа редуцированной системы. Дальнейшие уравнения приведем в предположении, что третья переменная выражена через первую и вторую; альтернативные варианты получаются циклической перестановкой индексов. Имеем:

обобщенной координате, и в итоге приходим к уравнениям

$$2E\ddot{x}_1 + F\ddot{x}_2 = -E'_1\dot{x}_1^2 - 2E'_2\dot{x}_1\dot{x}_2 + (G'_1 - F'_2)\dot{x}_2^2, \quad F\ddot{x}_1 + 2G\ddot{x}_2 = (E'_2 - F'_1)\dot{x}_1^2 - 2G'_1\dot{x}_1\dot{x}_2 - G'_2\dot{x}_2^2. \quad (12)$$

Разрешая систему относительно вторых производных, имеем:

$$\ddot{x}_1 = \frac{FF'_1 - 2GE'_1 - FE'_2}{4EG - F^2} \dot{x}_1^2 + \frac{2FG'_1 - 4GE'_2}{4EG - F^2} \dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{2GG'_1 - 2GF'_2 + G'_2F}{4EG - F^2} \dot{x}_2^2,$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{2EE'_2 - 2EF'_1 + E'_1F}{4EG - F^2} \dot{x}_1^2 + \frac{2E'_2F - 4EG'_1}{4EG - F^2} \dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{FF'_2 - FG'_1 - 2EG'_2}{4EG - F^2} \dot{x}_2^2. \quad (13)$$



На рис. 4 приводится типичный портрет траектории в трехмерном конфигурационном пространстве, полученный при численном решении уравнений со случайными начальными условиями. Видно, что траектория плотно покрывает поверхность, которая топологически эквивалентна «кренделю с тремя дырками».

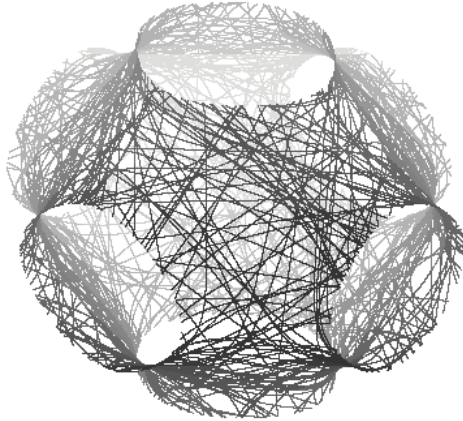


Рис. 4. Типичный портрет траектории редуцированной системы в трехмерном конфигурационном пространстве  $(x_1, x_2, x_3)$

На рис. 5, 6 показаны реализации – зависимости обобщенных координат трех ротаторов  $x_1, x_2, x_3$  и скоростей  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  от времени для двух значе-

ний энергии  $W = 0.02$  и  $0.1$  соответственно. Как можно видеть, реализации носят хаотический характер – визуально не заметно какого-либо повторения форм.

Чтобы охарактеризовать наблюдаемый хаос на количественном уровне, естественно использовать показатели Ляпунова. Редуцированная система имеет четыре показателя Ляпунова, два из которых нулевые и связаны с возмущениями типа сдвига по траектории и сдвига по энергии. Сумма всех показателей обращается в ноль в силу консервативной природы системы. Поэтому в численных расчетах достаточно вычислять только один наибольший показатель, а остальные три определяются очевидным образом с учетом указанных свойств системы.

Расчеты показывают, что наибольший показатель Ляпунова положительный, т. е. в самом деле динамика хаотическая. Для  $W = 0.02$  и  $0.1$ , что соответствует диаграммам на рис. 5 и 6, показатели Ляпунова, рассчитанные по алгоритму Бенеттина [32, 33] на основе совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях, таковы:

$$\lambda_1 = 0.100, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -0.100 \quad (14)$$

и

$$\lambda_1 = 0.224, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -0.224. \quad (15)$$

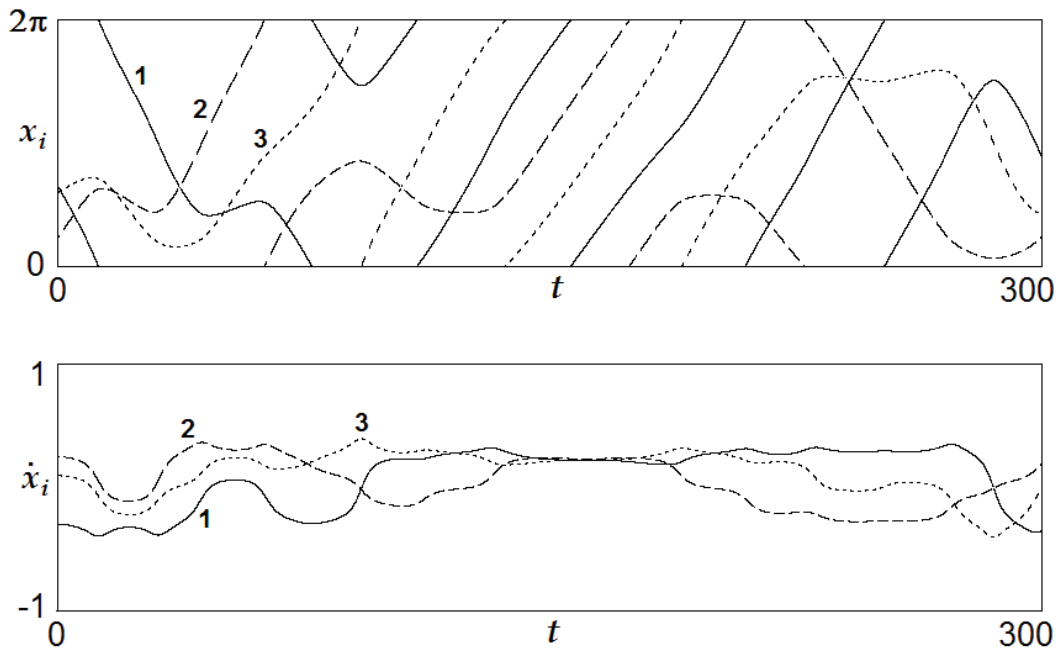


Рис. 5. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для редуцированной модели при величине кинетической энергии  $W = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = 0.02$ . В силу циклической природы обобщенных координат непрерывные кривые на верхней диаграмме выглядят так, что при пересечении верхней границы кривая продолжается, стартуя от нижней границы, и наоборот

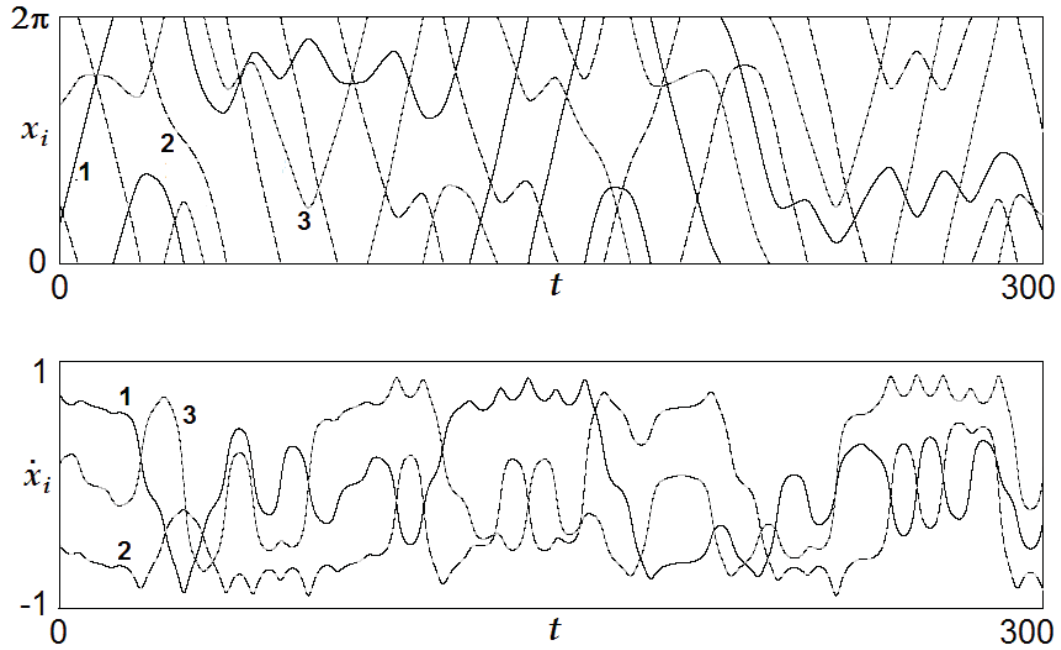


Рис. 6. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для редуцированной модели при величине кинетической энергии  $W = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = 0.1$

Обсудим возможность интерпретации хаотической динамики как ассоциирующейся с движением по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны.

Выражение для кинетической энергии (9) определяет метрику в локальных координатах  $(\theta_1, \theta_2)$ :

$$K = \frac{2}{(4EG - F^2)^2} \begin{pmatrix} -E''_{22} + F''_{12} - G''_{22} & E'_1 & F'_1 - E'_2 & \left| \begin{matrix} 0 & E'_2 & G'_1 \\ E'_2 & 2E & F \\ G'_1 & F & 2G \end{matrix} \right| \\ F'_2 - G'_1 & 2E & F & \\ G'_2 & F & 2G & \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В метрике (9) кривизну с помощью формулы (17) удается представить явно:

$$K = -\frac{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos x_1 \cos x_2}{4(-\frac{3}{2} + \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos x_1 \cos x_2)^2}, \quad (18)$$

что можно с учетом уравнения связи переписать в симметричном виде

$$K = \frac{\cos x_1 \cos x_2 + \cos x_2 \cos x_3 + \cos x_1 \cos x_3}{[3 + 2(\cos x_1 \cos x_2 + \cos x_2 \cos x_3 + \cos x_1 \cos x_3)]^2}. \quad (19)$$

Движение изображающей точки на многообразии, отвечающем конфигурационному пространству системы, происходит по геодезическим линиям. Это линии минимальной (экстремальной) длины, определенной в соответствии с метрикой, заданной квадратичной формой для кинетической энергии.

$$ds^2 = E(x_1, x_2)dx_1^2 + F(x_1, x_2)dx_1 dx_2 + G(x_1, x_2)dx_2^2, \quad (16)$$

а гауссова кривизна, как известно из дифференциальной геометрии, выражается через фигурирующие здесь коэффициенты формулой Бриоски (Brioschi) [34]:

Как можно видеть из формулы (19) с учетом соотношения  $\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 = 0$ , кривизна всюду отрицательна за исключением восьми точек, где она нулевая в соответствии с тем, что все три косинуса обращаются в ноль, т.е.  $x_1 = \pm\pi/2$ ,  $x_2 = \pm\pi/2$ ,  $x_3 = \pm\pi/2$ . Поэтому при ненулевой кинетической энергии динамика по



геодезическим линиям будет соответствовать динамике Аносова. Рис. 7 поясняет, как меняется кривизна в зависимости от положения определяющей точки на многообразии в конфигурационном пространстве.

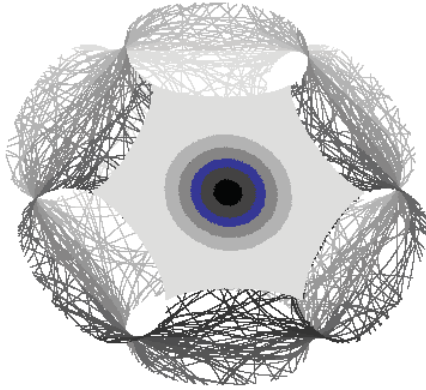


Рис. 7. Портрет траектории в трехмерном конфигурационном пространстве  $(x_1, x_2, x_3)$ , где на части многообразия цветом обозначена кривизна – от больших отрицательных значений (светлый тон) до близких к нулю (темный тон). На остальных частях многообразия области различной кривизны расположены аналогично (по очевидной симметрии)

Имея формулу для кривизны, можно применить альтернативный метод вычисления показателей Ляпунова. Вектор разности радиус-векторов для двух близких точек на близких геодезических линиях удобно представить в локально определенном базисе  $(\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\perp})$ , где  $\mathbf{e}_{\parallel}$  – единичный вектор, направленный вдоль геодезической линии, а  $\mathbf{e}_{\perp}$  – ортогональный к нему единичный вектор. Тогда, записав вектор инфинитезимального возмущения в виде  $J_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + J_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$ , можно вывести уравнения для коэффициентов:

$$\ddot{J}_{\parallel} = 0, \quad \ddot{J}_{\perp} = -2K(t)WJ_{\perp}, \quad (20)$$

где  $K(t)$  – локальная кривизна, которая зависит от мгновенных координат,  $W = \frac{1}{2}\dot{s}^2$  – кинетическая энергия. Из первого уравнения видно, что имеется два нулевых показателя, ассоциирующихся с продольной составляющей движения. Из

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)]\dot{x}_1 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_1, \\ \ddot{x}_2 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)]\dot{x}_2 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_2, \\ \ddot{x}_3 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)]\dot{x}_3 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Параметр  $\nu$  далее фиксируем и произвольно примем равным 5. Автоколебания возникают при  $\mu > 0$ , и их средняя кинетическая энергия увели-

второго уравнения, учитывая, что  $K \leq 0$  (причем равенство достигается только в исключительных изолированных точках), следует наличие равных по абсолютной величине положительного и отрицательного показателя. Конкретно найти старший показатель можно, интегрируя уравнение для коэффициента  $J_{\perp}$  совместно с уравнениями движения. При значении энергии  $W = 0.02$  его величина составляет  $\lambda = 0.100$ , что хорошо согласуется с приведенным выше результатом. Для редуцированной консервативной системы можно записать формулу для старшего показателя Ляпунова в виде  $\lambda = \kappa\sqrt{W}$ , где коэффициент  $\kappa \approx 0.70$  определяется средней кривизной вдоль траектории. Вследствие присущей гиперболическому хаосу эргодичности этот коэффициент статистически хорошо определен для типичной траектории.

### 3. Диссипативная возбуждающаяся система

Чтобы из консервативной системы (3) получить автоколебательную систему, необходимо ее модифицировать так, чтобы при малых величинах энергии система была активной (колебания раскачиваются), а при больших обеспечивалось бы затухание.

В рамках лагранжева формализма в теоретической механике стандартная процедура учета диссипации подразумевает использование функции Релея  $R(\dot{x}_i)$  [31], с привлечением которой уравнения движения представляются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}. \quad (21)$$

Введем диссипацию в модели (3) с функцией Лагранжа (1) так, чтобы она была отрицательной при малых энергиях (что отвечает возбуждению) и положительной при больших энергиях (что отвечает затуханию). Для этого положим

$$R(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \nu[-\frac{1}{2}\mu(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{8}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^2]. \quad (22)$$

Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

чивается с ростом  $\mu$  приблизительно по закону  $\overline{W} = \mu$ , что видно из полученной в численных расчетах диаграммы, которая показана на рис. 8.





Наряду с увеличением средней энергии наблюдается также рост среднеквадратичного отклонения величины энергии от среднего значения, который при больших значениях параметра  $\mu$  становится сравнимым с самой энергией.

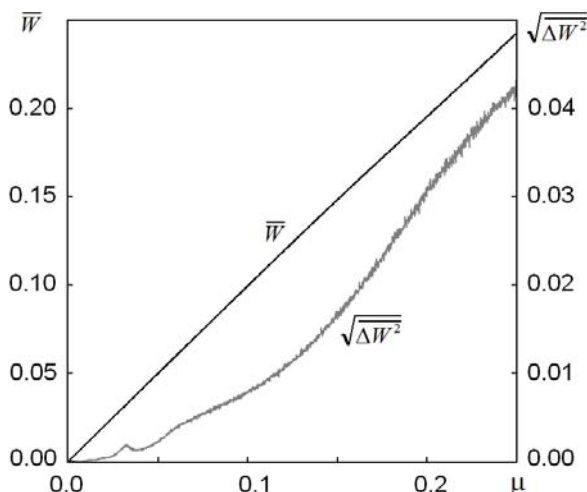


Рис. 8. Зависимости средней кинетической энергии автоколебаний и среднеквадратичного отклонения от параметра  $\mu$ , полученные в численных расчетах для системы (23) при  $\nu = 5$

На рис. 9 и 10 показаны зависимости переменных  $x_1, x_2, x_3$  и скоростей  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  от времени при задании  $\mu = 0.02$  и  $\mu = 0.1$ , что соответствует значениям энергии, использованным при построении реализаций в редуцированной системе на рис. 4 и 5. Сравнение показывает, что

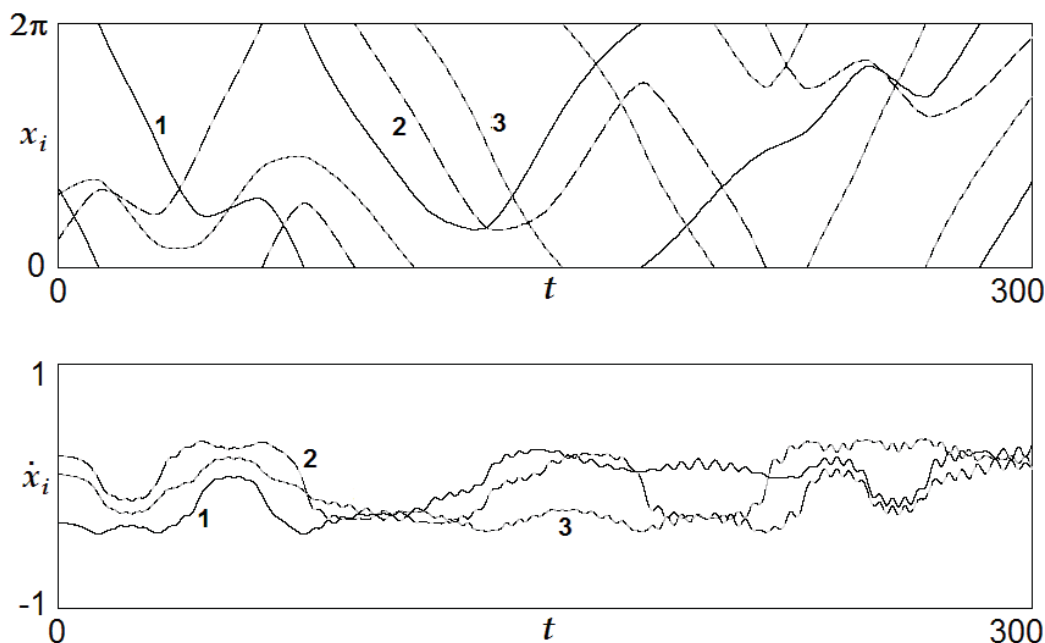


Рис. 9. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для автоколебательной системы при  $\nu=5$  и  $\mu=0.02$

реализации для обобщенных координат сходны с таковыми для редуцированной системы, а для обобщенных скоростей характеризуются дополнительными быстрыми осцилляциями на определенных стадиях процесса, которые становятся более выраженными с ростом надкритичности.

На рис. 11 показаны аттракторы системы (23) в проекции на трехмерное конфигурационное пространство  $x_1, x_2, x_3$  для двух значений  $\mu$  при  $\nu = 5$ .

В первом случае принадлежащая аттрактору траектория визуально представляется расположенной на двумерном многообразии, отвечающем постоянному потенциалу, как на рис. 3, а, а во втором – выглядит «распушенной» в поперечном направлении, демонстрируя сходство с диаграммами (б) и (в) на рис. 3.

На рис. 12 показана зависимость показателей Ляпунова от параметра  $\mu$ . Размерность фазового пространства равна 6, поэтому имеется шесть показателей Ляпунова. В частности, показатели Ляпунова при  $\mu = 0.02$  таковы:

$$\lambda_1 = 0.0994, \lambda_2 = 0.0002, \lambda_3 = 0.0000, \lambda_4 = -0.0032, \lambda_5 = -0.0994, \lambda_6 = -0.1969, \quad (24)$$

а при  $\mu = 0.1$  соответственно

$$\lambda_1 = 0.2145, \lambda_2 = 0.0000, \lambda_3 = -0.0080, \lambda_4 = -0.0363, \lambda_5 = -0.2112, \lambda_6 = -0.9433, \quad (25)$$

что можно сравнить с показателями редуцированной системы (14), (15).

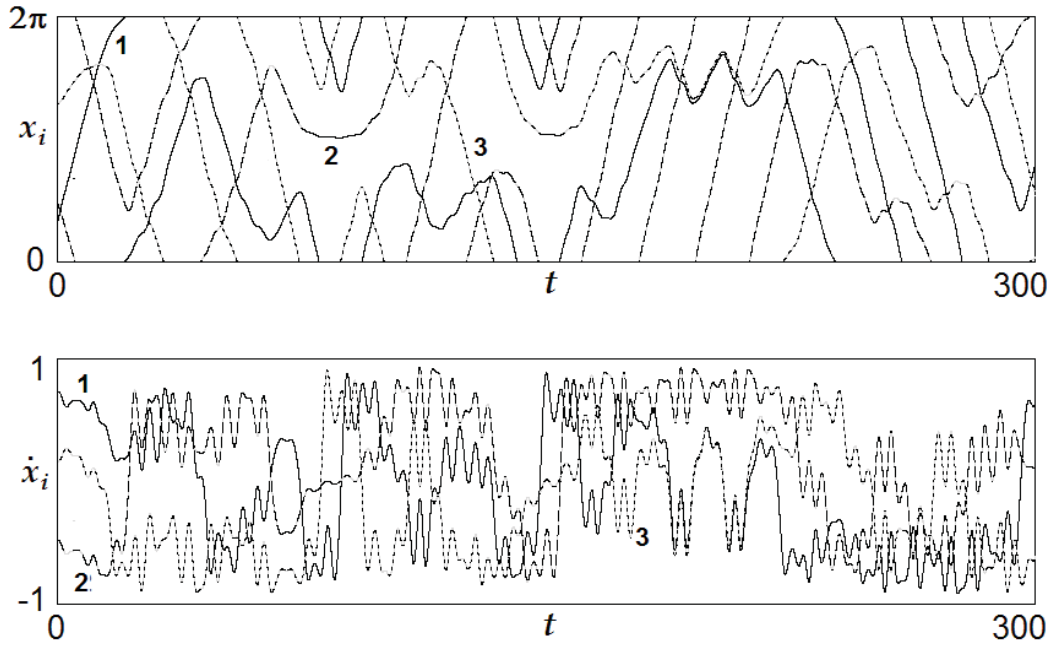


Рис. 10. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для автоколебательной системы при  $\nu = 5$  и  $\mu = 0.1$

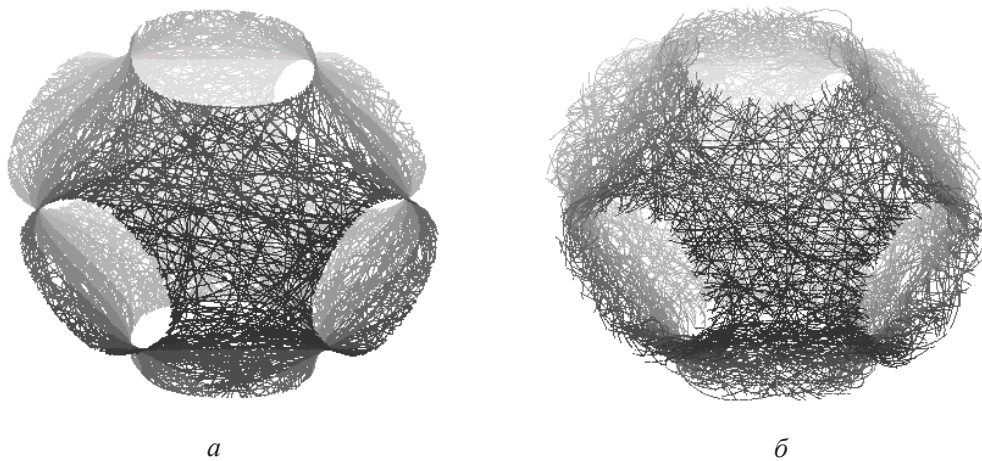


Рис. 11. Траектория на аттракторе диссипативной системы (23) при  $\nu = 5$  в трехмерном конфигурационном пространстве  $\mu = 0.02$  (а) и  $\mu = 0.2$  (б)

В рассмотренном диапазоне изменения параметра один показатель положительный, притом он плавно зависит от параметра. Второй и третий показатели близки к нулю. (Заметим, что присутствие одного нулевого показателя, ассоциирующегося с возмущением типа сдвига вдоль опорной траектории, обусловлено автономной природой системы [33].) Остальные показатели отрицательные, причем один из них близок по абсолютной величине к наибольшему положительному показателю. Сумма всех показателей отрицательна, так что рассматриваемый

объект в фазовом пространстве системы это действительно аттрактор.

Чтобы убедиться, что механизм хаоса в системе (23) такой же, как в редуцированной модели, т. е. связан с гиперболической динамикой на многообразии отрицательной кривизны, рассмотрим зависимость старшего показателя Ляпунова от средней кинетической энергии. На рис. 13 показан соответствующий график в координатах  $\sqrt{W}$ ,  $\lambda$ , полученный в численных расчетах. Как можно видеть, в области  $\sqrt{W} < 0.2$  (что соответствует  $\mu < 0.04$ ) пока-

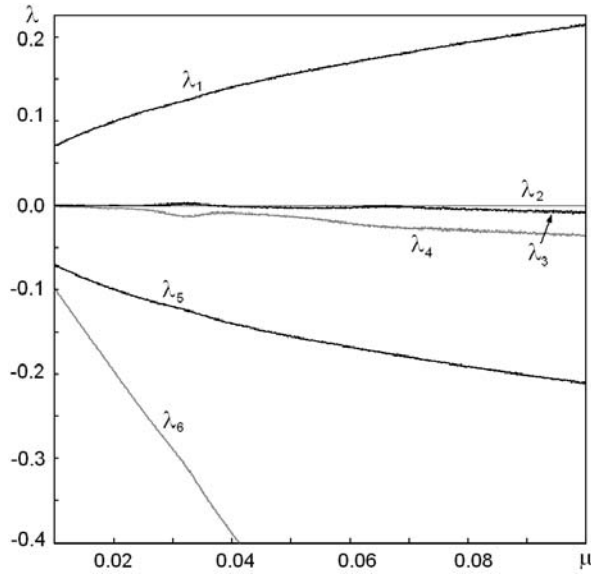


Рис. 12. Зависимость показателей Ляпунова от параметра для аттрактора системы (23) при  $\nu = 5$

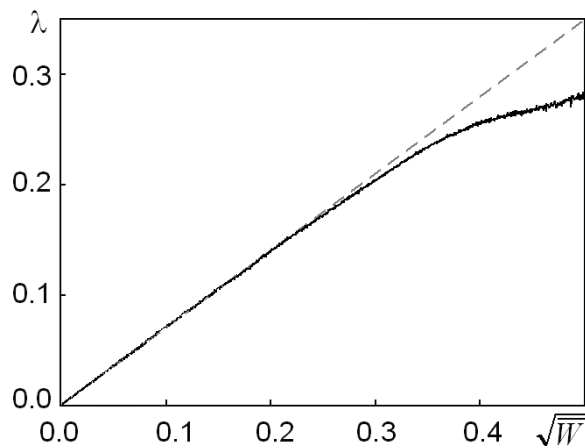
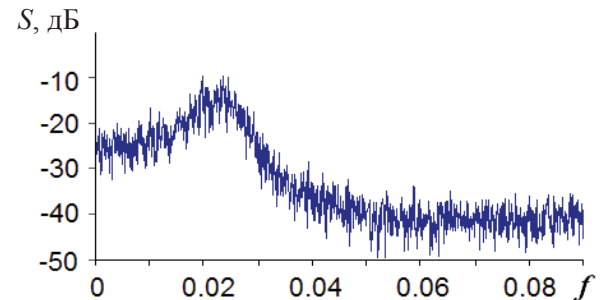


Рис. 13. Диаграмма, иллюстрирующая зависимость старшего показателя Ляпунова от средней кинетической энергии согласно численным расчетам для модели (23) при  $\nu = 5$  и изменении  $\mu$  в интервале от 0 до 0.25

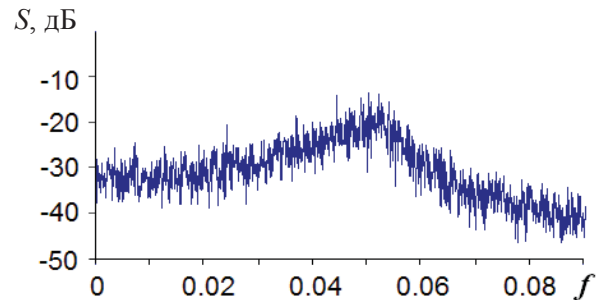
затель Ляпунова практически равен величине  $0.7\sqrt{W}$ . Это хорошо согласуется с результатом для редуцированной модели, полученным на основе рассмотрения движения по геодезическим линиям на многообразии отрицательной кривизны.

На рис. 14 показаны спектры мощности сигнала, определенного как  $u(t) = \cos x_1(t)$  для одного из ротаторов, составляющих систему (23), которые построены по результатам обработки временных рядов для переменной  $u$ , полученных при численном моделировании динамики на аттракторе. Спектр рассчитывается в соответ-

ствии с методом статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемом в теории случайных процессов [35]. Процедура включает разбиение полного массива данных на участки определенной длины, выполнение преобразования Фурье для каждого участка и усреднение квадратов амплитуд спектральных компонент по всем участкам. Графики спектральной плотности представлены в логарифмической шкале в традиционно используемых децибелах (10 дБ соответствуют 10-кратному отношению сопоставляемых уровней мощности) для значений параметра надкритичности  $\mu = 0.02$  (а) и  $\mu = 0.1$  (б) при  $\nu = 5$ . Как можно видеть из диаграмм, спектр является сплошным, что соответствует хаотической динамике, он довольно равномерный (нет выраженной изрезанности), и характерная ширина спектра становится больше с ростом параметра надкритичности.



а



б

Рис. 14. Спектры Фурье случайного сигнала  $u(t) = \cos x_1(t)$ , порождаемого системой (23) при  $\nu = 5$ ,  $\mu = 0.02$  (а) и  $\mu = 0.1$  (б)

### Заключение

Представлен пример системы трех связанных ротаторов с хаотической динамикой. В основу построения положена модель с динамикой Аносова, благодаря чему реализующийся в системе гиперболический аттрактор характеризуется приблизительно равномерным растяжением и сжатием вдоль устойчивых



и неустойчивых многообразий траекторий в непрерывном времени. Для системы характерна также высокая степень равномерности спектра мощности генерируемого хаотического сигнала.

В силу того что концепция ротатора как объекта, состояние которого задается циклической обобщенной координатой и соответствующей обобщенной скоростью, может быть отнесена к системам различной физической природы, разумно полагать, что предложенная система на основе трех ротаторов могла бы быть реализована не только в механике, но также в радиофизике и нелинейной оптике. Такая система, представляющая собой генератор грубого хаоса вследствие гиперболической природы динамики, возможно, была бы интересна для приложений, таких как скрытая коммуникация, шумовая локация, криптография, генерация случайных чисел.

С математической точки зрения представляло бы интерес строгое обоснование гиперболической природы аттрактора в предложенной системе, что позволило бы уверенно говорить о грубости системы как генератора хаоса и относить к ней другие существенные результаты хорошо развитой математической теории гиперболического хаоса. На данный момент утверждение о гиперболической природе наблюдаемой хаотической динамики носит гипотетический характер, но имеет под собой то основание, что в численных расчетах продемонстрирована близость к системе Аносова, отвечающей редуцированной модели. Возможные подходы к более строгому обоснованию гиперболичности могут базироваться на компьютерной проверке критерия конусов [8, 10, 11, 36], анализе статистики углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий [37–39, 10, 11], а также анализе инвариантной меры на аттракторе, которая должна соответствовать концепции меры Синая – Рюэля – Боуэна [10, 11].

Автор благодарен профессору университета Потсдама А. С. Пиковскому за полезное конструктивное обсуждение.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-02-02893) и гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1726.2014.2 «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики и их приложения».*

## Список литературы

1. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. 2-е изд. М. : Физматлит, 2005. 292 с.
2. Лухарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами : основы теории. М. : Изд-во МГУ, 1978. 446 с.
3. Cirillo M., Parmentier R. D., Savo B. Mechanical analog studies of a perturbed sine-Gordon equation // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 1981. Vol. 3, № 3. P. 565–576.
4. Kuznetsov S. P., Neumann E. Torus fractalization and singularities in the current-voltage characteristics for the quasiperiodically forced Josephson junction // *Europhysics Letters*. 2003. Vol. 61, № 1. P. 20–26.
5. Adler R. A study of locking phenomena in oscillators // *Proc. IRE*. 1946. Vol. 34, № 6. P. 351–357.
6. Хохлов Р. В. К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы // *Докл. АН СССР*. 1954. Т. 97, № 3. С. 411–414.
7. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов А. В., Солодов В. В., Старков А. Н., Степин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением // *Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*. М. : ВИНТИ, 1991. Т. 66. С. 5–242.
8. Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны*. М. : Наука, 1979. С. 192–212.
9. Shilnikov L. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics : A Tutorial // *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353–2001.
10. Kuznetsov S. P. *Hyperbolic Chaos : A Physicist's View*. Berlin ; Heidelberg : Higher Education Press ; Beijing and Springer-Verlag, 2012. 336 p.
11. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы : от математики к физике. М. ; Ижевск : ИКИ, 2013. 488 с.
12. Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы : от математики к физике // *УФН*. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
13. Kuznetsov S. P. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. Vol. 21. 043105.
14. Кузнецов С. П. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 5. С. 98–115.
15. Кузнецов С. П. Параметрический генератор грубого хаоса : схмотехническая реализация и моделирование в программной среде Multisim // *Вестн. СГТУ*. 2014. № 3 (76). С. 34–46.
16. Кузнецов С. П., Пономаренко В. И., Селезнев Е. П. Автономная система – генератор гиперболического хаоса. Схмотехническое моделирование и экспери-



- мент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 5. С. 17–30.
17. Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.
  18. Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла – Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1–8.
  19. Баранов С. В., Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 11–23.
  20. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос : новые носители информации для систем связи. М. : Физматлит, 2002. 252 с.
  21. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179, № 12. Р. 1281–1310.
  22. Lukin K. A. Noise radar technology // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. Vol. 16, № 12. Р. 8–16.
  23. Baptista M. S. Cryptography with chaos // Physics Letters A. 1998. Vol. 240. Р. 50–54.
  24. Птицын Н. В. Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 80 с.
  25. Stojanovski T., Kocarev L. Chaos-Based Random Number Generators : in 2 parts. Part I : Analysis // IEEE Trans. Circuits and Systems. 2001. Vol. 48, № 3. Pt. 1. Р. 281–288 ; Pt. 2. Р. 382–385.
  26. Stojanovski T., Kocarev L. Chaos-Based Random Number Generators : in 2 parts. Part II : Practical realization // IEEE Trans. Circuits and Systems. 2001. Vol. 48, № 3. Р. 382–385.
  27. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
  28. Balazs N. L., Voros A. Chaos on the pseudosphere // Physics Reports. 1986. Vol. 143, № 3. Р. 109–240.
  29. Тёрстон У. П., Уикс Д. Р. Математика трехмерных многообразий // В мире науки. 1984. № 9. С. 74–88.
  30. Hunt T. J., MacKay R. S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. Р. 1499–1510.
  31. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М. : Физматлит, 2005. 264 с.
  32. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. -M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems : A method for computing all of them // Meccanica. 1980. Vol. 15. Р. 9–30.
  33. Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. М. : Физматлит, 2006. 356 с.
  34. Struik D. J. Lectures on classical differential geometry. Courier Dover Publications, 1988. 240 p.
  35. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М. : Наука, 1968. 463 с.
  36. Кузнецов С. П., Катаев И. П. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3–29.
  37. Lai Y. -C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity. 1993. Vol. 6. Р. 779–798.
  38. Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Physics Letters A. 2000. Vol. 270. Р. 301–307.
  39. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 015203.