Таким образом, можно сделать вывод, что при понижении объёмной доли концентрации одного из нуклеотидов до 0.1 от концентраций остальных видов нуклеотидов в растворе, возможно появление существенных (десятки тактов) временных задержек – пауз в движении ДНК-полимеразы, обусловленных ограничением диффузии свободных нуклеотидов из раствора. Во время этих пауз молекула ДНК-полимеразы неподвижно находится на 3'-конце растущей цепи ДНК, «ожидая» появления комплиментарного нуклеотида.

Список литературы

1. *Brooker R. J.* Genetics : Analysis and Principles / 4th ed. McGraw-Hill, 2012. 868 p.
2. *Bai L., Shundrovsky A., Wang M. D.* Sequence-dependent Kinetic Model for Transcription Elongation by RNA Polymerase // J. of Molecular Biology. 2004. Vol. 344. P. 335–349.
3. *Марголус Н., Тоффоли Т.* Машины клеточных автоматов / пер. с англ. М. : Мир, 1991. 280 с.

УДК 530.182, 537.86

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА – ХОПФА В АВТОГЕНЕРАТОРЕ МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. А. Купцова, В. В. Семенов, А. С. Листов

Саратовский государственный университет
E-mail: a.a.kuptsova@rambler.ru

В работе исследуется мягкая бифуркация Андронова – Хопфа в генераторе Ван дер Поля, находящемся под действием аддитивного гауссова белого шума. Для определения бифуркации используется численное решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. Полученные результаты сравниваются с данными численного интегрирования стохастических уравнений. Показано существование бифуркационного интервала, рассчитанного теоретически в [6].
Ключевые слова: стохастические бифуркации, бифуркация Андронова – Хопфа, уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова: схема метода дробных шагов (МДШ) и схема метода переменных направлений (МПН).

Study of Stochastic Andronov – Hopf Bifurcation in the Oscillator by a Numerical Method

A. A. Kuptsova, V. V. Semenov, A. S. Listov

We investigate soft Andronov – Hopf bifurcation in the Van der Pol self – sustained oscillator, which is under the influence of additive Gaussian white noise. To determine the bifurcation used numerical solution of the Fokker – Planck – Kolmogorov equation. The results are compared with the data of numerical integration of stochastic equations. Demonstrated the existence of a bifurcation interval calculated theoretically in [6].
Key words: stochastic bifurcations, Andronov – Hopf bifurcation, Fokker – Planck – Kolmogorov equation, two finite – difference scheme: outline of the method of fractional steps scheme and variable directions method.

Введение

Бифуркационный анализ в детерминированной нелинейной динамике играет очень важную роль. Он позволяет выявить возможные сценарии перехода системы от простого поведения к сложному, проанализировать структуру возникающих предельных множеств и разработать методы управления этой структурой [1, 2]. Возникает вопрос: как повлияет шум на бифуркации, и что собой представляют бифуркации в присутствие шума? Этот вопрос является весьма важным в силу двух причин: во-первых, шум всегда присутствует в любой реальной системе, и, во-вторых, вблизи бифуркации система особенно чувствительна к действию шума, так как в бифуркационной точке нарушаются свойства структурной устойчивости [3]. Бифуркации в системах, содержащих источники шума, называются *стохастическими бифуркациями*. Имеется ряд работ, посвященных исследованию стохастических бифуркаций, среди которых, прежде всего, нужно назвать известную монографию В. Хорстнемке и Р. Лефевра [4], а также книгу Л. Арнольда [5], одна из глав которой посвящена стохастическим бифуркациям. Аддитивный гауссов шум приводит к объединению различных инвариантных множеств в фазовом пространстве динамической системы и установлению единой инвариантной вероятностной меры, характеризующейся стационарной плотностью вероятности, не зависящей от начального распределения. В этом случае стохастические бифуркации представляют собой качественные перестройки плотности вероятности, происходящие при изменении параметров системы и интенсивности шума [4, 5]. Под качественной перестройкой, как правило, понимают возникновение или исчезновение локальных экстремумов распределения. В [5] бифуркации такого типа названы феноменологическими бифуркациями или P-бифуркациями.

Исследование стохастических бифуркаций связано с рядом сложностей. Теоретические результаты удается получить только для наиболее простых моделей динамических систем и в большинстве случаев (за исключением простейших одномерных задач) они являются приближенными. В связи с этим важную роль приобретают методы численного моделирования. Однако численные методы при рассмотрении систем с шумом также могут привести к существенным ошибкам. По этим причинам в целях полного и надежного анализа стохастических бифуркаций желательно использовать все имеющиеся средства и делать выводы на основе сопоставления полученных результатов.

Одной из наиболее типичных и важных бифуркаций в динамических системах является бифуркация Андронова – Хопфа, с которой связан переход в режим генерации. Мягкая (суперкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа в детерминированном случае приводит к рождению устойчивого предельного цикла из точки равновесия фокусного типа. Стохастическая бифуркация Андронова – Хопфа состоит в возникновении характерного для зашумленных автоколебаний вероятностного распределения, имеющего форму замкнутого кратера. Исследование влияния шума на переход к автоколебательному режиму представляет собой классическую задачу статистической радиофизики и описано в ряде работ [5–11]. Однако большая часть результатов получена в рамках квазигармонического анализа, который является приближенным и допустим только при сравнительно слабом шуме. Анализ мягкой бифуркации Андронова – Хопфа в системе Ван дер Поля – Дуффинга при аддитивном гауссовом шуме, проведенный с использованием более точного теоретического метода [6], показал, что при вариации управляющего параметра перестройка плотности вероятности, соответствующая завершенной стохастической бифуркации, происходит не сразу, а постепенно, в пределах некоторого интервала значений параметра, называемого бифуркационным интервалом. В работах [7, 8] делается вывод о существовании бифуркационного интервала для суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в системах с мультипликативным цветным шумом.

Целью данной работы является исследование мягкой стохастической бифуркации Андронова – Хопфа с помощью численного решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), с одной стороны, и уравнений Ланжевена, с другой стороны. Полученные результаты сопоставляются с данными приближенного квазигармонического анализа и теоретическими результатами, полученными в [6].

1. Исследуемые уравнения и квазигармонический анализ

В качестве базовой модели для исследования возникновения автоколебаний рассмотрим генератор Ван дер Поля под действием аддитивного гауссова белого шума:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = \sqrt{2D}n(t), \tag{1}$$

где x, t – безразмерные переменные (координата и время), ε – управляющий параметр, $n(t) = dW/dt$ – нормированный гауссов белый шум, D – константа, задающая интенсивность шума.

Используя метод усреднения в квазигармоническом случае, можно получить следующее приближенное выражение для стационарной плотности вероятности [12]:

$$p(x,y) = C\exp\left\{-\frac{1}{16D}\left((x^2+y^2)^2 - 8\varepsilon(x^2+y^2)\right)\right\}, \tag{2}$$

где C – нормировочная константа. Исследовав экстремумы выражения (2), легко найти стохастическую бифуркацию при $\varepsilon = 0$, приводящую к возникновению кратерообразного распределения (рис. 1). При этом характер бифуркации и бифуркационное значение параметра ε не зависят от интенсивности шума D. Однако квазигармоническое приближение корректно при $D \ll \varepsilon^2$ и вблизи значения $\varepsilon = 0$ при конечной интенсивности шума может приводить к ошибочным результатам.

Выражение для вероятностного распределения в автогенераторе, справедливое при $\varepsilon^2 \ll D$, получено в [6] на основании аналитического решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. В принятых нами обозначениях оно имеет вид

$$p(x,y) = C\exp\left\{-\frac{1}{32D}\left((x^2+y^2)^2 - 8\varepsilon(x^2+y^2)\right) - \frac{3}{4}xy\right\}. \tag{3}$$

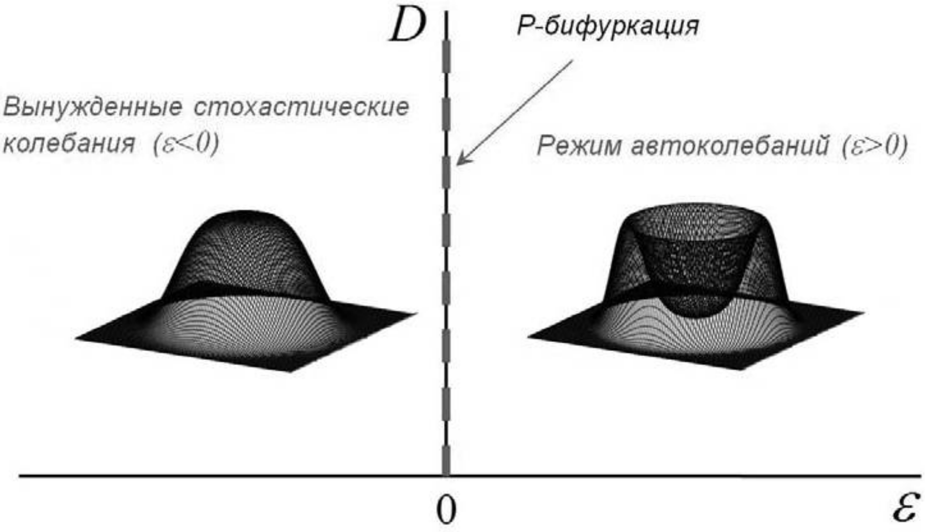

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1), полученная методом квазигармонического анализа

Анализ выражения (3) дает следующий бифуркационный сценарий: при $\varepsilon < -\frac{3}{2}D$ распределени $p(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат, что соответствует зашумленному состоянию устойчивого равновесия при $x = 0$, $y = 0$. Область $-\frac{3}{2}D < \varepsilon < \frac{3}{2}D$ представляет собой бифуркационный интер-вал. В силу разрушения радиальной симметрии в этой области возникают два максимума: $x_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$, $y_{1,2} = \mp\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$. Область $\varepsilon > \frac{3}{2}D$ соответствует существованию кратерообразного распределения, т.е. в точках предельного цикла имеется локальный максимум плотности вероятности.

2. Методы численного моделирования

Система, находящаяся под воздействием независимых источников белого гауссова шума, может быть описана как стохастическими дифференциальными уравнениями (уравнениями Ланжевена), так и уравнением ФПК. Оба способа описания полностью эквивалентны [12,13].

Уравнение ФПК для исследуемого генератора (1) записывается в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[u(y)p] + \frac{\partial}{\partial y}[d(x,y)p] + D\frac{\partial^2}{dy^2}(p), \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} a(y) = -\,y, \\ d(x, y) = (x^2 - \varepsilon\,)y + x. \end{cases}$$

Уравнение (4) является уравнением в частных производных параболического типа с двумя пространственными координатами. Для решения уравнения ФПК (4) в данной работе были опробованы две конечно-разностные схемы: схема метода дробных шагов (МДШ) и схема метода переменных направлений (МПН). Общий смысл этих методов заключается в разбиении многомерной задачи на несколько частных задач [14, 15]. К достоинствам схемы МДШ можно отнести простоту в алгоритмизации и программировании и абсолютную устойчивость даже для задач, содержащих смешанные производные. Недостатком МДШ является то, что схема имеет первый порядок точности по времени. К достоинствам метода переменных направлений можно отнести высокую точность, поскольку метод имеет второй порядок точности по времени. К недостаткам можно отнести условную устойчивость при числе пространственных переменных больше двух и в задачах со смешанными производными уже в двумерном случае.

Стохастические дифференциальные уравнения генератора (1) (уравнения Ланжевена) численно интегрировались по схеме Гюна с учетом аддитивного гауссова шума. Стохастическая компонента включается в разностную схему в виде соответствующих приращений винеровского процесса, задаваемых с помощью генератора случайных чисел со стандартным гауссовым распределением [16]. В силу медленной сходимости разносной схемы при наличии шума шаг интегрирования выбирался малым (не более 0.001 единиц безразмерного времени). Путем статистической обработки данных интегрирования строились вероятностные распределения $p(x,y)$.

3. Результаты численных исследований

На рис. 2 сравниваются результаты, полученные с помощью интегрирования СДУ и численного решения уравнения ФПК методом дробных шагов и методом переменных направлений. Для наглядности сравнения рассматриваются кривые, соответствующие сечениям двумерных распределений при $y = 0$. Из графиков видно, что две кривые из трех практически совпадают, а третья, соответствующая решению методом дробных шагов, довольно сильно отличается от них. Таким образом, МПН при решении данной задачи приводит к более надежному результату, и в дальнейшем для исследования стохастической бифуркации будем пользоваться этим методом решения уравнения ФПК.

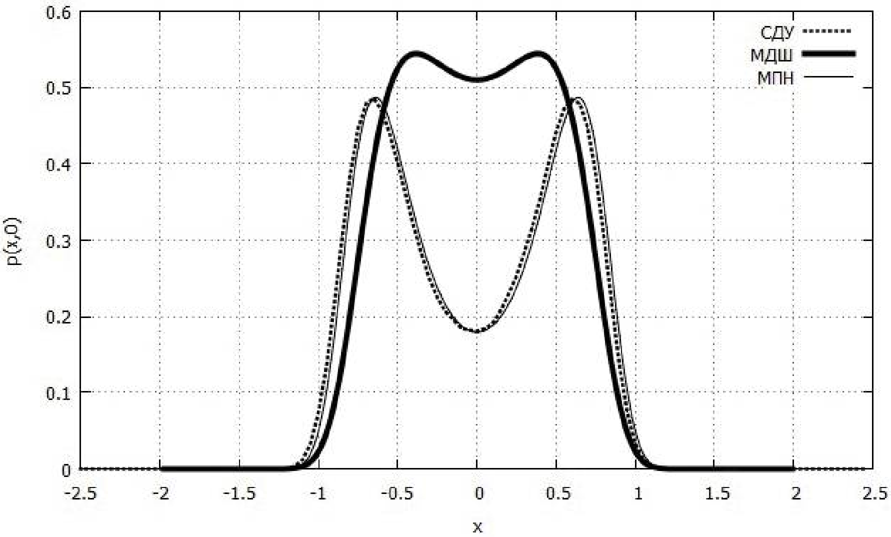

Рис. 2. Распределения плотности вероятности $p(x,0)$, рассчитанные разными методами при $\varepsilon = 0.1$, $D = 0.01$

Распределения $p(x,y)$, получаемые при численном решении уравнения ФПК, а также с помощью уравнений Ланжевена, не обладают аксиальной симметрией, характерной для выражения (2), полученного в рамках квазигармонического приближения. Именно нарушение аксиальной симметрии ведет к возникновению бифуркационного интервала [6 – 8]. Для более точной диагностики бифуркационных переходов строились сечения вероятностного распределения плоскостями $x = y$ и $x = -y$. Данные сечения, характерный вид которых приведен на рис. 3, являются особыми для исследуемой системы (1), так как проходят через стенки кратера распределения в точках их наименьшей и наибольшей высоты соответственно.

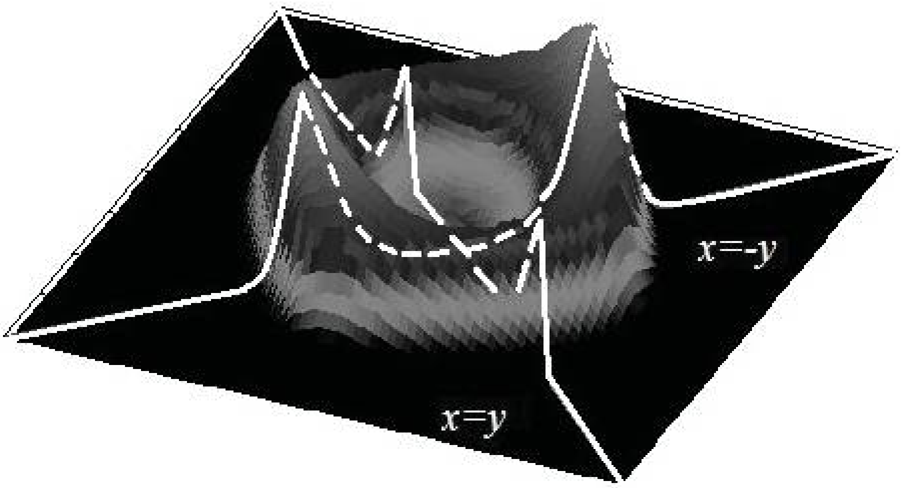

Рис. 3. Характерный вид поверхности $p(x,y)$ с обозначенными сечениями $x = 0$ и $y = 0$

Перестройки плотности вероятности, соответствующие границам бифуркационного интервала, определялись по виду кривых, получаемых в указанных сечениях двумерной плотности вероятности. При переходе через границы бифуркационного интервала с ростом параметра ε происходит рождение двух новых максимумов сперва в сечении $x = -y$ (левая граница), а затем и в сечении $x = y$ (правая граница). Характерные изменения вида кривых приведены на рис. 4.

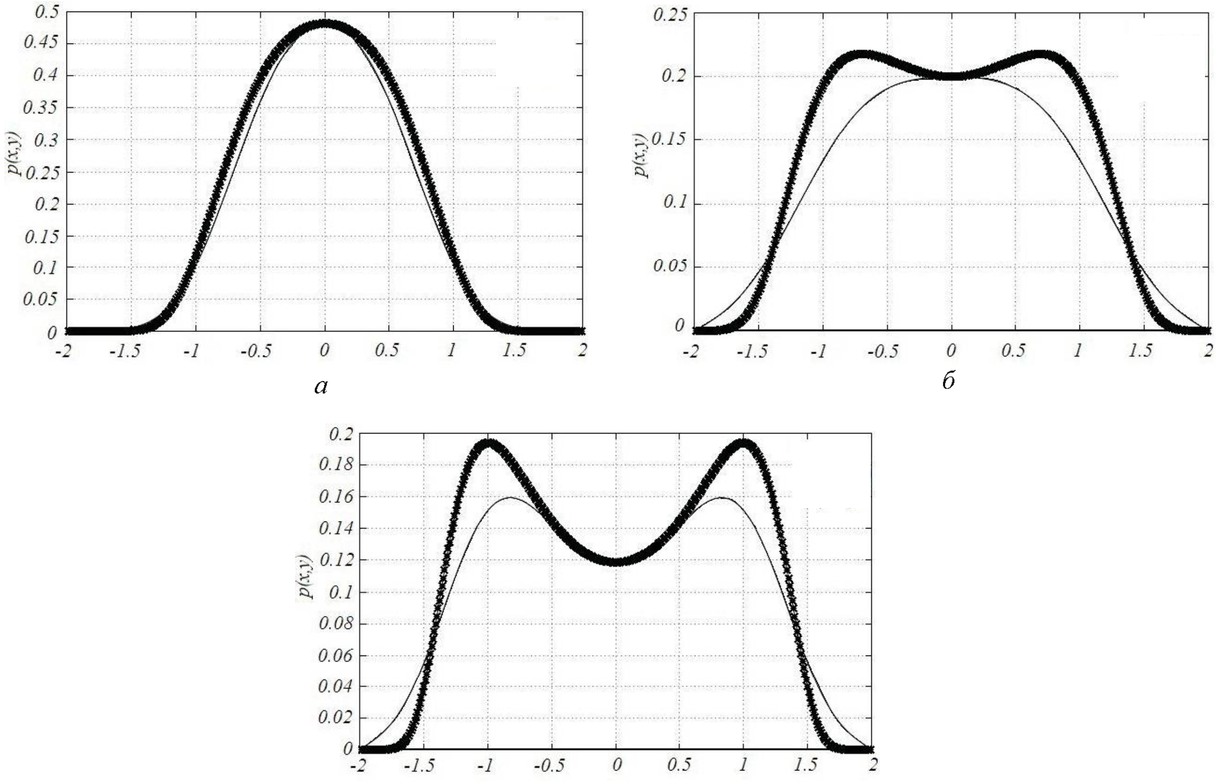

Рис. 4. Графики сечений плотности вероятности в двух плоскостях $x = -y$ (линия со звездочками) и $x = y$ (сплошная линия), полученные при пересечении бифуркационного интервала для фиксированного $D = 0.1$ и различных значений ε:$\varepsilon = -0.2$ *(а)*; $\varepsilon = -0.05$ *(б)*; $\varepsilon = 0.2$ *(в)*. (Результаты получены при интегрировании уравнения ФПК методом переменных направлений)

Численное исследование эволюции распределения при вариации параметра ε и интенсивности шума, проведенное двумя методами, описанными выше, привело к качественно совпадающим результатам. Оба метода выявили существование бифуркационного интервала и однотипную эволюцию плотности вероятности при пересечении границ бифуркационного интервала. Данные результаты подтверждаются также натурными экспериментами, описанными в [17]. На рис. 5 представлена бифуркационная диаграмма автогенератора (1) на плоскости параметров D, ε.

Выводы

В работе проведено численное моделирование автогенератора, описываемого уравнением Ван дер Поля с аддитивным источником гауссова белого шума. Исследовался вид стационарной плотности вероятности динамических переменных *p(x,y)*. Сравнивались два метода исследования: численное интегрирование уравнения ФПК и стохастических дифференциальных уравнений. Был подобран алгоритм интегрирования уравнения ФПК и параметры разностной схемы, обеспечивающие хорошее совпадение результатов двух численных методов при контрольном выборе значений параметров системы.

Численные исследования стохастической бифуркации Андронова – Хопфа как с помощью интегрирования уравнения ФПК, так и на основании решения стохастических уравнений подтвердили теоретические выводы о существовании бифуркационного интервала. Численно были построены границы бифуркационного интервала для различных значений параметра генерации ε и интенсивности шума D.

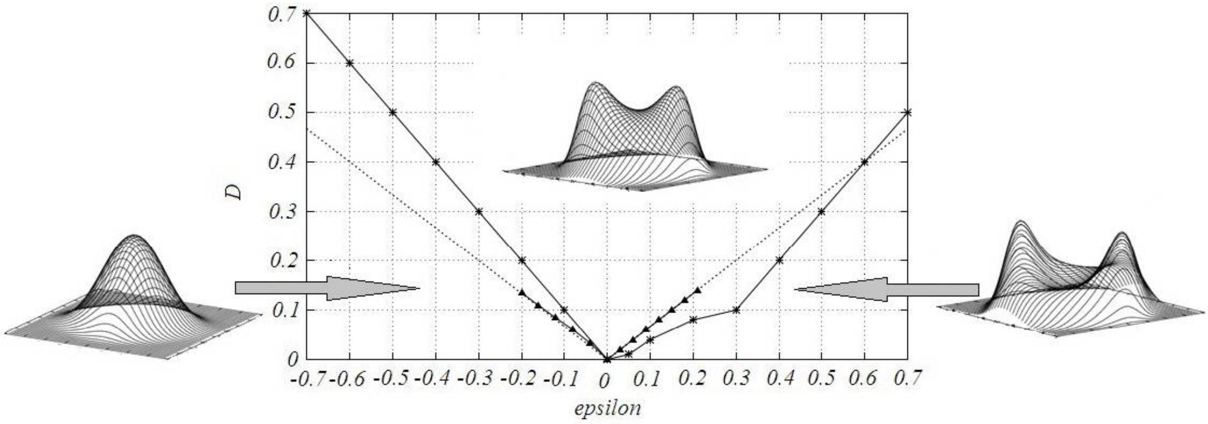

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма системы (1): крестиками отмечены точки границ бифуркационного интервала, полученные в результате численного интегрирования уравнения ФПК методом переменных направлений; треугольники соответствуют расчетам, основанным на интегрировании стохастических уравнений (1); пунктирной линией отмечена теоретические границы бифуркационного интервала (D=2|ε|/3), согласно работе [13]

Однако, как можно видеть из приведенной на рис. 5 бифуркационной диаграммы, метод стохастических дифференциальных уравнений позволил получить границы бифуркационного интервала, которые в количественном отношении очень хорошо совпадают с результатами теории. В то же время метод уравнения ФПК при выбранных параметрах численной схемы оказался не достаточно точным и показал заметное количественное расхождение с теорией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (код проекта 1008).

Список литературы

1. *Арнольд А. В., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций. М. : ВИНИТИ, 1986.
2. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М. ; Ижевск : Институт комп. иссл., 2003.
3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М. : Наука, 1981.
4. *Хорстнемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М. : Мир,1987.
5. *Arnold L.* Random dynamical systems. Berlin : Springer, 2003.
6. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.*, Influence of noise on Duffing-van der Pol oscillators // Zeischrift frangewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM). 1986. Vol. 66. P. 141–146.
7. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631–1634.
8. *Olarrea J., F. J. de la Rubia.* Stochastic Hopf bifurcation : The effect of colored noise on the bifurcational interval // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53(1). P. 268–271.
9. *Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yopp K. R.*, Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation : a base study // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1947–1975.
10. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicativt random disturbances // Chaos, Solitons, and Fractals. 2009. Vol. 39. P. 7–16.
11. *Zakharova A., Vadivasova T., Anishchenko V., Koseska A., Kurths J.* Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81(1). P. 011106(1–6).
12. *Стратонович Р. Л.*, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М. : Сов. радио, 1961.
13. *Risken H.* The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Application // Berlin : Springer, 1989.
14. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. Долгопрудный : Изд. дом «Интеллект», 2008.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 2004.
16. *Никитин Н. Н., Разевиг В. Д.*, Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журн. вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18(1). С. 107–116.
17. *Семенов В. В., Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С.* Экспериментальное исследование эволюции вероятностного распределения в автогенераторах с аддитивным шумом // Письма в Журнал технической физики. 2013. Т. 39б (14). С. 16–24.