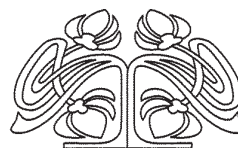




САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ИЗВЕСТИЯ

САРАТОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия



Научный журнал
2015 Том 15
ISSN 1814-733X
ISSN 1817-3020
Издается с 2001 года

Серия Физика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Физика

Кузнецов С. П.

Хаос в системе трех связанных ротаторов:
от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору

5

Яфаров Р. К.

Неравновесная СВЧ-плазма низкого давления
в научных исследованиях и разработках микро- и наноэлектроники

18

Ишбулатов Ю. М., Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Безручко Б. П.

Модель системы автономной регуляции сердечно-сосудистой системы
с контуром барорефлекторного контроля среднего
артериального давления в виде автогенератора
с запаздыванием

32

Аникин В. М.

Статистические характеристики отображения И. М. Акулиничева

38

Университетская летопись

К 70-летию физического факультета Саратовского государственного университета (СГУ)

Аникин В. М.

Научная школа Петра Николаевича Лебедева
и Саратовский университет

49

Роках А. Г.

Сублимированные фотопроводящие пленки типа CdS:
история и современность

53

Сведения об авторах

59

Решением Президиума ВАК
Министерства образования и науки РФ
журнал включен в Перечень ведущих
рецензируемых научных журналов и
изданий, в которых рекомендуется
публикация основных результатов
диссертационных исследований
на соискание ученой степени
доктора и кандидата наук

Зарегистрировано
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ
ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года.
Зарегистрировано в Федеральной
службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и мас-
совых коммуникаций. Свидетельство о
регистрации СМИ ПИ № ФС77-56150
от 15 ноября 2013 года

Индекс издания по каталогу
ОАО Агентства «Роспечать» 36015,
раздел 39 «Физико-математические
науки. Химические науки».
Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Бучко Ирина Юрьевна

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист

Степанова Наталия Ивановна

Верстка

Ковалева Наталья Владимировна

Технический редактор

Ковалева Наталья Владимировна

Корректор

Крылова Инна Геннадиевна

Адрес редакции:

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Издательство Саратовского

университета

Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 28.04.2015.

Формат 60×84 1/8.

Усл. печ. л. 7,2 (7,75).

Тираж 500 экз. Заказ 16.

Отпечатано в типографии
Издательства Саратовского
университета

© Саратовский государственный
университет, 2015



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует на русском и английском языках научные статьи по физике, содержащие новые результаты исследований, статьи учебно-методического характера, содержащие инновационную компоненту, статьи по методологии разделов физической науки, статьи, отражающие хронику научных мероприятий и важных событий в жизни физического сообщества. Материалы, ранее опубликованные или представленные для публикации в другие журналы, к рассмотрению не принимаются.

Рекомендуемый объем статьи – до 16 страниц текста, 5 рисунков и 4 таблицы, объемом краткого сообщения – до 6 страниц текста, 2 рисунка и 2 таблицы. Таблицы не должны превышать 20% общего объема статьи.

На русском языке статья содержит: УДК, заглавие, инициалы и фамилии авторов, название их места работы, электронный адрес автора, с которым ведётся переписка, аннотацию (около 12 строк), ключевые слова (не более 15), текст, благодарности и ссылки на гранты, список литературы.

На английском языке необходимо продублировать: заглавие, инициалы и фамилии авторов, аннотацию, ключевые слова.

Редколлегия рекомендует авторам структурировать текст, используя подзаголовки. Текст должен быть набран и напечатан через 1,5 интервала на бумаге формата А4 с полями 2,5 см, шрифт Times New Roman, размер шрифта основного текста – 14, второстепенного (аннотация, ключевые слова, сноски, таблицы, подписи к рисункам, приложения, список литературы, примечания) – 12; все страницы рукописи, таблицы, рисунки, следует пронумеровать. Таблицы и рисунки представляются отдельно от текста, таблица должна иметь заголовки, на обратной стороне рисунка следует указать его номер, фамилию первого автора. Нумерация источников в списке литературы должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте, ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Для публикации статьи необходимо представить в редакцию:

– подписанный авторами текст статьи, включая резюме и ключевые слова, таблицы, рисунки и подписи к ним (2 экз.);

– сведения об авторах на русском и английском языках: фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученые степень и звание, служебные адреса и телефоны, адреса электронной почты, указать автора, ответственного за переписку с редакцией (1 экз.);

– файлы всех вышеперечисленных материалов в форме документа Microsoft Word doc или Word docx;

– направление от организации (1 экз.);

– внешнюю рецензию, заверенную в установленном порядке.

Материалы, не соответствующие настоящим правилам, редакцией не рассматриваются.

Почтовый адрес редакции: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, физический факультет, журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика», главному редактору.

Электронный адрес: fizika.sgu@bk.ru; fiz@sgu.ru. Сайт журнала: fizika.sgu.ru

CONTENTS

Scientific Part

Physics

Kuznetsov S. P.

Chaos in the System of Three Coupled Rotators: from Anosov Dynamics to Hyperbolic Attractor 5

Yafarov R. K.

Nonequilibrium the Microwave Plasma of Low Pressure in Scientific Researches and Development Micro and Nanoelectronics 18

Ishbulatov Y. M., Karavaev A. S., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Bezruchko B. P.

Model of Cardiovascular System Autonomic Regulation with a Circuit of Baroreflectory Control of Mean Arterial Pressure in the Form of Delayed-Feedback Oscillator 32

Anikin V. M.

Statistic Characteristics of Akulinichev's Map 38

University Annals

The 70th Anniversary of the Faculty of Physics of Saratov State University

Anikin V. M.

Scientific P. N. Lebedev's School and Saratov University 49

Rokakh A. G.

Sublimated Photoconductive Films of CdS Type: History and Modernity 53

Information about the Authors

59



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»**

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Стальмахов Андрей Всеволодович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»**

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Stalmakhov A. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

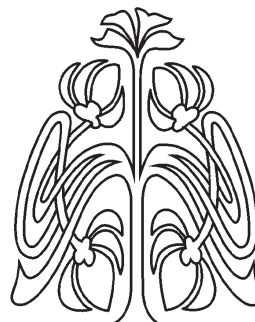
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

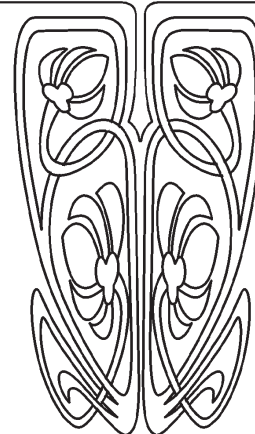
Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: ФИЗИКА»**

Главный редактор

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместители главного редактора

Анищенко Вадим Семенович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Тучин Валерий Викторович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Ревзина Елена Мстиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Аникин Валерий Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бабков Лев Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Вадивасова Татьяна Евгеньевна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Вениг Сергей Борисович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Винницкий Сергей Ильич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Дубна, Россия)

Горохов Александр Викторович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Самара, Россия)

Грибов Лев Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Давидович Михаил Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Кудряшов Валерий Павлович, доктор техн. наук (Саратов, Россия)

Кузнецов Сергей Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Лёвин Юрий Иванович, кандидат физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Мельников Леонид Аркадьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Нефёдов Игорь Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник университета Аалто (Хельсинки, Финляндия)

Никитов Сергей Аполлонович, доктор физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Резчиков Александр Фёдорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Скрипаль Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сухоруков Глеб Борисович, профессор Университета Королевы Марии (Лондон, Великобритания)

Трубецков Дмитрий Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Филимонов Юрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Хлебцов Николай Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шараевский Юрий Павлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шиманский-Гайер Лутц, Ph.D, профессор Гумбольдтского университета (Берлин, Германия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: PHYSICS»**

Editor-in-Chief – Usanov D. A. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Anishchenko V. S. (Saratov, Russia)

Tuchin V. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Revzina E. M. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Anikin V. M. (Saratov, Russia)

Babkov L. M. (Saratov, Russia)

Gorokhov A. V. (Samara, Russia)

Gribov L. A. (Moscow, Russia)

Davidovich M. V. (Saratov, Russia)

Filimonov Yu. A. (Saratov, Russia)

Khlebtsov N. G. (Saratov, Russia)

Kudryashov V. P. (Saratov, Russia)

Kuznetsov S. P. (Saratov, Russia)

Levin Yu. I. (Saratov, Russia)

Nefedov I. S. (Helsinki, Finland)

Nikitov S. A. (Moscow, Russia)

Melnikov L. A. (Saratov, Russia)

Rezchikov A. F. ((Saratov, Russia)

Schimanski-Geier L. (Berlin, Germany)

Sharaevsky Yu. P. (Saratov, Russia)

Skripal A. V. (Saratov, Russia)

Sukhorukov G. B. (London, UK)

Trubetskov D. I. ((Saratov, Russia)

Vadivasova T. E. (Saratov, Russia)

Vinitsky S. I. (Dubna, Russia)

Wenig S. B. (Saratov, Russia)



ФИЗИКА

УДК 517.9

ХАОС В СИСТЕМЕ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ РОТАТОРОВ: ОТ ДИНАМИКИ АНОСОВА К ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМУ АТТРАКТОРУ

С. П. Кузнецов^{1,2,3}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

²Саратовский государственный университет

³Университет Потсдама (Германия)

E-mail: spkuz@yandex.ru

В работе приводится пример системы с хаотической динамикой, построенный на основе трех ротаторов путем модификации консервативной системы с гиперболической динамикой Аносова. Приводятся результаты численного исследования хаотической динамики (портреты аттракторов, реализации, показатели Ляпунова, спектры) и демонстрируется хорошее соответствие динамики на аттракторе предложенной системы с редуцированной моделью, характеризующей динамикой Аносова при соответствующем задании параметра энергии.

Ключевые слова: динамическая система, хаос, аттрактор, гиперболичность, динамика Аносова, ротатор, показатель Ляпунова, автоколебания.

Chaos in the System of Three Coupled Rotators: from Anosov Dynamics to Hyperbolic Attractor

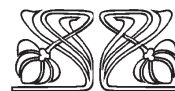
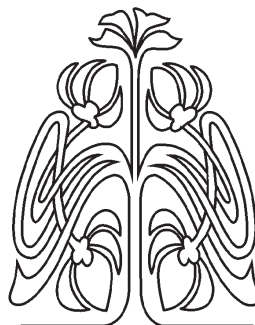
S. P. Kuznetsov

The work presents an example of a system with chaotic dynamics built of three rotators by modifying a conservative system with hyperbolic Anosov dynamics. Results of a computational study of chaotic dynamics are considered (portraits of attractors, time dependences of the variables, Lyapunov exponents, and spectra) and good correspondence is observed between the dynamics on the attractor of the proposed system with the reduced model, characterized by the Anosov dynamics at appropriately defined energy.

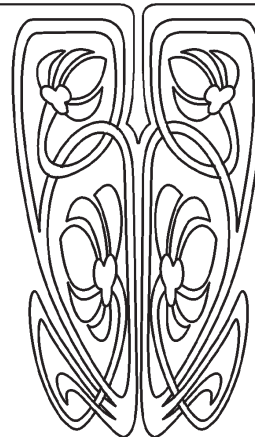
Key words: dynamic system, chaos, attractor, hyperbolic dynamics Anosov, rotator, Lyapunov exponent, the self-oscillation.

Введение

Ротатор в механике можно представить как твердое тело, способное вращаться вокруг неподвижной оси, смещенной относительно центра масс, так что мгновенное положение определяется циклической переменной – углом поворота, и различающиеся на 2π значения этой переменной отвечают при одинаковой мгновенной скорости одному и тому же состоянию ротатора. В широком смысле о ротаторе можно говорить, имея в виду систему любой физической природы, если ее мгновенное состояние задается циклической обобщенной координатой и ее производной по времени – обобщенной скоростью. В такой трактовке ротатор естественно рассматривать как элементарный объект, лежащий в основе многих систем в разных областях физики. Например, при наличии силы тяжести,



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





трансверсальной к оси вращения, механический ротатор соответствует математическому маятнику с нелинейностью синуса [1]. Точно такое же уравнение описывает динамику контакта Джозефсона, где роль угловой переменной играет разность фаз коллективной волновой функции в двух сверхпроводящих областях, разделенных зазором [2, 3]. При помещении маятника в среду с большой вязкостью или при подключении к контакту Джозефсона шунтирующей проводимости приходим к приближенному описанию уравнением первого порядка с нелинейностью синуса [4]. Аналогичное уравнение, известное как уравнение Адлера–Хохлова, возникает также в контексте задач синхронизации автоколебательных систем внешним воздействием в предположении, что оно влияет только на фазу колебаний [5, 6]. Как представляется, перспективы применения моделей на основе ротаторов для реализации и исследования разнообразных феноменов сложной нелинейной динамики далеко не исчерпаны. В настоящей работе предлагается идея использовать связанные ротаторы для построения системы с гиперболическим хаосом.

Представление о гиперболическом хаосе в консервативных системах (системы Аносова) и в диссипативных системах (гиперболические аттракторы) сформировалось в теории динамических систем нескольких десятилетий назад [7–10]. Системы с гиперболической динамикой являются грубыми (структурно устойчивыми), т. е. характеристики динамики малочувствительны к небольшим возмущениям определяющих уравнений¹.

В фазовом пространстве системы траекторию называют гиперболической (седловой), если в ее окрестности эволюция возмущений аналогична таковой вблизи неустойчивой точки типа седла, т. е. можно определить подпространство векторов возмущения, убывающих по норме при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, убывающих при эволюции в обратном времени. В случае систем с дискретным временем все векторы возмущения должны допускать

представление в виде линейной комбинации векторов, принадлежащих этим двум подпространствам. В системах с непрерывным временем добавляется составляющая, относящаяся к одномерному нейтральному подпространству возмущений вдоль фазовой траектории, которые в среднем не нарастают и не убывают в ходе эволюции во времени. Множество траекторий, которые с течением времени приближаются к данной траектории, называется устойчивым многообразием. Неустойчивое многообразие определяется как множество траекторий, уходящих от опорной орбиты (приближающихся к ней в обратном времени).

Гиперболические хаотические аттракторы, состоящие исключительно из седловых траекторий с описанными свойствами, долгое время были представлены только математическими конструкциями (соленоид Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина, DA-аттрактор Смейла). Физически реализуемые системы с такими аттракторами обнаружены (или, скорее, сконструированы) совсем недавно [11, 12]. Помимо модельных систем, исследованных численно, реализованы радиотехнические устройства с гиперболическими аттракторами, которые исследованы с привлечением схемотехнического моделирования [13–16] и в реальных экспериментах [16–19]. В связи с этим возникли предпосылки для использования устройств, демонстрирующих структурно устойчивый хаос, например, в схемах скрытой коммуникации [20, 21], шумовой локации [22], криптографии [23, 24], для генерации случайных чисел [25, 26]. Привлекательность структурно устойчивых систем с практической точки зрения обусловлена нечувствительностью характеристик генерируемого хаоса к погрешностям изготовления, шумам, помехам и т.п. Кроме того, естественно полагать, что наличие хорошо развитой математической теории обеспечит надежную базу при разработке нетривиальных вопросов, связанных с приложениями.

Следует отметить, что в предложенных до сих пор реальных примерах гиперболический аттрактор получается при редукции динамического описания к отображению Пуанкаре, формально представляющему собой систему с дискретным временем. При этом в промежутках времени между состояниями, отвечающими прохождению сечения Пуанкаре, не приходится говорить о хорошо выраженном равномерном по времени растяжении и сжатии для соответствующих подпространств векторов возмущения. Вопрос о

¹ В свое время существовали ожидания, что гиперболический хаос, в силу грубости, может быть распространен в системах разной физической природы и служить, например, для описания гидродинамической турбулентности. В дальнейшем выяснилось, что встречающиеся в приложениях ситуации хаотической динамики обычно не попадают в класс гиперболических в строгом смысле, так что вопрос о реализации гиперболического хаоса в физических системах оказался надолго заброшенным, а интересы математиков переориентировались на поиск более широких обобщений концепции гиперболичности.



том, можно ли построить физические системы с гиперболическими аттракторами, характеризуемыми хотя бы приблизительно равномерным растяжением и сжатием вдоль траекторий в непрерывном времени, открыт.

Чтобы подойти к решению этого вопроса, естественно обратиться в качестве отправного пункта к консервативным системам с гиперболической динамикой в непрерывном времени – системам Аносова [27, 7]. Простым формальным примером служит задача о движении частицы в пространстве с отрицательной кривизной по геодезическим линиям метрики, заданной положительно-определенной квадратичной формой с гладко зависящими от координат коэффициентами [28]. Такое движение характеризуется неустойчивостью по отношению к поперечным возмущениям, и если оно происходит в ограниченной области, то оказывается хаотическим. Данная задача восходит к Адамару и послужила одним из главных источников вдохновения при создании гиперболической теории [7].

Известен пример механического устройства с динамикой Аносова, который строится на осно-

ве трех ротаторов с наложенной дополнительной механической связью. Это шарнирный механизм «тройное соединение», рассмотренный в научно-популярной математической статье Тёрстона и Уикса при обсуждении динамики систем, у которых конфигурационные пространства представляются нетривиальными многообразиями [29]. Механизм составлен из трех идентичных стержней, присоединенных концами к шарнирам, закрепленным в вершинах равностороннего треугольника (рис. 1). Каждый стержень имеет на другом конце подвижный шарнир, и к этим шарнирам прикреплены другие три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира. Мгновенная конфигурация системы задается угловыми переменными $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, из которых только две являются независимыми из-за наложенных механических связей. Таким образом, конфигурационное пространство представляет собой двумерное многообразие. Топологически, как указали Тёрстон и Уикс, это поверхность рода 3 («крендель с тремя дырками»).

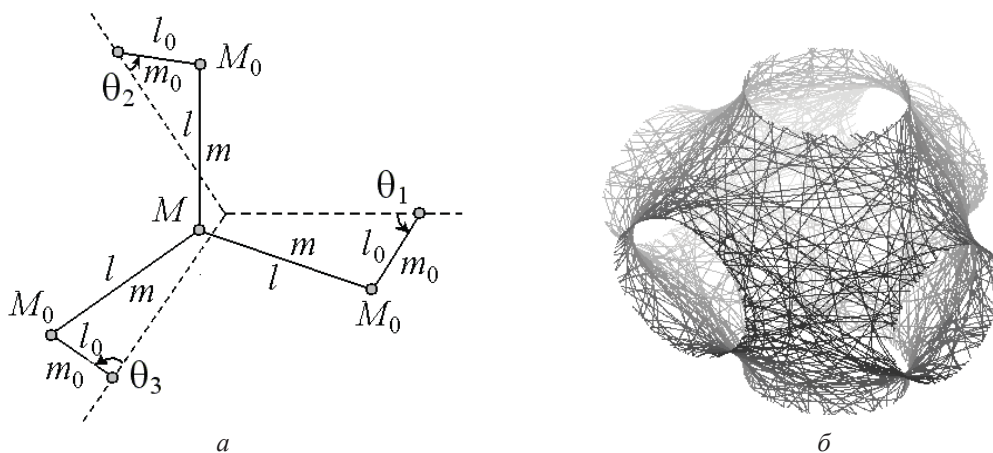


Рис. 1. Механическая система Тёрстона и Уикса, «тройное соединение» (а) и траектория в трехмерном пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ (б), полученная при вычислениях для величин длин и масс $l = \frac{41}{40}$, $l_0 = \frac{7}{40}$, $m = \frac{9}{100}$, $M = \frac{13}{100}$, $M_0 = \frac{1}{5}$, $m_0 = 0$. Траектория непрерывна: при пересечении грани показанной на рисунке кубической ячейки она продолжается от противоположной грани куба в силу периодичности конфигурационного пространства по трем переменным

В отсутствие трения и внешних сил, когда движение происходит по инерции, с сохранением кинетической энергии, МакКэй и Хант [30] установили возможность динамики Аносова, т. е. консервативной разновидности гиперболического хаоса, в этой системе. Кинетическая энергия выражается как квадратичная форма через обобщенные скорости – временные производные локальных координат на двумерном многообразии.

Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от длин и масс элементов конструкции, задает метрику на двумерном многообразии, причем движение имеет место по геодезическим линиям этой метрики. Перебором вариантов был найден набор параметров, при котором метрика характеризуется всюду отрицательной кривизной. На рис. 1, б на трехмерном графике показана типичная траектория в пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$,



полученная при численном решении механических уравнений движения для этого случая.

В работе МакКэя и Ханта отмечено, что при добавлении трения и надлежащего управления посредством механизма обратной связи, можно получить систему с гиперболическим аттрактором. До сих пор, однако, не было проведено конкретного исследования, в рамках которого такой аттрактор был бы в явном виде представлен.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы ввести в рассмотрение сконструированную на основе связанных ротаторов модель с гиперболическим хаосом и продемонстрировать ее динамику на уровне компьютерного моделирования.

1. Консервативная система трех ротаторов с потенциалом взаимодействия

Начнем с механической системы, заданной функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2, \quad (1)$$

что отвечает системе трех ротаторов, у которых угловые координаты задаются переменными x_1, x_2, x_3 , и присутствует взаимодействие, описываемое потенциальной функцией (рис. 2).

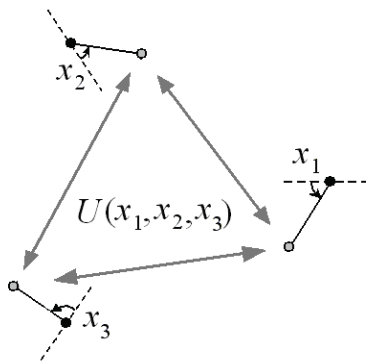


Рис. 2. Схематическое изображение системы трех ротаторов, связанных потенциалом взаимодействия

Эту систему можно рассматривать как модификацию тройного шарнирного механизма Тёрстона – Уикса – МакКэя – Ханта, где вместо внутренних кривошипов и подвижного шарнира, налагающих механическую связь между ротаторами, введен потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2$. Система уравнений движения, получаемая из функции Лагранжа (1) стандартным образом [31],

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

записывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_1, \\ \ddot{x}_2 &= (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_2, \\ \ddot{x}_3 &= (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_3. \end{aligned} \quad (3)$$

У системы имеется интеграл движения, выражающий закон сохранения энергии

$$W = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2 = \text{const}. \quad (4)$$

На рис. 3 показаны портреты траекторий в трехмерном конфигурационном пространстве, полученные при численном решении уравнений для трех разных значений энергии. Видно, что при малой энергии траектория располагается с высокой степенью соответствия на гладкой поверхности, отвечающей минимуму потенциала $U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3)^2$. Эта поверхность, с учетом свойства периодичности конфигурационного пространства по трем циклическим переменным x_1, x_2, x_3 , отвечает многообразию рода 3 («крендель с тремя дырками»), как и для системы Тёрстона и Уикса. С увеличением энергии траектория «распухает» в направлении поперек этой поверхности, что видно на панелях (б) и (в).

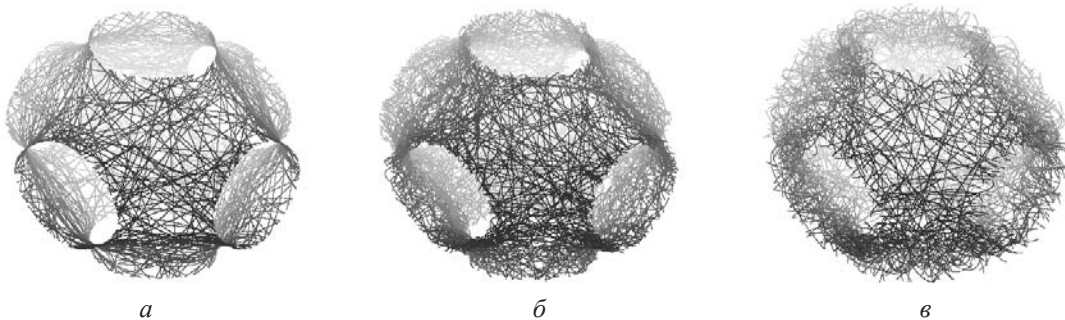


Рис. 3. На каждой картинке показана индивидуальная траектория в трехмерном конфигурационном пространстве консервативной системы, стартующая из точки $x_1=1.4895, x_2=5.5649, x_3=3.7224$ с начальной скоростью, направленной вдоль эквипотенциальной кривой, для энергии $W=0.002127$ (а), 0.034 (б) и 0.136 (в)



2. Редуцированная консервативная система и связь с задачей о движении по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны

Установим связь предлагаемой консервативной системы с динамикой на поверхности отрицательной кривизны. Для этого обратимся к редуцированной системе, которая получается в предположении, что на угловые переменные $x_{1,2,3}$ наложено условие связи

$$F(x_1, x_2, x_3) = \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 = 0, \quad (5)$$

отвечающее минимуму потенциала взаимодействия, что естественно рассматривать как ситуацию, относящуюся к пределу малой энергии. Редуцированную модель можно также интерпретировать как наиболее простой для анализа вариант модели Тёрстона – Уикса – МакКэя – Ханта, соответствующий случаю $l_0 \ll l$ [30].

Дифференцируя уравнение связи, можно записать

$$(\sin x_1)dx_1 + (\sin x_2)dx_2 + (\sin x_3)dx_3 = 0. \quad (6)$$

Имея конкретную мгновенную конфигурацию системы, соответствующую определенным значениям переменных x_i , найдем в данной точке все три производные $\partial F / \partial x_i$, $i = 1, 2, 3$ и в качестве обобщенных координат используем те две переменные, производные по которым

$$W(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2) = \frac{1}{2} [E(x_1, x_2)\dot{x}_1^2 + F(x_1, x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + G(x_1, x_2)\dot{x}_2^2], \quad (9)$$

где

$$E(\theta_1, \theta_2) = 1 + \frac{\sin^2 x_1}{1 - (\cos x_1 + \cos x_2)^2}, \quad F(x_1, x_2) = \frac{2 \sin x_1 \sin x_2}{1 - (\cos x_1 + \cos x_2)^2},$$

$$G(x_1, x_2) = 1 + \frac{\sin^2 x_2}{1 - (\cos x_1 + \cos x_2)^2}. \quad (10)$$

Записывая уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_2},$$

получаем

$$2E \ddot{x}_1 + F \ddot{x}_2 + 2E'_1 \dot{x}_1^2 + 2E'_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + F'_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + F'_2 \dot{x}_2^2 = E'_1 \dot{x}_1^2 + F'_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + G'_1 \dot{x}_2^2,$$

$$F \ddot{x}_1 + 2G \ddot{x}_2 + F'_1 \dot{x}_1^2 + F'_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2G'_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2G'_2 \dot{x}_2^2 = E'_2 \dot{x}_1^2 + F'_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + G'_2 \dot{x}_2^2, \quad (11)$$

где штрих и индекс при символах E, F, G означают частную производную по соответствующей

имеют меньшую абсолютную величину. Пусть это x_i и x_j , тогда их принимаем за две обобщенные координаты, а третья угловая переменная x_k выражается через них из условия связи посредством уравнения $\cos x_k = (-\cos x_i - \cos x_j)$. Заметим, что квадрат скорости \dot{x}_k выражается через две другие производные:

$$\dot{x}_k^2 = \frac{\dot{x}_i^2 \sin^2 x_i + \dot{x}_j^2 \sin^2 x_j}{1 - (\cos x_i + \cos x_j)^2}. \quad (7)$$

Процедура выбора обобщенных координат производится на каждом шаге численного решения задачи, что обеспечивает хорошее (без сингулярностей) описание движения на всем конфигурационном пространстве, представляющем собой многообразие с топологией «бублика с дырками».

В формулу для кинетической энергии

$$W = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \quad (8)$$

подставим выражение одной из угловых скоростей через две других. Результатом будет представление кинетической энергии, отвечающее функции Лагранжа редуцированной системы. Дальнейшие уравнения приведем в предположении, что третья переменная выражена через первую и вторую; альтернативные варианты получаются циклической перестановкой индексов. Имеем:

обобщенной координате, и в итоге приходим к уравнениям

$$2E\ddot{x}_1 + F\ddot{x}_2 = -E'_1\dot{x}_1^2 - 2E'_2\dot{x}_1\dot{x}_2 + (G'_1 - F'_2)\dot{x}_2^2, \quad F\ddot{x}_1 + 2G\ddot{x}_2 = (E'_2 - F'_1)\dot{x}_1^2 - 2G'_1\dot{x}_1\dot{x}_2 - G'_2\dot{x}_2^2. \quad (12)$$

Разрешая систему относительно вторых производных, имеем:

$$\ddot{x}_1 = \frac{FF'_1 - 2GE'_1 - FE'_2}{4EG - F^2} \dot{x}_1^2 + \frac{2FG'_1 - 4GE'_2}{4EG - F^2} \dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{2GG'_1 - 2GF'_2 + G'_2F}{4EG - F^2} \dot{x}_2^2,$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{2EE'_2 - 2EF'_1 + E'_1F}{4EG - F^2} \dot{x}_1^2 + \frac{2E'_2F - 4EG'_1}{4EG - F^2} \dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{FF'_2 - FG'_1 - 2EG'_2}{4EG - F^2} \dot{x}_2^2. \quad (13)$$



На рис. 4 приводится типичный портрет траектории в трехмерном конфигурационном пространстве, полученный при численном решении уравнений со случайными начальными условиями. Видно, что траектория плотно покрывает поверхность, которая топологически эквивалентна «кренделю с тремя дырками».

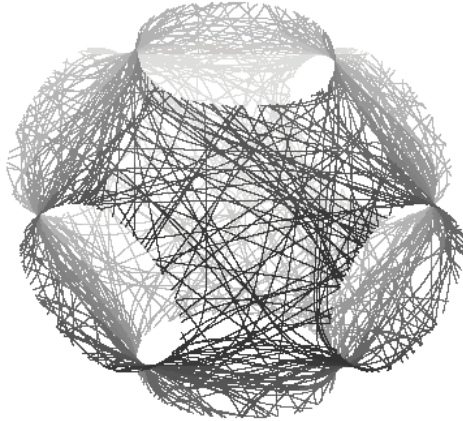


Рис. 4. Типичный портрет траектории редуцированной системы в трехмерном конфигурационном пространстве (x_1, x_2, x_3)

На рис. 5, 6 показаны реализации – зависимости обобщенных координат трех ротаторов x_1, x_2, x_3 и скоростей $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ от времени для двух значе-

ний энергии $W = 0.02$ и 0.1 соответственно. Как можно видеть, реализации носят хаотический характер – визуально не заметно какого-либо повторения форм.

Чтобы охарактеризовать наблюдаемый хаос на количественном уровне, естественно использовать показатели Ляпунова. Редуцированная система имеет четыре показателя Ляпунова, два из которых нулевые и связаны с возмущениями типа сдвига по траектории и сдвига по энергии. Сумма всех показателей обращается в ноль в силу консервативной природы системы. Поэтому в численных расчетах достаточно вычислять только один наибольший показатель, а остальные три определяются очевидным образом с учетом указанных свойств системы.

Расчеты показывают, что наибольший показатель Ляпунова положительный, т. е. в самом деле динамика хаотическая. Для $W = 0.02$ и 0.1 , что соответствует диаграммам на рис. 5 и 6, показатели Ляпунова, рассчитанные по алгоритму Бенеттина [32, 33] на основе совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях, таковы:

$$\lambda_1 = 0.100, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -0.100 \quad (14)$$

и

$$\lambda_1 = 0.224, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -0.224. \quad (15)$$

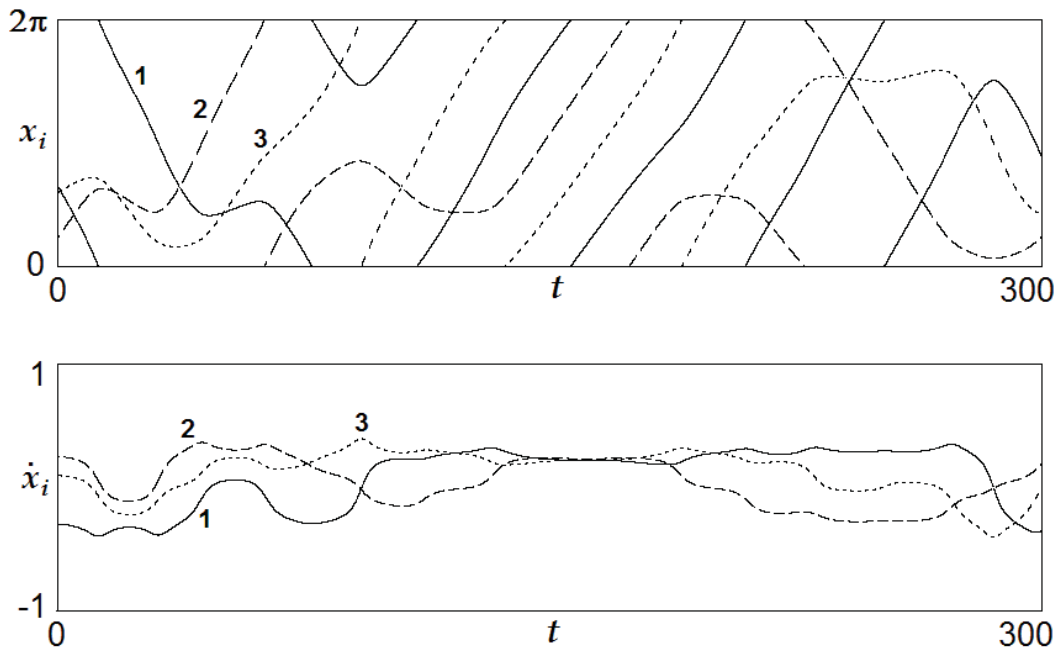


Рис. 5. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для редуцированной модели при величине кинетической энергии $W = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = 0.02$. В силу циклической природы обобщенных координат непрерывные кривые на верхней диаграмме выглядят так, что при пересечении верхней границы кривая продолжается, стартуя от нижней границы, и наоборот

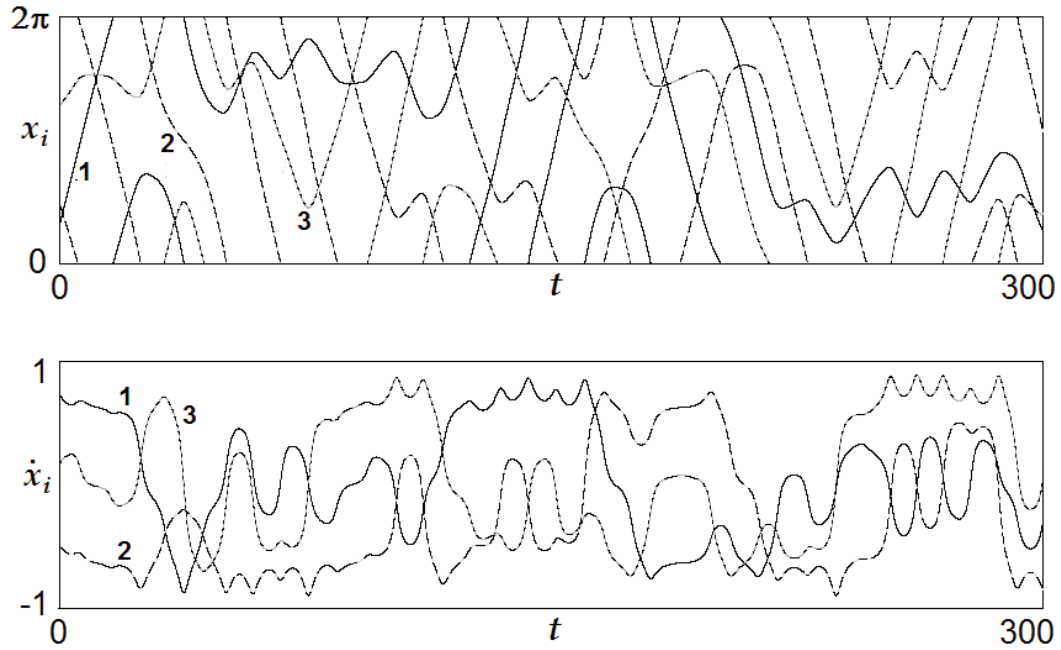


Рис. 6. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для редуцированной модели при величине кинетической энергии $W = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = 0.1$

Обсудим возможность интерпретации хаотической динамики как ассоциирующей с движением по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны.

Выражение для кинетической энергии (9) определяет метрику в локальных координатах (θ_1, θ_2) :

$$K = \frac{2}{(4EG - F^2)^2} \begin{pmatrix} -E''_{22} + F''_{12} - G''_{22} & E'_1 & F'_1 - E'_2 & \left| \begin{matrix} 0 & E'_2 & G'_1 \\ E'_2 & 2E & F \\ G'_1 & F & 2G \end{matrix} \right| \\ F'_2 - G'_1 & 2E & F & \\ G'_2 & F & 2G & \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В метрике (9) кривизну с помощью формулы (17) удается представить явно:

$$K = -\frac{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos x_1 \cos x_2}{4(-\frac{3}{2} + \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos x_1 \cos x_2)^2}, \quad (18)$$

что можно с учетом уравнения связи переписать в симметричном виде

$$K = \frac{\cos x_1 \cos x_2 + \cos x_2 \cos x_3 + \cos x_1 \cos x_3}{[3 + 2(\cos x_1 \cos x_2 + \cos x_2 \cos x_3 + \cos x_1 \cos x_3)]^2}. \quad (19)$$

Движение изображающей точки на многообразии, отвечающем конфигурационному пространству системы, происходит по геодезическим линиям. Это линии минимальной (экстремальной) длины, определенной в соответствии с метрикой, заданной квадратичной формой для кинетической энергии.

$$ds^2 = E(x_1, x_2)dx_1^2 + F(x_1, x_2)dx_1 dx_2 + G(x_1, x_2)dx_2^2, \quad (16)$$

а гауссова кривизна, как известно из дифференциальной геометрии, выражается через фигурирующие здесь коэффициенты формулой Бриоски (Brioschi) [34]:

Как можно видеть из формулы (19) с учетом соотношения $\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 = 0$, кривизна всюду отрицательна за исключением восьми точек, где она нулевая в соответствии с тем, что все три косинуса обращаются в ноль, т.е. $x_1 = \pm\pi/2$, $x_2 = \pm\pi/2$, $x_3 = \pm\pi/2$. Поэтому при ненулевой кинетической энергии динамика по



геодезическим линиям будет соответствовать динамике Аносова. Рис. 7 поясняет, как меняется кривизна в зависимости от положения определяющей точки на многообразии в конфигурационном пространстве.

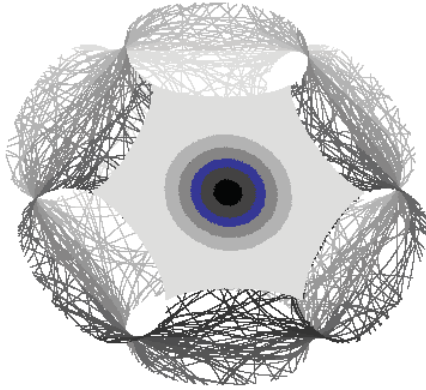


Рис. 7. Портрет траектории в трехмерном конфигурационном пространстве (x_1, x_2, x_3) , где на части многообразия цветом обозначена кривизна – от больших отрицательных значений (светлый тон) до близких к нулю (темный тон). На остальных частях многообразия области различной кривизны расположены аналогично (по очевидной симметрии)

Имея формулу для кривизны, можно применить альтернативный метод вычисления показателей Ляпунова. Вектор разности радиус-векторов для двух близких точек на близких геодезических линиях удобно представить в локально определенном базисе $(\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\perp})$, где \mathbf{e}_{\parallel} – единичный вектор, направленный вдоль геодезической линии, а \mathbf{e}_{\perp} – ортогональный к нему единичный вектор. Тогда, записав вектор инфинитезимального возмущения в виде $J_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + J_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$, можно вывести уравнения для коэффициентов:

$$\ddot{J}_{\parallel} = 0, \quad \ddot{J}_{\perp} = -2K(t)WJ_{\perp}, \quad (20)$$

где $K(t)$ – локальная кривизна, которая зависит от мгновенных координат, $W = \frac{1}{2}\dot{s}^2$ – кинетическая энергия. Из первого уравнения видно, что имеется два нулевых показателя, ассоциирующихся с продольной составляющей движения. Из

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)]\dot{x}_1 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_1, \\ \ddot{x}_2 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)]\dot{x}_2 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_2, \\ \ddot{x}_3 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)]\dot{x}_3 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) \sin x_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Параметр ν далее фиксируем и произвольно примем равным 5. Автоколебания возникают при $\mu > 0$, и их средняя кинетическая энергия увели-

второго уравнения, учитывая, что $K \leq 0$ (причем равенство достигается только в исключительных изолированных точках), следует наличие равных по абсолютной величине положительного и отрицательного показателя. Конкретно найти старший показатель можно, интегрируя уравнение для коэффициента J_{\perp} совместно с уравнениями движения. При значении энергии $W = 0.02$ его величина составляет $\lambda = 0.100$, что хорошо согласуется с приведенным выше результатом. Для редуцированной консервативной системы можно записать формулу для старшего показателя Ляпунова в виде $\lambda = \kappa\sqrt{W}$, где коэффициент $\kappa \approx 0.70$ определяется средней кривизной вдоль траектории. Вследствие присущей гиперболическому хаосу эргодичности этот коэффициент статистически хорошо определен для типичной траектории.

3. Диссипативная возбуждающаяся система

Чтобы из консервативной системы (3) получить автоколебательную систему, необходимо ее модифицировать так, чтобы при малых величинах энергии система была активной (колебания раскачиваются), а при больших обеспечивалось бы затухание.

В рамках лагранжева формализма в теоретической механике стандартная процедура учета диссипации подразумевает использование функции Релея $R(\dot{x}_i)$ [31], с привлечением которой уравнения движения представляются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}. \quad (21)$$

Введем диссипацию в модели (3) с функцией Лагранжа (1) так, чтобы она была отрицательной при малых энергиях (что отвечает возбуждению) и положительной при больших энергиях (что отвечает затуханию). Для этого положим

$$R(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \nu[-\frac{1}{2}\mu(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{8}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^2]. \quad (22)$$

Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

чивается с ростом μ приблизительно по закону $\overline{W} = \mu$, что видно из полученной в численных расчетах диаграммы, которая показана на рис. 8.



Наряду с увеличением средней энергии наблюдается также рост среднеквадратичного отклонения величины энергии от среднего значения, который при больших значениях параметра μ становится сравнимым с самой энергией.

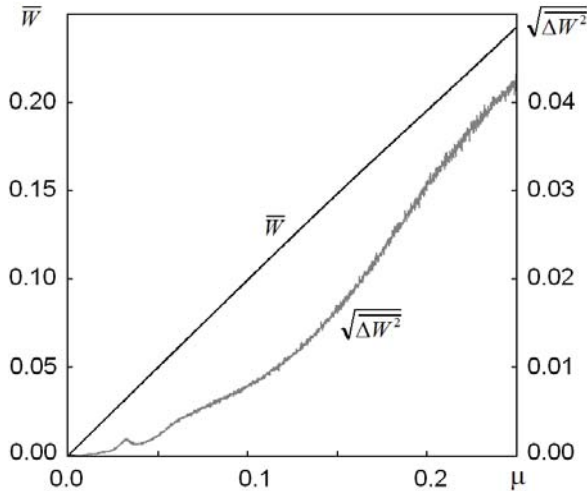


Рис. 8. Зависимости средней кинетической энергии автоколебаний и среднеквадратичного отклонения от параметра μ , полученные в численных расчетах для системы (23) при $\nu = 5$

На рис. 9 и 10 показаны зависимости переменных x_1, x_2, x_3 и скоростей $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ от времени при задании $\mu = 0.02$ и $\mu = 0.1$, что соответствует значениям энергии, использованным при построении реализаций в редуцированной системе на рис. 4 и 5. Сравнение показывает, что

реализации для обобщенных координат сходны с таковыми для редуцированной системы, а для обобщенных скоростей характеризуются дополнительными быстрыми осцилляциями на определенных стадиях процесса, которые становятся более выраженными с ростом надкритичности.

На рис. 11 показаны аттракторы системы (23) в проекции на трехмерное конфигурационное пространство x_1, x_2, x_3 для двух значений μ при $\nu = 5$.

В первом случае принадлежащая аттрактору траектория визуально представляется расположенной на двумерном многообразии, отвечающем постоянному потенциалу, как на рис. 3, а, а во втором – выглядит «распушенной» в поперечном направлении, демонстрируя сходство с диаграммами (б) и (в) на рис. 3.

На рис. 12 показана зависимость показателей Ляпунова от параметра μ . Размерность фазового пространства равна 6, поэтому имеется шесть показателей Ляпунова. В частности, показатели Ляпунова при $\mu = 0.02$ таковы:

$$\lambda_1 = 0.0994, \lambda_2 = 0.0002, \lambda_3 = 0.0000, \lambda_4 = -0.0032, \lambda_5 = -0.0994, \lambda_6 = -0.1969, \quad (24)$$

а при $\mu = 0.1$ соответственно

$$\lambda_1 = 0.2145, \lambda_2 = 0.0000, \lambda_3 = -0.0080, \lambda_4 = -0.0363, \lambda_5 = -0.2112, \lambda_6 = -0.9433, \quad (25)$$

что можно сравнить с показателями редуцированной системы (14), (15).

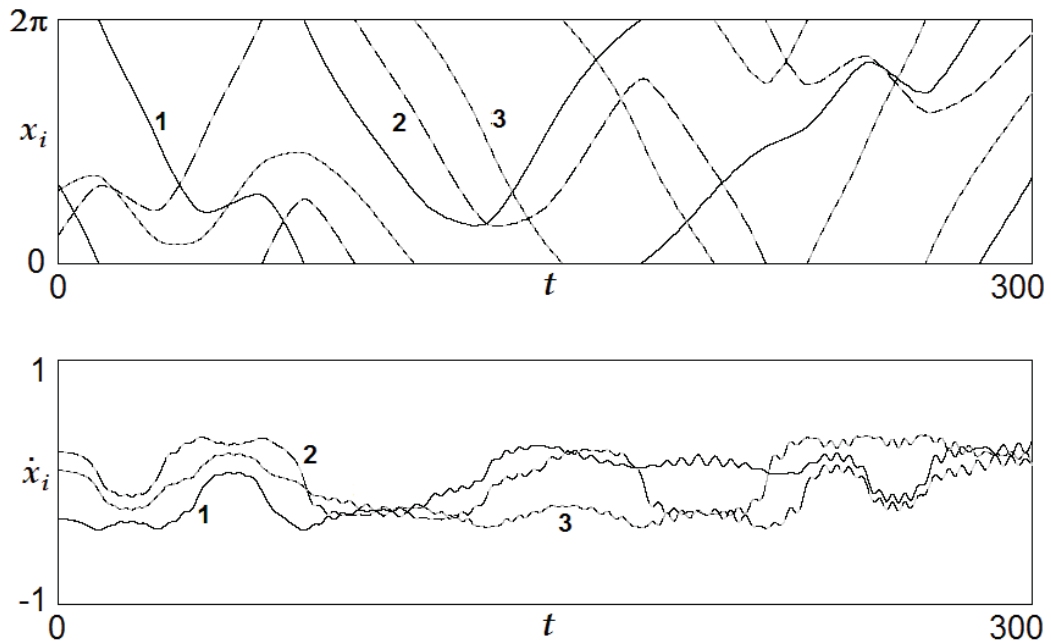


Рис. 9. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для автоколебательной системы при $\nu = 5$ и $\mu = 0.02$

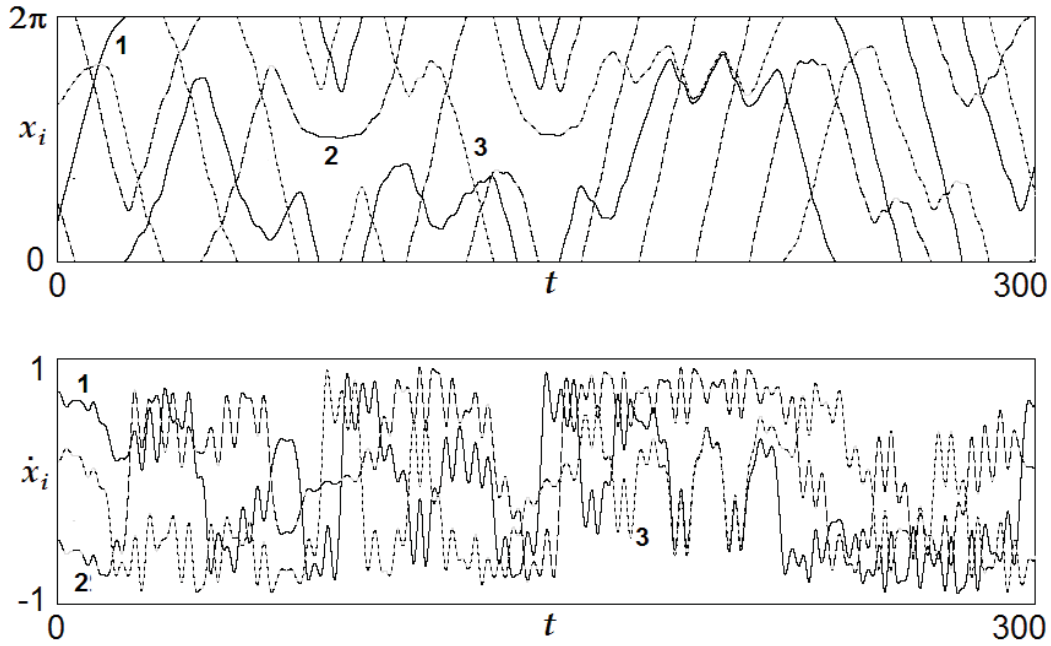


Рис. 10. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные в численных расчетах для автоколебательной системы при $\nu = 5$ и $\mu = 0.1$

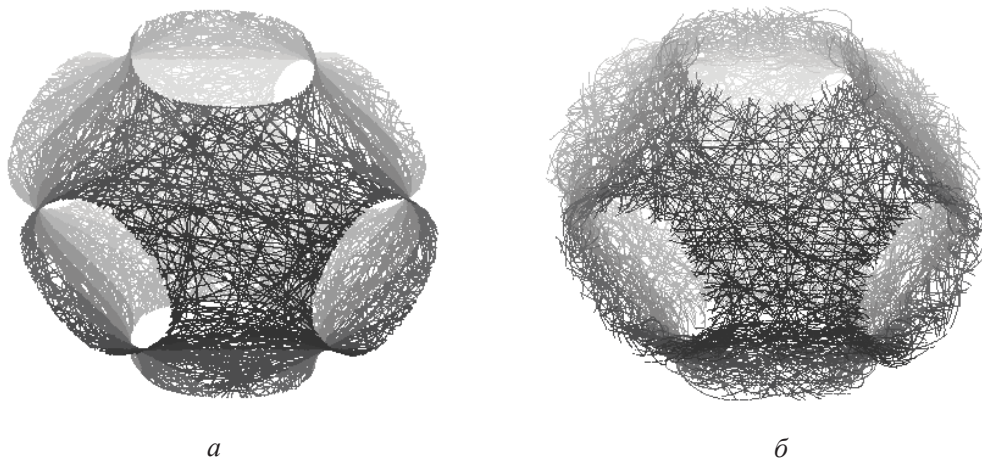


Рис. 11. Траектория на аттракторе диссипативной системы (23) при $\nu = 5$ в трехмерном конфигурационном пространстве $\mu = 0.02$ (а) и $\mu = 0.2$ (б)

В рассмотренном диапазоне изменения параметра один показатель положительный, притом он плавно зависит от параметра. Второй и третий показатели близки к нулю. (Заметим, что присутствие одного нулевого показателя, ассоциирующегося с возмущением типа сдвига вдоль опорной траектории, обусловлено автономной природой системы [33].) Остальные показатели отрицательные, причем один из них близок по абсолютной величине к наибольшему положительному показателю. Сумма всех показателей отрицательна, так что рассматриваемый

объект в фазовом пространстве системы это действительно аттрактор.

Чтобы убедиться, что механизм хаоса в системе (23) такой же, как в редуцированной модели, т. е. связан с гиперболической динамикой на многообразии отрицательной кривизны, рассмотрим зависимость старшего показателя Ляпунова от средней кинетической энергии. На рис. 13 показан соответствующий график в координатах \sqrt{W} , λ , полученный в численных расчетах. Как можно видеть, в области $\sqrt{W} < 0.2$ (что соответствует $\mu < 0.04$) пока-

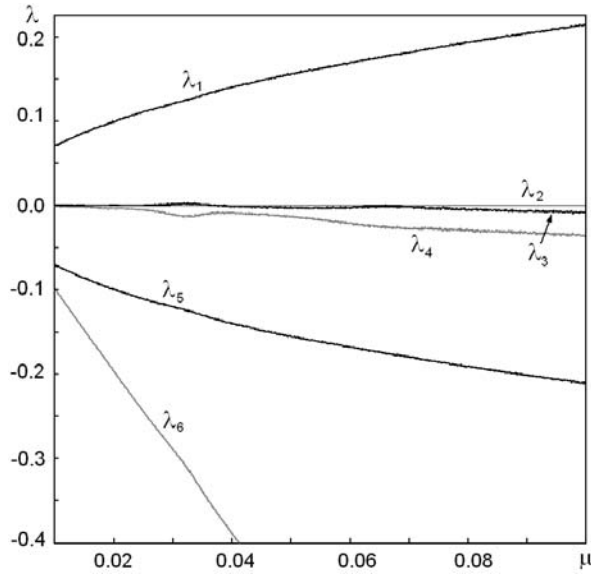


Рис. 12. Зависимость показателей Ляпунова от параметра для аттрактора системы (23) при $\nu = 5$

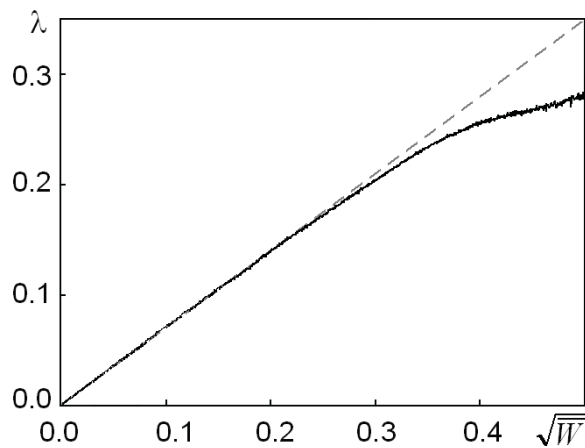


Рис. 13. Диаграмма, иллюстрирующая зависимость старшего показателя Ляпунова от средней кинетической энергии согласно численным расчетам для модели (23) при $\nu = 5$ и изменении μ в интервале от 0 до 0.25

затель Ляпунова практически равен величине $0.7\sqrt{W}$. Это хорошо согласуется с результатом для редуцированной модели, полученным на основе рассмотрения движения по геодезическим линиям на многообразии отрицательной кривизны.

На рис. 14 показаны спектры мощности сигнала, определенного как $u(t) = \cos x_1(t)$ для одного из ротаторов, составляющих систему (23), которые построены по результатам обработки временных рядов для переменной u , полученных при численном моделировании динамики на аттракторе. Спектр рассчитывается в соответ-

ствии с методом статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемом в теории случайных процессов [35]. Процедура включает разбиение полного массива данных на участки определенной длины, выполнение преобразования Фурье для каждого участка и усреднение квадратов амплитуд спектральных компонент по всем участкам. Графики спектральной плотности представлены в логарифмической шкале в традиционно используемых децибелах (10 дБ соответствуют 10-кратному отношению сопоставляемых уровней мощности) для значений параметра надкритичности $\mu = 0.02$ (а) и $\mu = 0.1$ (б) при $\nu = 5$. Как можно видеть из диаграмм, спектр является сплошным, что соответствует хаотической динамике, он довольно равномерный (нет выраженной изрезанности), и характерная ширина спектра становится больше с ростом параметра надкритичности.

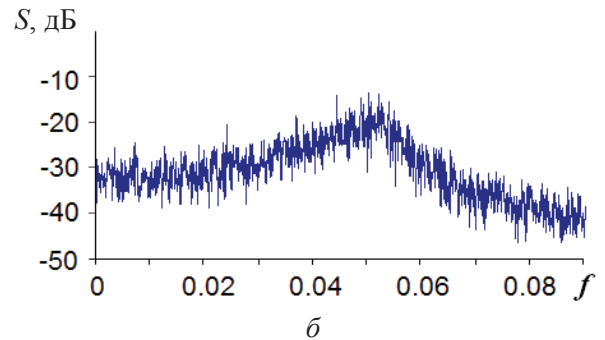
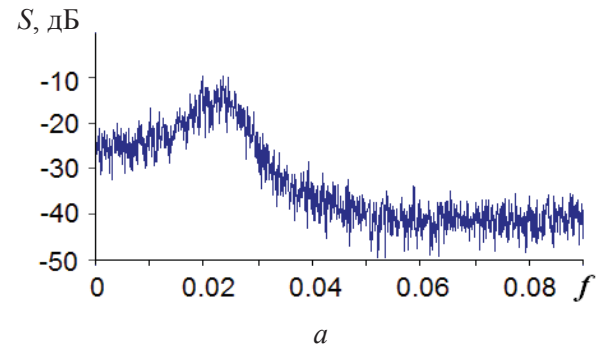


Рис. 14. Спектры Фурье случайного сигнала $u(t) = \cos x_1(t)$, порождаемого системой (23) при $\nu = 5$, $\mu = 0.02$ (а) и $\mu = 0.1$ (б)

Заключение

Представлен пример системы трех связанных ротаторов с хаотической динамикой. В основу построения положена модель с динамикой Аносова, благодаря чему реализующийся в системе гиперболический аттрактор характеризуется приблизительно равномерным растяжением и сжатием вдоль устойчивых



и неустойчивых многообразий траекторий в непрерывном времени. Для системы характерна также высокая степень равномерности спектра мощности генерируемого хаотического сигнала.

В силу того что концепция ротатора как объекта, состояние которого задается циклической обобщенной координатой и соответствующей обобщенной скоростью, может быть отнесена к системам различной физической природы, разумно полагать, что предложенная система на основе трех ротаторов могла бы быть реализована не только в механике, но также в радиофизике и нелинейной оптике. Такая система, представляющая собой генератор грубого хаоса вследствие гиперболической природы динамики, возможно, была бы интересна для приложений, таких как скрытая коммуникация, шумовая локация, криптография, генерация случайных чисел.

С математической точки зрения представляло бы интерес строгое обоснование гиперболической природы аттрактора в предложенной системе, что позволило бы уверенно говорить о грубости системы как генератора хаоса и относить к ней другие существенные результаты хорошо развитой математической теории гиперболического хаоса. На данный момент утверждение о гиперболической природе наблюдаемой хаотической динамики носит гипотетический характер, но имеет под собой то основание, что в численных расчетах продемонстрирована близость к системе Аносова, отвечающей редуцированной модели. Возможные подходы к более строгому обоснованию гиперболичности могут базироваться на компьютерной проверке критерия конусов [8, 10, 11, 36], анализе статистики углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий [37–39, 10, 11], а также анализе инвариантной меры на аттракторе, которая должна соответствовать концепции меры Синая – Рюэля – Боуэна [10, 11].

Автор благодарен профессору университета Потсдама А. С. Пиковскому за полезное конструктивное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-02-02893) и гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1726.2014.2 «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики и их приложения».

Список литературы

1. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. 2-е изд. М. : Физматлит, 2005. 292 с.
2. Лухарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами : основы теории. М. : Изд-во МГУ, 1978. 446 с.
3. Cirillo M., Parmentier R. D., Savo B. Mechanical analog studies of a perturbed sine-Gordon equation // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 1981. Vol. 3, № 3. P. 565–576.
4. Kuznetsov S. P., Neumann E. Torus fractalization and singularities in the current-voltage characteristics for the quasiperiodically forced Josephson junction // *Europhysics Letters*. 2003. Vol. 61, № 1. P. 20–26.
5. Adler R. A study of locking phenomena in oscillators // *Proc. IRE*. 1946. Vol. 34, № 6. P. 351–357.
6. Хохлов Р. В. К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы // *Докл. АН СССР*. 1954. Т. 97, № 3. С. 411–414.
7. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов А. В., Солодов В. В., Старков А. Н., Степин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением // *Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*. М. : ВИНТИ, 1991. Т. 66. С. 5–242.
8. Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны*. М. : Наука, 1979. С. 192–212.
9. Shilnikov L. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics : A Tutorial // *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353–2001.
10. Kuznetsov S. P. *Hyperbolic Chaos : A Physicist's View*. Berlin ; Heidelberg : Higher Education Press ; Beijing and Springer-Verlag, 2012. 336 p.
11. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы : от математики к физике. М. ; Ижевск : ИКИ, 2013. 488 с.
12. Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы : от математики к физике // *УФН*. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
13. Kuznetsov S. P. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. Vol. 21. 043105.
14. Кузнецов С. П. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 5. С. 98–115.
15. Кузнецов С. П. Параметрический генератор грубого хаоса : схмотехническая реализация и моделирование в программной среде Multisim // *Вестн. СГТУ*. 2014. № 3 (76). С. 34–46.
16. Кузнецов С. П., Пономаренко В. И., Селезнев Е. П. Автономная система – генератор гиперболического хаоса. Схмотехническое моделирование и экспери-



- мент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 5. С. 17–30.
17. Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.
 18. Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла – Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1–8.
 19. Баранов С. В., Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 11–23.
 20. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос : новые носители информации для систем связи. М. : Физматлит, 2002. 252 с.
 21. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179, № 12. Р. 1281–1310.
 22. Lukin K. A. Noise radar technology // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. Vol. 16, № 12. Р. 8–16.
 23. Baptista M. S. Cryptography with chaos // Physics Letters A. 1998. Vol. 240. Р. 50–54.
 24. Птицын Н. В. Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 80 с.
 25. Stojanovski T., Kocarev L. Chaos-Based Random Number Generators : in 2 parts. Part I : Analysis // IEEE Trans. Circuits and Systems. 2001. Vol. 48, № 3. Pt. 1. Р. 281–288 ; Pt. 2. Р. 382–385.
 26. Stojanovski T., Kocarev L. Chaos-Based Random Number Generators : in 2 parts. Part II : Practical realization // IEEE Trans. Circuits and Systems. 2001. Vol. 48, № 3. Р. 382–385.
 27. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
 28. Balazs N. L., Voros A. Chaos on the pseudosphere // Physics Reports. 1986. Vol. 143, № 3. Р. 109–240.
 29. Тёрстон У. П., Уикс Д. Р. Математика трехмерных многообразий // В мире науки. 1984. № 9. С. 74–88.
 30. Hunt T. J., MacKay R. S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. Р. 1499–1510.
 31. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М. : Физматлит, 2005. 264 с.
 32. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. -M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems : A method for computing all of them // Meccanica. 1980. Vol. 15. Р. 9–30.
 33. Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. М. : Физматлит, 2006. 356 с.
 34. Struik D. J. Lectures on classical differential geometry. Courier Dover Publications, 1988. 240 p.
 35. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М. : Наука, 1968. 463 с.
 36. Кузнецов С. П., Катаев И. П. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3–29.
 37. Lai Y. -C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity. 1993. Vol. 6. Р. 779–798.
 38. Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Physics Letters A. 2000. Vol. 270. Р. 301–307.
 39. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 015203.

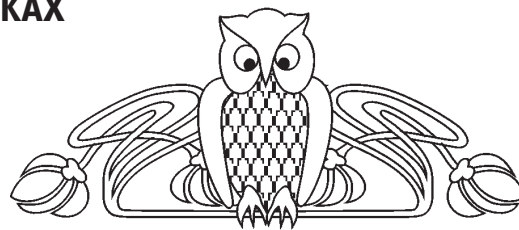


УДК 533.9

НЕРАВНОВЕСНАЯ СВЧ-ПЛАЗМА НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ И РАЗРАБОТКАХ МИКРО- И НАНОЭЛЕКТРОНИКИ

Р. К. Яфаров

Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: pirpc@yandex.ru



Рассмотрены достоинства и преимущества использования для реализации нанотехнологий высокоионизированной низкоэнергетичной СВЧ-плазмы низкого давления. Показано, что по своим функциональным возможностям одна установка на основе СВЧ-плазмы может заменить 4–5 установок с обычным высокочастотным возбуждением газового разряда.

Ключевые слова: вакуумно-плазменное технологическое оборудование, нанотехнологии, СВЧ-плазма низкого давления, поверхностное структурирование, кремний, СВЧ плазмохимическое травление, квантово-размерные системы.

Nonequilibrium the Microwave Plasma of Low Pressure in Scientific Researches and Development Micro and Nanoelectronics

R. K. Yafarov

Advantages and benefits realization use of nanotechnology of high ionized low-energy microwave plasma of low pressure are described. It presents the fact that one installation on the basis of microwave plasma can replace up 4 to 5 installations with usual high-frequency excitation of the gas discharge.

Key words: vacuum-plasma process equipment, nanotechnology, low pressure microwave plasma, surface structure of silicon, microwave plasma-chemical etching, quantum-dimensional systems.

Неуклонное возрастание роли диапазона сверхвысоких частот (СВЧ) электромагнитного спектра в жизни общества обусловлено не только успешным его использованием в радиотехнике и радиолокации, но и тем, что электромагнитные колебания этого диапазона обладают рядом важных физических особенностей и свойств, отличающими их от смежных участков спектра. В частности, особенностью СВЧ-диапазона является легкость, с которой СВЧ-энергия трансформируется в другие виды энергии: тепло, энергию ускоренных частиц и др. Одним из наиболее перспективных применений СВЧ-энергии является получение неравновесной «мягкой», или «холодной», плазмы. Такая плазма обладает рядом важных свойств, которые находят все новые применения в различных областях науки и техники.

Общая теория взаимодействия электромагнитных волн СВЧ-диапазона с газовой низкотемпературной плазмой разработана в начале 60-х гг. XX в. в работах В. Л. Гинзбурга [1], В. Е. Голанта [2] и др. Она нашла широкое экспериментальное подтверждение при решении многих важных научно-технических проблем, среди которых проблема управляемого термоядерного синтеза, где явление электронно-циклотронного резонанса (ЭЦР) в магнитной конфигурации типа «пробкотрон» служит для создания и нагрева плазмы до предтермоядерных температур, астрофизические проблемы, создание плазменных преобразователей энергии и плазменных двигателей, разработка газовых лазеров и др.

Эффект ЭЦР нагрева плазмы с целью получения многозарядных ионов было предложено применять в 1969 г. В 1972 г. появились первые источники, в которых была реализована эта идея. В настоящее время ионные источники на ЭЦР широко применяются для получения высококачественных пучков многозарядных ионов в ускорителях и экспериментах по ядерной физике. Примерно с 1977 г. началось практическое использование ЭЦР СВЧ-плазмы в исследованиях технологических процессов микроэлектронного производства [3].

Выбор способов вакуумно-плазменной обработки в производстве изделий микроэлектроники и наносистемной техники зависит от применяемых материалов и требований к технологическому процессу, таких как скорость обработки, степень совершенства кристаллической структуры обрабатываемого материала, селективность и анизотропность «сухого» травления, стоимость и др. Поэтому на разных этапах их изготовления используются различные способы плазменной обработки. Так как существующие промышленные установки предназначены для обработки только одним из способов, это делает производство изделий наносистемной техники



дорогим и трудоемким процессом. В связи с этим приоритетным направлением развития нанотехнологий в стране и мире является создание новой технологической базы, которая обладала бы многофункциональными свойствами и могла бы обеспечить получение новых наноструктурных материалов и устройств наносистемной техники с принципиально новыми свойствами, присущими наномасштабу.

На современном этапе развития полупроводникового материаловедения актуальными являются задачи получения атомно-чистых поверхностей полупроводниковых кристаллов, создания туннельно-тонких пленок и гетерограниц с заданным составом, уровнем легирования и высоким качеством структуры границ раздела, что вызвано высокой чувствительностью электронных свойств материалов к дефектам и неоднородностям структуры. Важным представляется рассмотрение структурного аспекта полупроводниковой поверхности: контролируемое создание микроморфологии поверхности кристаллов-подложек, что необходимо для управления плотностью стоков для адатомов; определение механизмов формирования субмонослойных покрытий в процессах получения низкоразмерных эпитаксиальных структур; определение принципиально новых возможностей создания квантово-размерных систем, примером которых могут служить самоорганизующиеся системы при создании квантовых проволок, латеральных поверхностных сверхрешеток и квантовых точек. Все эти задачи обусловлены тенденциями развития твердотельной электроники, направленными на повышение степени интеграции и реализацию квантово-размерных явлений в двумерных кристаллах.

Существуют различные методы получения атомарно чистых поверхностей материалов [4], каждый из которых имеет определенные преимущества и недостатки. Поэтому универсальной процедуры очистки не существует. Для каждого материала, как правило, требуется индивидуальная методика или даже комбинация нескольких методик. В настоящее время наиболее перспективным методом получения атомарно чистых поверхностей является ионно-плазменное травление. Использование для этих целей «мягкой» (неравновесной) беспримесной (не имеющей металлических электродов) низкоэнергетичной плазмы СВЧ газового разряда низкого давления представляет значительный научный и практический интерес. В отличие от других методов

плазменного воздействия она имеет широкий диапазон распределения электронов по энергии, что позволяет селективно возбуждать заданный химический состав плазмообразующего газа и, таким образом, исследовать влияние режимов обработки на микроморфологию и электронные свойства атомарно чистой поверхности монокристаллического кремния различных кристаллографических ориентаций, других полупроводниковых и диэлектрических материалов.

Современные твердотельные электронные системы имеют сложную иерархическую структуру. Для своего функционирования они интегрируют физико-химические явления от атомно-молекулярного до макроскопического уровня. По своей архитектуре они неуклонно приближаются к архитектуре живых систем.

Можно использовать три различные стратегии для создания сложных наноэлектронных систем.

Стратегия «сверху – вниз» (top-down), основана на уменьшении размеров физических тел с использованием того или иного вида микрообработки (например, литографии и травления) до получения объектов с нанометровыми параметрами.

Стратегия «снизу – вверх», в этом случае наноэлектронные системы создаются из атомов, молекул и других структурных элементов, располагаемых в требуемом порядке. Такая стратегия присуща живым системам. Примерами этого подхода в технологии микро- и наноэлектроники являются поштучная укладка атомов на кристаллической поверхности при помощи сканирующего туннельного микроскопа или слоев атомов («слой за слоем») с помощью молекулярно-пучковой эпитаксии.

Стратегия «самоорганизации», получила большое распространение в современной нанотехнологии для формирования наносистем. «Самоорганизация» наноструктур понимается в широком смысле как самопроизвольное (спонтанное) возникновение макроскопического порядка в первоначально однородной среде. Использование термина «самоорганизация» наноструктур охватывает как равновесные явления, так и неравновесные процессы, а также их комбинацию. Этот подход дает возможность анализировать с единых позиций различные механизмы спонтанного возникновения наноструктур, при котором, как правило, равновесие успевает установиться только частично (например, равновесие успевает установиться на границе раздела фаз и не успевает в объеме).



Каждая из этих стратегий имеет свои достоинства и недостатки, что делает привлекательным поиск компромиссных решений на основе комбинаций этих стратегий в заданном технологическом маршруте изготовления реальных электронных систем.

С переходом в область нанотехнологий, которые должны обеспечивать получение наноструктур с атомной точностью и необходимыми химическим составом и конфигурацией, требования к плазменным процессам значительно ужесточились. Они уже не могут быть удовлетворены использованием процессов, которые основываются на электрических разрядах постоянного тока и переменного тока промышленной или высокой частоты. Возникающие в процессах традиционной ионно-плазменной обработки дополнительные дефекты кристаллической структуры приповерхностных слоев имеют размеры, сопоставимые с размером рабочего элемента, и не позволяют обеспечить необходимое качество границ раздела в атомном масштабе. Это ухудшает транспортные свойства носителей заряда, резко уменьшает времена их жизни и ставит под сомнение возможность создания систем с пониженной размерностью. Другим важным требованием является сокращение стоимости производства, которое достигается увеличением прецизионности и интенсивности (скорости) плазменной обработки. Ставится задача обеспечения сверхгруппового характера обработки без снижения качества, т. е. повышение степени прецизионности и структурного совершенства микрообработки на все возрастающих размерах подложек.

Для выполнения названных требований предстоит решить ряд фундаментальных проблем, как в области физики твердого тела, так и физики плазмы. В области физики твердого тела проблемы, связанные, например, с созданием на основе известных полупроводниковых и диэлектрических материалов многослойных гетероструктур с размерным квантованием – сверхрешеток, которые модифицируют зонные структуры, и приводят к появлению новых полезных электрических и оптических свойств. Интерес к ним существует не только теоретический, но и практический, так как уже показана принципиальная возможность создания приборов на основе квантовых объектов, например лазеров с параметрами лучшими, чем у существующих в настоящее время [5].

Большой практический интерес представляют аморфные сверхрешетки на основе наноразмерного тонкопленочного кремния и его соединений. Такие квантовые системы в зависимости от способа получения могут обладать неограниченно широким спектром полупроводниковых свойств и по параметрам цена – качество могут существенно превосходить сверхрешетки, созданные на основе монокристаллических материалов с применением молекулярно лучевой эпитаксии или других уникальных и дорогостоящих технологий [6].

Особый и в значительной степени самостоятельный научный и практический интерес представляют разработка технологии получения и изучение свойств гидрогенизированного аморфного кремния ($a\text{-Si} : \text{H}$). Наноразмерные пленки $a\text{-Si} : \text{H}$ обычно используются в полупроводниковых сверхрешеточных структурах в качестве узкозонного материала и во многом определяют как фундаментальные, так и оптоэлектронные свойства таких структур. Научный интерес к этому материалу, существенно возросший в последние годы, связан также с надеждой, что применение $a\text{-Si} : \text{H}$ позволит получать дешевую электроэнергию путем прямого преобразования солнечной энергии в электрическую с помощью фотоэлектрического эффекта. Основными параметрами, определяющими эффективность фотоэлектрического преобразования, являются ширина запрещенной зоны и время жизни фотогенерированных носителей. Возрастание рекомбинационного времени жизни носителей обычно приводит к увеличению всех фотоэлектрических параметров (V_{oc} , J_{sc} и FF) [7].

Гидрогенизированный аморфный кремний – стеклообразный полупроводниковый материал, представляющий собой разупорядоченный сплав кремния с водородом, концентрация которого может изменяться от 1 до 50 ат.% в зависимости от способа получения. Пленки аморфного кремния получали множеством способов [6, 7]. Главным их недостаток состоит в том, что полученные пленки имеют, как правило, слишком высокую плотность локализованных состояний в щели подвижности. Это существенно ограничивает области их практического использования. Поэтому задача улучшения качества пленок аморфного гидрогенизированного кремния остается актуальной.

Согласно современным представлениям оптоэлектронные свойства аморфного гидрогенизированного кремния определяются в основном



количеством содержащегося в пленках водорода и структурой, которую он образует при вхождении в кристаллическую решетку кремния. Оба фактора регулируются изменением условий синтеза, в частности температуры подложки, давления рабочего газа, степени ионизации плазмы, энергии и вида ионов, бомбардирующих поверхность пленки в процессе роста. Увеличение содержания водорода в твердом растворе с кремнием вызывает увеличение ширины запрещенной зоны полупроводника. Однако и его отсутствие делает аморфный кремний непригодным к практическому использованию. Причиной этого является высокая плотность локализованных состояний в щели подвижности, обусловленная большим количеством оборванных связей Si-Si. Считается, что одна из основных причин появления у сплавов на основе a-Si : H хороших фотоэлектрических свойств заключается в полном закреплении большинства оборванных связей водородом с образованием моногидридной структуры. При повышенном содержании водорода в кремниевых пленках, которое имеет место, как правило, при низких температурах осаждения, образуется структура полимерного типа. Такая структура a-Si : H характеризуется высокой плотностью локализованных состояний и также является непригодной для практического применения.

Огромный научный и практический интерес представляет разработка технологии создания бездефектных наноструктур с целью исследования в них квантового хаоса и реализации электронного транспорта в кольцевых интерферометрах с квантовыми точками на его входе. Интерес к таким приборам вызван, прежде всего, тем, что электронный интерферометр является основой квантового одноэлектронного нанотранзистора, использование которого позволит уменьшить мощность переключения на несколько порядков в сравнении с классическими транзисторами [8]. На пути к созданию интерференционного транзистора имеется ряд трудностей, вызванных главным образом подавлением интерференции флуктуационным потенциалом примесей и дефектов. Одна из возможностей их преодоления – уменьшение размеров интерферометра. Изучается возможность создания на основе эффекта Ааронова – Бома полевых интерференционных одноэлектронных нанотранзисторов [9].

На рис. 1 приведено РЭМ-изображение электронного интерферометра Ааронова – Бома на гетероструктуре AlGaAs/GaAs, впервые создан-

ного и исследованного в ИФП СО РАН [10–13]. В настоящее время созданы и исследованы образцы электронных интерферометров с внешним диаметром кольца менее 300 нм, уверенно работающие при температуре выше 4.2 К. Интерферометр изготавливался с использованием электронной литографии и технологии реактивного ионного травления на основе 2D-электронного газа в гетеропереходе AlGaAs/GaAs с тонким спейсером, полученным методом молекулярно-лучевой эпитаксии. Параметры электронного газа при $T = 4.2$ К были следующими: поверхностная плотность $N_S = (7-9) \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, подвижность $\mu = 10^5 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$. Это соответствует длине свободного пробега электронов $l = 1.5$ мкм. Исследовалось магнитосопротивление интерферометра при температурах $T = 0.02-4.2$ К и в магнитных полях до 10 Тл. Измерения сопротивления проводились на переменном сигнале частотой 30 Гц. Было показано, что в приборе реализуется режим одномодового электронного волновода.

Возможность уменьшения размеров интерферометра за счет уменьшения поверхностного и бокового дефектообразования при низкоэнергетичном высоковакуумном СВЧ вакуумно-плазменном травлении было показано в работе [14] при создании топологических структур субмикронных размеров в виде проводящих («квантовых») мостиков и петель в $n^+ - \text{GaAs}$ на изолирующей подложке из того же материала (рис. 2). Оценка дефектообразования проводилась по величине проводимости $n^+ - \text{GaAs}$ – мостика с различной шириной. Определялась ширина, при которой проводимость прекращается. Проводимость измерялась как при комнатной, так и при более низких температурах. Из зависимостей нормированной проводимости от ширины проводящих «мостиков» следовало, что с уменьшением вытягивающих напряжений при СВЧ плазменном травлении ширина перемычки с «разрывом цепи» уменьшается и при $U_{\text{уск}} = -50$ В составляет менее 0.05 мкм. Это более чем в 3 раза меньше минимальной ширины проводящего канала, полученного с использованием ВЧ реактивного ионного травления в $\text{CCl}_2\text{F}_2 / \text{He}$ в работе [15].

При создании полевых нанотранзисторов основные усилия направлены в настоящее время на формирование в канале транзистора квантовых точек (КТ). Это позволяет в полной мере реализовать преимущества квантовых и одноэлектронных эффектов, таких как туннелирование, размерное квантование энергетического спектра носителей заряда и кулоновская блокада,

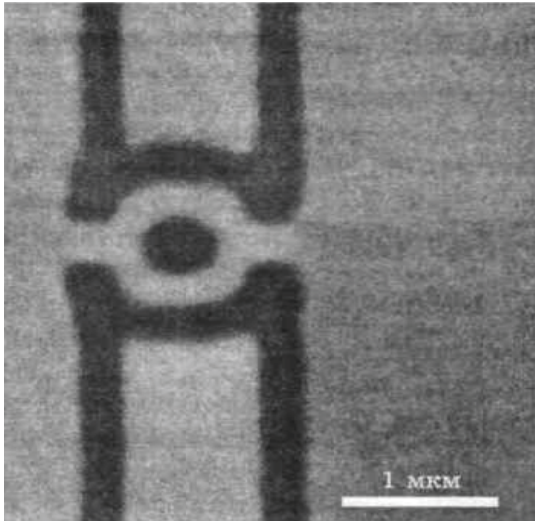


Рис. 1. РЭМ-изображение интерферометра на эффекте Ааронова – Бома, сформированного на гетероструктуре AlGaAs/GaAs с двумерным электронным газом

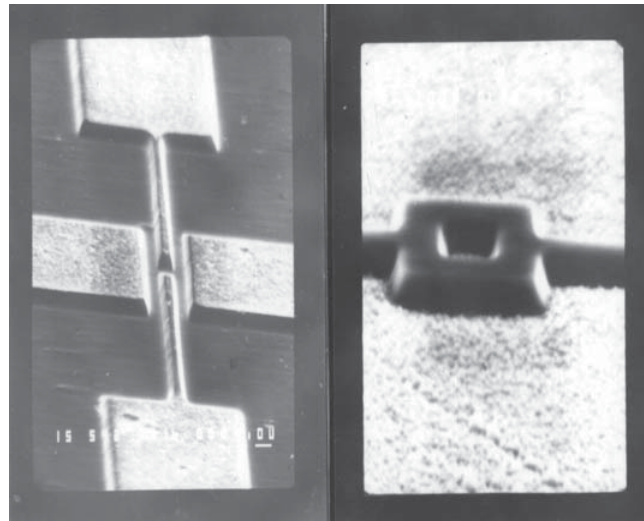


Рис. 2. РЭМ-изображение «квантовых» мезоструктур на n^+ -GaAs, полученных травлением в ЭЦР СВЧ-плазме (ширина линий 0.1 мкм)

присущих электронным элементам нанометрового масштаба. Основные усилия сосредоточены на кремниевых полевых транзисторах с КТ, которые изготавливаются с помощью электронной литографии в комбинации с высокоанизотропным травлением [16–19]. Для того чтобы обеспечить работу квантового транзистора при комнатной температуре, необходимо, чтобы размеры КТ не превышали 10 нм.

Известно [4], что при создании наноструктур ростовую поверхность в непосредственной близости режимов плазмохимической обработки к реализации процессов квазиравновесных конденсации и/или сухого травления в условиях слабой адсорбции следует рассматривать в виде атомно-шероховатой структуры, определяемой условиями подготовки и ее внутренней атомно-энергетической симметрией сил и масс. Воздействие низкоэнергетичной (10–30 эВ) СВЧ-плазмы на поверхность роста или травления твердого тела снижает энергию десорбции до эффективного численного значения, что при данной температуре вещества эквивалентно повышению его летучести. Такое искусственное повышение летучести веществ при условии самоорганизации стационарности процесса переводит технологию с использованием «мягкой» СВЧ-плазмы в ряд наиболее универсальных. При этом конденсация атомных и ионно-радикальных потоков рабочего вещества заданных состава и энергии в условиях слабой адсорбции и ограниченной поверхностной диффузии из-за повышенного коэффициента прилипания заряженных частиц будет способ-

ствовать самоорганизованному формированию нового наноструктурированного состояния поверхности, присущего данной паре взаимодействующих химических элементов. Следует ожидать, что вблизи равновесной конденсации минимизация свободной энергии создаст предпосылки для самоорганизации статистически неоднородных слоев нанокластеров. При последующей конденсации это создаст условия для перехода к формированию наноструктур в виде фрактальных сеток. Такой результат относится к ожидаемому, но принципиально новому, так как квазиравновесные процессы на атомной поверхности с участием высокоионизованной низкоэнергетичной электронной и ионно-радикальной плазмы в условиях слабой адсорбции до настоящего времени практически не изучены, в отличие, например, от молекулярно пучковой эпитаксии. Таким образом, с использованием низкоэнергетичного СВЧ плазменного воздействия может получить развитие принципиально новая концепция наноструктурирования архитектурных форм материалов за счет контролируемой самоорганизации квазиравновесных стационарных конденсации или травления.

Основываясь на этих представлениях, специалисты могут изучить закономерности влияния режимов, химического состава, кристаллографической ориентации полупроводниковых пластин на скорость ионного и ионно-химического травления и микро- и наноморфологию (размеры, конфигурацию и плотность формирующихся наноструктурных систем и объектов) их поверхно-



сти. Предстоит разработать физико-химические основы и механизмы процессов плазменного электронного травления в условиях слабой адсорбции, а также модельные механизмы процессов формирования и управления параметрами упорядоченных наноструктурных систем (квантовых точек и проволок) на поверхности кремниевых кристаллов, полученных методами ионно-химического синтеза и высокоэнергетического низкоэнергетического травления.

Принципиальная возможность получения самоорганизующихся низкоразмерных систем в результате распыления ионами аргона с энергией 1.2 кэВ при базовом давлении 2×10^{-5} Па и плотности ионного тока 0.24 мА/см^2 с использованием ионной пушки «Kauffman» монокристаллических полупроводников, в частности, кремния различных кристаллографических ориентаций, была показана в работах [20–22]. Получены кремниевые КТ высотой 6 ± 1 нм и диаметром 40–50 нм, самоорганизованные с гексагональной симметрией с ближним порядком. Однако важной проблемой, которая широко обсуждается в литературе и ставит под сомнение возможность применения самоорганизующихся наноструктур, полученных распылением полупроводниковых монокристаллов ионами аргона с энергией более 1 кэВ, является их кристалличность [23, 24]. Действительно, в ряде работ было показано, что полученные таким методом нанокристаллиты покрыты аморфным слоем толщиной ~ 2 нм. Кроме того, исследования самих закономерностей формирования низкоразмерных систем (их размеры, периодичность и др.) ионным травлением в зависимости от типа подложки, схем и параметров ионной обработки еще очень далеки от завершения [25]. Способ же формирования наноструктур с использованием низкоэнергетического электронного и ионно-плазменного травления в условиях квазистационарности и слабой адсорбции, как нам известно, в литературе еще не обсуждался. Поэтому ожидаемые результаты исследований в этом направлении с применением высокоионизованной низкоэнергетической плазмы СВЧ-разряда обещают быть новыми и оригинальными.

Наиболее полный обзор существующих методов получения нанокристаллитов кремния в аморфной диэлектрической матрице приведен в работе [25]. Большой практический интерес к этой теме вызывает возможность получения достаточно интенсивной электролюминисценции (ЭЛ) при комнатной температуре в наносистемах

на основе КТ кремния. Из-за диэлектрических свойств SiO_2 (ширина запрещенной зоны ΔE составляет ≈ 9 эВ [26]) в создании структур на основе системы $\text{SiO}_2 : \text{Si}$, дающих интенсивную ЭЛ, возникают некоторые трудности, хотя сама возможность получения ЭЛ в этой наносистеме продемонстрирована в работе [27]. Наиболее перспективной с этой точки зрения представляется система нановключений Si, погруженных в матрицу аморфного кремния (nc-Si : a-Si): для a-Si эффективная величина ΔE составляет менее 2.0 эВ.

Задача формирования низкоразмерных систем в виде ансамблей кремниевых нанокристаллитов на некристаллических подложках методом ионно-плазменного синтеза является актуальной для создания, например, эффективных фотолюминисцентных систем и объемных сверхрешеточных структур [25, 28]. Однако размеры и концентрация наноструктур Si, полученных этим методом, существенно зависят от многих технологических параметров и плохо воспроизводятся [29–31]. Решение задачи в плане определения фундаментальных закономерностей и построения физико-химической модели самоорганизации наноструктур, например, кремния и ультрадисперсного алмаза, осаждением в условиях низкоэнергетической интенсивной ионной бомбардировки в литературе, кроме наших поисковых работ [32, 33], еще не обсуждалось.

Большой практический интерес представляют исследования, связанные с разработкой новых технологий и фундаментальных основ формирования наноструктурных объектов и систем, обусловленных закономерностями протекания начальных стадий кристаллизации и роста наноразмерных кристаллитов кремния, алмазоподобного углерода и их соединений на кристаллических и аморфных подложках с различной энергией связи на межфазной границе. Предполагается, что одним из важнейших факторов разрабатываемых процессов будут условия и режимы плазмохимической подготовки поверхностей с учетом их энергетической реконструкции. Определяющими, по-видимому, будут процессы так называемой заместительной плазмохимической хемосорбции. Кроме нее перспективным направлением исследований по созданию полупроводниковых наноструктур на поверхности являются исследования явлений и процессов, связанных с коалесцентным распадом субмонослойного адсорбата, который представляет собой релаксационное формоизменение



тонкой пленки, и реконструкцией поверхности полупроводниковой подложки, на которую эта пленка осаждается. Система тонкая пленка – реконструированная поверхность полупроводниковой подложки, по сути, является двумерной фазой, которая характеризуется своей собственной атомной и электронной структурой, составом, областью температурной стабильности, свойствами и т. д. [6]. Особенно перспективным представляется исследование самоорганизации углеродных материалов на монокристаллическом кремнии, так как при этом реализуется наиболее сильное и, по-видимому, наиболее результативное взаимодействие между атомами углеродного адсорбата и поверхности кремния, которое по величине превышает энергию химической связи между атомами кремниевой пластины. Исследование условий образования поверхностных фаз на реконструированных поверхностях кристаллов-подложек и их свойств, в частности образование поверхностной кремний-углеродной фазы на реконструированных поверхностях монокристаллического кремния различных кристаллографических ориентаций, является, на наш взгляд, актуальным и своевременным научным исследованием в физике твердого тела. Результаты этих исследований позволят получать нелитографическими способами не только поверхностные, но и пространственные наносистемы. Это может быть реализовано за счет использования самоорганизованных дискретных углеродных покрытий, имеющих рекордно низкие значения коэффициента распыления ионными пучками, в качестве масочных с субнанометровым разрешением и высокоанизотропного низкоэнергетичного плазмохимического травления с селективностью, определяемой соотношением скоростей травления маски и материала подложки. Данный метод получения квантово-размерных систем хотя и основывается на известных процессах, присущих тонкопленочной технологии, однако во всей совокупности последовательностей, согласно имеющимся литературным данным, до настоящего времени еще не был реализован.

В связи с интенсивным развитием нанотехнологий в мире возрос интерес к нано- или ультрадисперсным алмазам. Благодаря сочетанию аномально высоких значений твердости, теплопроводности, а также дисперсности, химической инертности и адсорбционной активности, обусловленной предельно высоким значением числа нескомпенсированных связей на поверхности наноалмазов, наиболее перспективным

является их применение в качестве сорбентов, катализаторов, накопителей электроактивных водорода и кислорода в топливных элементах, твердых антифрикционных смазок, а также в виде наполнителей в специальных полимероалмазных композициях, керамических и резинотехнических изделиях и др. [34].

Современные технологии получения алмазных микропорошков, как правило, весьма трудоемки, связаны с использованием статических сверхбольших давлений и температур или энергии взрыва. Исходным сырьем для их получения послужил углерод взрывчатых веществ, а высокое давление и температура, необходимые для образования структуры алмаза из атомов углерода, достигались в процессе самого взрыва [35]. Короткое время взрыва определяет малый размер алмазных кристаллов. Полученный взрывными методами алмазографитовый порошок требует проведения специальных операций химической очистки по выделению ультрадисперсных алмазов. По этим причинам разработка «невзрывных» технологий синтеза наноалмазных материалов имеет важное прикладное и фундаментальное значение.

В настоящее время уже известны экспериментальные доказательства того, что использование неравновесной высокоионизованной СВЧ-плазмы низкого давления позволяет реализовывать такие технологии. Наблюдаемое в работе [36] образование наноалмазной фазы в полимероподобной углеводородной матрице (рис. 3) может быть обусловлено тем, что процесс конденсации при использовании СВЧ-плазмы происходит в неравновесных условиях так же как и при детонационном синтезе наноалмазов. Применение СВЧ-плазмы в диапазоне давлений паров этанола от 0.1 до 5 Па позволяет создавать сверхбольшие пересыщения при термоударе на холодной подложке ионов и возбужденных атомов углерода с широким энергетическим спектром. При этом вероятность зарождения наноалмаза возрастает, поскольку преобладающими при его образовании являются не термодинамические факторы, а процессы физической кинетики [37].

При низких температурах подложки одновременно с наноуглеродной кристаллической фазой могут конденсироваться продукты неполного разложения этанола, а также молекулярные продукты вторичных реакций, протекающих в СВЧ углеводородной плазме паров исходного рабочего вещества, образуя при этом нанокompозитные алмазо-углеводородные структуры.

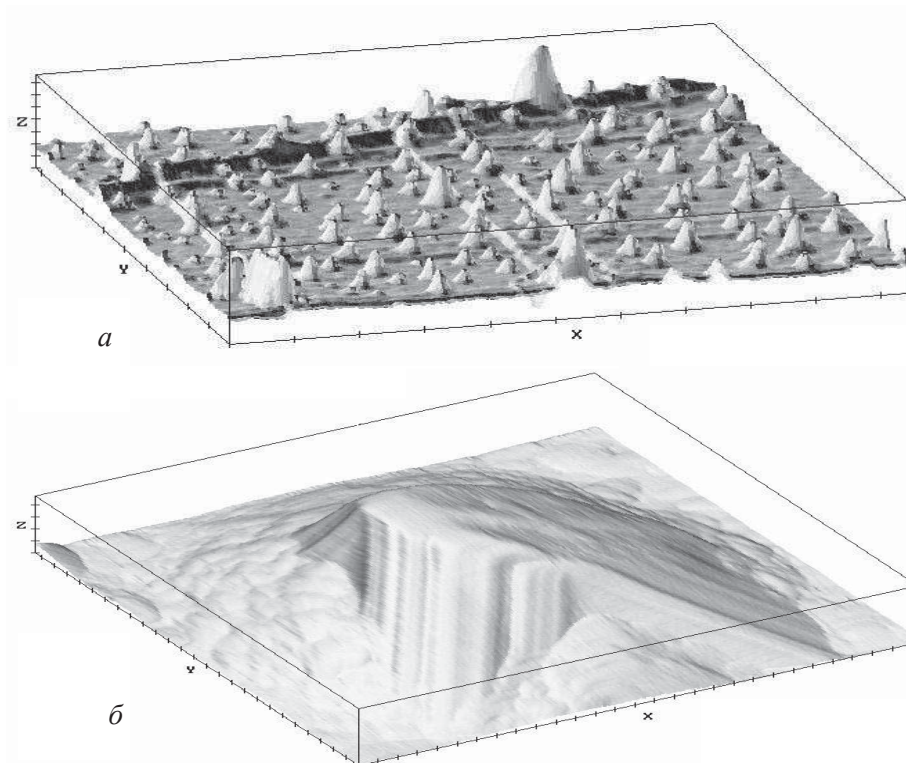


Рис. 3. АСМ-изображение наноалмазной углеводородной матрицы (а) (масштаб: X : 1 мкм, Y : 1 мкм, Z : 0.1 мкм) и нанокристаллита в ней (б). (масштаб: X : 0.1 мкм, Y : 0.1 мкм, Z : 0.01 мкм)

Благодаря погруженности наноалмазов в карбасную углеводородную матрицу имеются широкие возможности для непосредственного их нанесения на любые подложки и детали, а также для модификации и управления поверхностными свойствами наноалмазов при использовании в качестве накопителя газовой массы в топливных элементах. Погруженность наноалмазов в уникальную по своим функциональным свойствам углеводородную матрицу исключает возможность их агрегатирования в прочные образования, которые в случае сухих детонационных порошкообразных наноалмазов нуждаются в дополнительной подготовке сухого продукта при изготовлении паст путем механического дробления.

Важный прикладной интерес имеют исследования с применением неравновесной СВЧ-плазмы низкого давления по получению композиционных наноалмазграфитовых структур (рис. 4), обладающих в зависимости от размера и концентрации наноалмазных кристаллитов в графитовой матрице регулируемым порогом напряженности электрического поля и плотностью тока автоэлектронной эмиссии [38]. Технология

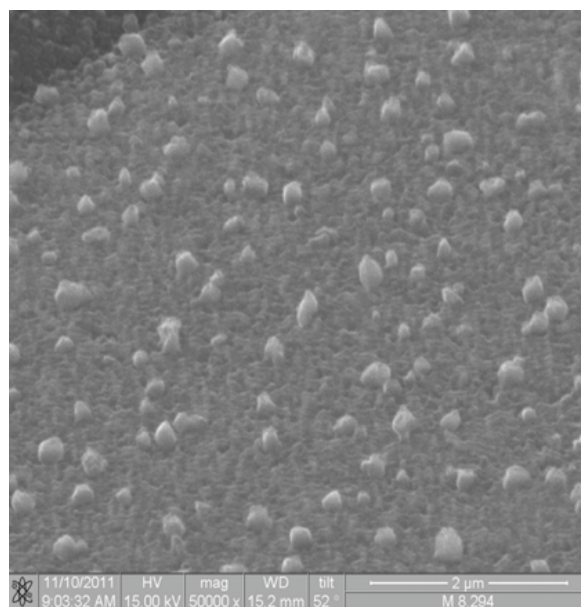


Рис. 4. СЭМ-изображение нанокомпозитной алмазграфитовой пленки

плазмохимического осаждения наноалмазграфитовых плёнок позволяет формировать эмиттеры при низких температурах от 250 до 350°C,



что дает возможность совместить ее с другими технологиями микроэлектронного производства. Основными областями применения композиционных наноалмазграфитовых материалов являются создание на их основе элементной базы радиационно-стойкой вакуумной микроэлектроники, энергоэффективных источников белого света, плоских катодлюминисцентных экранов и дисплеев.

Кроме процессов самоорганизации на границе раздела твердой и плазменной сред большой интерес с точки зрения физики плазмы имеют процессы самоорганизации в самой низкотемпературной плазме происходящие, с одной стороны, под действием внешних СВЧ электромагнитных полей, а с другой – в результате их диссипации, отражения и рекомбинации заряженных частиц плазмы как проводящей среды.

Одной из важнейших задач при использовании плазмы в технологии является задача активного формирования спектра электронов для селективного возбуждения определенных энергетических состояний атомов и ионов химически активных газов [39]. В работе [40] показаны принципиальные ограничения управления спектром электронов при помощи постоянного электрического поля. В то же время существуют экспериментальные доказательства преимуществ, которые дает применение электромагнитных полей СВЧ-диапазона для селективного возбуждения плазмохимических сред [41, 42]. Например, в работе [43] эффективность СВЧ-возбуждения газового оптического квантового генератора объяснялась существенным отклонением электронной функции распределения от максвелловского типа. В работе [44] из анализа уравнения Власова следует, что путем подбора частоты и напряженности электрической компоненты можно добиться любой величины наиболее вероятного значения энергии колебательного движения электронов.

Экспериментальные исследования параметров электронной компоненты неравновесной плазмы СВЧ газового разряда в магнитном поле, функции распределения электронов по энергии, электрических полей, влияния на них технологических параметров процесса и конструкции плазмотрона позволят определить наиболее значимые факторы управления внутренними параметрами плазмы, которые обеспечивают селективность процессов ионизации и возбуждения атомов и молекул рабочего газа. Это позволит реализовать на практике самоорганизующиеся

СВЧ плазменные системы, изучить процессы и механизмы самоорганизации стационарного квазиравновесного состояния в различных инертных и химически активных плазмообразующих средах с целью повышения прецизионности (селективности и анизотропности) и интенсивности (скорости) плазменной обработки. На основании этих исследований представляется возможным проводить оптимизацию зарядового, энергетического и массового состава для конкретных практических применений, изучать влияние параметров технологического процесса на ионно-радикальный состав плазменной среды применительно к процессам ионно-химического, радикального или электронно-плазменного травления или осаждения материалов, что является преимуществом СВЧ ВПО по сравнению с другими методами вакуумно-плазменной обработки с постоянно токовым или высокочастотным возбуждением разряда. В перспективе могут быть разработаны способы управления «каналами» поглощения плазмой СВЧ-мощности, изучены вопросы интеграции различных технологических процессов, основанных только на применении СВЧ-плазмы в магнитном поле.

Не менее важными для воспроизводимого получения наноматериалов и наноструктур с заданными функциональными свойствами и устройств наносистемной техники являются поиск и исследование эффективных методов диагностики и управления процессом их получения, а также контроля моментов окончания процессов. Практика показывает, что эффективность методов управления процессами плазмохимической обработки материалов определяется не возможностями обработки информации и реализации обратных связей, а отсутствием необходимых данных о свойствах и кинетике образования структур и связях между технологическими воздействиями и их откликом в свойствах структур при данном состоянии технологического оборудования. Повышение требований к процессам получения новых материалов с заданными электрофизическими свойствами, с одной стороны, и функциональным параметрам структур, с другой, вызывает необходимость создания и использования в современном плазмохимическом оборудовании методов контроля свойств плазмы и получаемых образцов материалов непосредственно в ходе проведения процессов. В связи с этим зарубежные фирмы-разработчики оборудования стремятся к насыщению технологических установок системами встроенного контроля.



Исследование и разработка методик, алгоритмов и программно-аппаратных средств многопараметрового контроля и мониторинга процесса и свойств материалов и структур на различных этапах их плазмохимического синтеза и сухого травления могут основываться на микроволновом зондировании плазмохимической среды путем измерения фазы отраженных волн и их рассеяния, а также на твердотельном зондировании свойств самих структур с использованием эллипсометрии, рефлектометрии, одноволновой и спектральной интерферометрии.

В связи с широким диапазоном энергетических и технологических параметров установки, в которых используется плазма СВЧ газового разряда, можно отнести к многоцелевым. В этих установках с одинаково хорошими результатами можно проводить научные исследования и разработки современных технологических процессов создания сверхбольших и сверхскоростных интегральных схем, светоизлучающих и других устройств опто-, микро- и наноэлектроники: а) процессов безрадиационной очистки, пассивации и модификации поверхностей различных полупроводниковых материалов с целью улучшения их электронных свойств, б) прецизионного глубоко-субмикронного сухого травления с управляемыми селективностью и анизотропностью полупроводниковых и диэлектрических структур на основе кремния, углерода и их соединений, а также полупроводниковых соединений АЗВ5 и др. В низкоэнергетичной СВЧ плазме могут быть реализованы как процессы низкотемпературного осаждения высококачественных туннельно-тонких диэлектрических, полупроводниковых и проводящих пленок и наносистем с заданными электрофизическими свойствами, которые основываются на использовании традиционных механизмов вакуумно-плазменной конденсации из паровой фазы, так и процессы, которые основываются на явлениях самоорганизации с обеспечением кинетических преимуществ для формирования заданных поверхностных фаз, например, при получении нанокompозитных алмазографитовых, алмазоуглеводородных и других материалов для применений в строительстве, архитектуре, энергетике, других областях науки и техники.

Актуальной проблемой современной микро- и наноэлектроники является создание источников плазмы для высокопроизводительной безрадиационной вакуумно-плазменной обработки и получения полупроводниковых и наноструктурных материалов на подложках большой площади.

В последние годы конструкции СВЧ-источников плазмы и многозарядных ионов были усовершенствованы, и сейчас хорошо известно, как их изготовить. Однако далеко недостаточно изучены физические процессы, лежащие в основе их действия. Причинами этого является многообразие и сложная взаимосвязь различных параметров плазмы источника с параметрами технологических процессов, таких как вид, давление и скорость прокачки рабочего и плазмообразующего газов, СВЧ-мощность, величина и конфигурация внешних магнитных полей, а также параметрами электродинамической конструкции плазмотронов, трудности проведения прямых измерений. Создание источников плазмы большого объема наталкиваются на серьезные трудности, связанные с нежелательным снижением концентрации плазмы, изменением ее пространственной химической активности и однородности при увеличении площади обрабатываемой пластины. Это не позволяет обеспечивать сверхгрупповой характер обработки без снижения ее качества. Поэтому задача повышения степени прецизионности и структурного совершенства материала микрообработки на все возрастающих размерах подложек, которые обеспечивали бы снижение себестоимости изготавливаемых микросхем, остается актуальной, хотя на первый взгляд это представляется чисто технической проблемой. Однако на самом деле ее решение из-за высокой сложности экспериментальных реализаций не является тривиальным, тем более, если это относится к волноводным СВЧ электродинамическим системам во внешнем магнитном поле, для которых экспериментальный путь решения проблемы является весьма сложным и дорогим. Понимание этого заставляет разработчиков современного СВЧ плазмохимического оборудования обращаться к разработке теоретических моделей управления плазменными средами в ограниченных объемах, определению степени совместимости технологических требований и поиску путей наиболее оптимального решения проблемы.

Для моделирования плазменных процессов в данной области науки применяют различные методы построения функций распределения электронов и ионов по энергии, характеризующих рассматриваемый плазменный процесс при его устойчивом протекании: уравнения Лоренца, Максвелла, кинетические уравнения и различные цепочки уравнений для многочастичных функций распределения. Однако для получения



конкретных новых научных результатов исследователи чаще всего накладывают на плазму некоторые ограничения и при этом получают различные приближенные описания плазменных процессов: приближение первых моментов (теория Власова), поляризационное приближение, при котором трехчастичные корреляционные функции отсутствуют, а двухчастичные достаточно малы, и т.д. Среди этих приближений особо важную роль играет диффузионное приближение, возникающее в том случае, когда интеграл столкновений Балеску – Ленарда представляем в форме эллиптического дифференциального оператора второго порядка. Большое внимание должно быть уделено изучению разнородностей граничных условий на стенках плазматрона, различным способом ввода энергии и наличию различных форм источников ионизации в виде областей электронно-циклотронного резонанса, задаваемых внешним магнитным полем.

Особый интерес представляет разработка диффузионной модели сверхвысокочастотного разряда в неоднородных внешних магнитных полях с различными граничными условиями. Одним из ее достоинств является то, что она применяется не только к функции распределения электронов по энергии, но и к распределению концентрации электронов в цилиндрическом плазматроне. На основании адекватной диффузионной модели могут быть рассмотрены практические проблемы, связанные с исследованием повышения качества технологического процесса, а именно интенсивности и равномерности плазменной обработки, построением областей в плазматронах, обеспечивающих микрообработку с заданными требованиями.

Для плазменной микрообработки пластин большого диаметра с использованием СВЧ электромагнитного излучения наибольшее распространение получили многомодовые устройства с многоканальным вводом СВЧ-излучения. Одномодовые СВЧ плазменные устройства на основе ЭЦР с соленоидными катушками для формирования продольного магнитного поля обладают наибольшей простотой и высокой энергетической эффективностью процесса с КПД 90–95%. Однако работа на низшем типе волны в круглом волноводе на частоте 2450 МГц ограничивает поперечное сечение плазменного пучка и диаметр обрабатываемых пластин величиной до 100 мм. При увеличении диаметра пластин целесообразно было бы использовать генераторы электромагнитного излучения с

меньшей частотой (например, 915 МГц). В этом случае необходимы меньшие магнитные поля для ЭЦР. Однако при работе на более низкой частоте уменьшаются критическая плотность электронов плазмы и производительность обработки при низких давлениях.

Важное значение для повышения производительности и равномерности СВЧ плазменной обработки в многомодовых реакторах имеет рациональный выбор типа используемой для генерации плазмы электромагнитной волны. Структура электрических полей в такой электромагнитной волне должна обеспечивать, с одной стороны, создание скрещенных электрических и внешних стационарных магнитных полей для реализации ЭЦР, а с другой – создание такого распределения интенсивности ионизации плазмы по сечению реактора, при котором в наилучшей степени выполнялись бы указанные требования к процессу.

Перспективным направлением развития конструкций СВЧ плазменных устройств для обработки материалов на сверхбольших подложках (10–12 дюймов и более) являются многомодовые устройства с соленоидно-мультипольным магнитным управлением и многоканальным продольно-поперечным вводом энергии [45].

Недостатком разрабатываемых, в том числе и за рубежом, подобного рода устройств является несовершенство конструкции элементов возбуждения многомодового СВЧ-поля в круглых волноводных реакторах с большим поперечным сечением [3]. Элементы возбуждения, выполненные в виде отрезков многопроводной линии, введенных в плазменный объем, подвергаются воздействию плазмы, в результате чего они расплываются и/или требуют дополнительных мер по охлаждению. Мощность, передаваемая таким способом в реакторную камеру, невелика; требуется периодическое согласование элементов возбуждения с СВЧ-полем, снижается химическая чистота процессов, площадь равномерной обработки ограничена.

В отличие от существующих конструкций широкоапертурных СВЧ плазменных устройств, большой научный и практический интерес представляет рассмотрение принципов создания планарных плазменных электродинамических структур, включающих в себя плоскую резонаторную камеру с устройством распределенного возбуждения электромагнитных волн заданного типа и изменяющейся добротностью за счет непрерывного ввода и вывода плоских обрабатываемых изделий через специальные щели без



остановки ввода электромагнитной энергии. Возбуждение в резонаторе СВЧ-колебаний вида H_{mnp} ($p \gg m, n$) может осуществляться через прямоугольный волновод, расположенный вдоль широкой длинной стенки резонатора, и вакуумноплотные окна связи в общей стенке. В середине боковых противоположных стенок операционной камеры размещены невозмущающие для СВЧ-колебаний резонатора узкие длинные щели, через которые протягивается ленточный обрабатываемый материал и осуществляется соединение со средствами откачки [46].

Планарная конструкция реакторной камеры позволит значительно (до 2 м и более в ширину) увеличить площадь обрабатываемых пластин, а при использовании шлюзовых систем проводить обработку ленточных материалов на потоке, т. е. в режиме непрерывного протягивания обрабатываемых пластин через реакторную камеру. При этом открываются новые технологические возможности для создания и производства принципиально новых изделий электронной техники с повышенной степенью интеграции. Плазменные технологии нанесения из газообразных химических источников диэлектрических, полупроводниковых, металлических, эмиссионных и других тонкопленочных покрытий на пластины большой площади и ленточные материалы шириной до 2 м и более уже сейчас востребованы для применения в электронной отрасли, светотехнике, медицине, оптике, энергетике (включая получение слоистых структур для элементов солнечной энергетике), машиностроении, стекольной промышленности, архитектуре, транспорте (для нанесения на листовое стекло износостойких, энергосберегающих, декоративных и др. покрытий).

В настоящее время независимо от назначения схем изготовление перспективных элементов электронной техники, применяемых для создания ЭВМ, систем управления, аппаратуры связи, устройств телевидения, современных систем вооружения или медицинского назначения, все больше осуществляется с использованием нанотехнологии, реализующей размеры элементов и функциональные слои толщиной в десятки - сотни ангстрем, повышенную интеграцию. Увеличение степени интеграции современных микросхем сопровождается уменьшением толщин эпитаксиальных структур, используемых для их создания. В результате этого увеличивается отношение поверхности к объему и, как следствие, возрастает роль поверхностных явле-

ний, которые непредсказуемым образом могут модифицировать электрофизические свойства используемой полупроводниковой структуры. Это ужесточает проблему совершенства атомной структуры поверхностей и переходных слоев полупроводниковых систем, создаваемых с использованием различных технологических методов и приемов обработки. Проблема сохранения высоких электрофизических характеристик полупроводниковых систем при технологических обработках требует минимизации последствий их влияния на структуру и электронные свойства поверхности. Для получения приемлемого выхода годных в таком производстве должны быть условия для минимальных дефектообразований как в самом технологическом оборудовании, так и вне его – при загрузках и транспортировках обрабатываемых пластин. В связи с этим современное развитие полупроводникового машиностроения предусматривает отказ от больших объемов «чистых» комнат и переход к оборудованию кластерного типа, что позволяет создавать микроэлектронную схему без извлечения на атмосферу до завершения определенного технологического микроцикла (рис. 5).

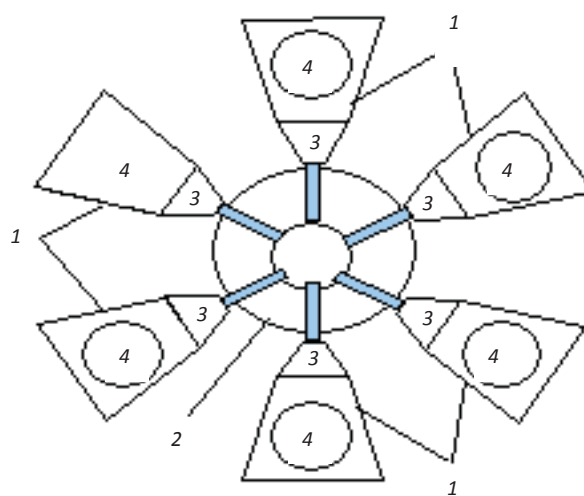


Рис. 5. Схема кластерной СВЧ нанотехнологической установки: 1 – специализированные СВЧ вакуумно-плазменные технологические модули; 2 – вакуумный транспортный модуль; 3 – транспортные механизмы; 4 – зоны специализированной СВЧ вакуумно-плазменной обработки

Использование кластерного оборудования позволяет реализовать целый ряд преимуществ по сравнению с существующим оборудованием:

- наращивать кластеры для проведения укрупненных технологических циклов;



– снижать затраты на «чистые» комнаты, а в ряде случаев и полностью их исключить;

– иметь гибкость при переходе к новым процессам за счет простоты изменения состава кластера;

– обеспечивать необходимую чистоту процессов за счет транспортировки пластин между операциями в вакууме и т.д.

Применение специализированных кластерных установок не только повышает производительность изготовления и снижает себестоимость производимой наносистемной техники, но и способствует повышению ее надежности и долговечности за счет улучшения стабильности и качества границ раздела между слоями гетероструктур.

При создании конкурентоспособного вакуумно-плазменного нанотехнологического кластерного оборудования одним из важнейших факторов является выбор типов установок, входящих в состав кластера. Наиболее перспективными для этих целей на сегодняшний день представляются установки, основанные на применении низкоэнергетичной высокоионизованной плазмы микроволнового газового разряда с электронным циклотронным резонансом. Как было видно из вышеизложенного, они обладают несомненными преимуществами как с точки зрения удовлетворения самым жестким требованиям нанoeлектронного производства, так и с точки зрения многообразия реализуемых технологических процессов. Благодаря возможности реализации различных методов плазмохимической обработки в такой установке можно создавать кластерные системы на основе нескольких однотипных многоцелевых модулей, каждый из которых предназначен для выполнения заданной технологической операции. При этом нет необходимости в резервировании и обслуживании различных типов оборудования, которые могут быть использованы для выполнения конкретного технологического процесса или изделия. Экономические выгоды от создания и эксплуатации подобных многоцелевых модулей и кластерных систем на их основе очевидны.

Список литературы

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М. : Наука, 1967. 685 с.
2. Голант В. Е. Газовый разряд на сверхвысоких частотах // УФН. 1958. Т. 65, вып. 1. С. 39–86.
3. Гуляев Ю. В., Яфаров Р. К. Микроволновое ЭЦР вакуумно-плазменное воздействие на конденсированные среды в микроэлектронике (физика процессов, оборудование, технология) // Зарубежная электронная техника. 1997. № 1. С. 77–120.
4. Оура К., Лифшиц В. Г., Саранин А. А., Зотов А. В., Катаяма М. Введение в физику поверхности. М. : Наука, 2006. 490 с.
5. Алферов Ж. И. История и будущее полупроводниковых гетероструктур // ФТП. 1998. Т. 32, № 1. С. 3–18.
6. Меден А., Шо М. Физика и применение аморфных полупроводников / пер. с англ. М. : Мир, 1991. 670 с.
7. Джоунупулос Дж., Люковски Дж. Физика гидрогенизированного аморфного кремния. М. : Мир, 1988. Вып. 1. 448 с.
8. Нанотехнологии в полупроводниковой электронике / отв. ред. А. Л. Лосев. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2004. 368 с.
9. Thundat T., Nagahara L. A., Oden P. I., Lindsay S. M., George M. A., Glaunsinger W. S. Modification of tantalum surfaces by scanning tunneling microscopy in an electrochemical cell // J. Vac. Technol. 1990. Vol. A8, № 4. P. 3537–3541.
10. Neubauer G., Cohen S. R., McClelland G. M., Home D. Force microscopy with bidirectional capacitance sensor // Rev. Sci. Instrum. 1990. Vol. 61, № 9. P. 2296–2308.
11. Huang Y., Williams C. C., Wendman M. A. Quantitative two-dimensional dopant profiling of abrupt dopant profiles by cross-sectional scanning capacitance microscopy // J. Vac. Sci. Technol. 1996. Vol. A14, № 3. P. 1168–1171.
12. Kikukawa A., Hosaka S., Honda Y., Imura R. Phase-locked noncontact scanning force microscope // Rev. Sci. Instrum. 1995. Vol. 66, № 1. P. 101–105.
13. Wiesendanger R. Scanning Probe Microscopy and Spectroscopy // Appl. Surf. Sci. 1992. Vol. 54. P. 271–276.
14. Игнатъев А. С., Терентьев С. А., Яфаров Р. К. Низкоэнергетичное травление GaAs в хлорсодержащем газовом СВЧ-разряде с ЭЦР // Микроэлектроника. 1993. № 4. С. 14–21.
15. Cheng R., Lee Y., Knoedler C., Lee K., Smith T., Kern D. Sidewall damage in n-GaAs quantum wires from reactive ion etching // Appl. Phys. Lett. 1989. Vol. 54, № 21. P. 2130–2132.
16. Ishikuro H., Fujii T., Saraya T., Hashiguchi G., Hiramoto T., Ikoma T. Coulomb blockade oscillations at room temperature in a Si quantum wire metal-oxide-semiconductor field-effect transistor fabricated by anisotropic etching on a silicon-on-insulator substrate // Appl. Phys. Lett. 1996. Vol. 68. P. 3585–3591.
17. Алферов Ж. И., Бимберг Д., Егоров А. Ю., Жуков А. Е., Копьев П. С., Леденцов Н. Н., Рувимов С. С., Устинов В. М., Хейденрайх И. Напряженные субмонослойные гетероструктуры и гетероструктуры с квантовыми точками // УФН. 1995. Т. 165, вып. 2. С. 224–225.
18. Быков А. А., Квон З. Д., Ольшанский Е. Б., Асеев А. Л., Бакланов М. Р., Литвин Л. В., Настаушев Ю. В., Мансуров В. Г., Мигаль В. П., Мощенко С. П. Квазибаллистический квантовый интерферометр // УФН. 1995. Т. 165, вып. 2. С. 227–229.



19. Атомная структура полупроводниковых систем / отв. ред. А. Л. Асеев. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2006. 292 с.
20. *Facsko S., Dekorsy T., Koerdts C., Trappe C., Kurz H., Vogt A., Hartnagel H. L.* Formation of Ordered Nanoscale Semiconductor Dots by Ion Sputtering // *Science*. 1999. Vol. 285, № 5433. P. 1551–1553.
21. *Rusponi S., Constantini G., Buatier-de-Mongeon F., Boragno C., Valbusa U.* Patterning a surface on the nanometric scale by ion sputtering // *Appl. Phys. Lett.* 1999. Vol. 75, № 21. P. 3318–3320.
22. *Gago R., Vazquez E., Guerno R., Varela M., Ballesteros G., Albella J. M.* Production of ordered silicon nanocrystals by low-energy ion sputtering // *Appl. Phys. Lett.* 2001. Vol. 78, № 21. P. 3316–3318.
23. *Yin Y., Gates B., Xia Y.* A Soft Lithographic Approach to the Fabrication of Nanostructures of Single Crystalline Silicon with Well-Defined Dimensions and Shapes // *Adv. Mater.* 2000. Vol. 12, № 19. P. 1426–1429.
24. *Grom G. F., Lockwood D. J., McCaffrey J. P., Labbe H. J., Fauchet P. M., White B., Diener J., Kovalev D., Koch F., Tsybeskov L.* Ordering and self-organization in nanocrystalline silicon // *Nature*. 2000. Vol. 407, № 6802. P. 358–361.
25. *Герасименко Н. Н., Пархоменко Ю. Н.* Кремний – материал нанoeлектроники. М. : Техносфера, 2007. 325 с.
26. *Силин А. Р., Трухин А. Н.* Точечные дефекты и элементарные возбуждения в кристаллическом и стеклообразном SiO₂. Рига : Зинатне, 1985. 244 с.
27. *Lalic N., Linnros J.* Light emitting diode structure based on Si nanocrystals formed by implantation into thermal oxide // *Luminescence*. 1999. Vol. 80, № 1–4. P. 263–267.
28. *Edelberg E., Bergh S., Naone R., Hall M., Audil E. A.* Visible luminescence from nanocrystalline silicon films produced by plasma enhanced chemical vapor deposition // *Appl. Phys. Lett.* 1996. Vol. 68, № 10. P. 1415–1417.
29. *Голубев В. Г., Медведев А. В., Певцов А. Б., Селькин А. В., Феоктистов Н. А.* Фотолюминесценция тонких пленок аморфно-нанокристаллического кремния // *ФТТ*. 1999. Т. 41, вып. 1. С. 153–158.
30. *He Y., Yin C., Cheng G., Wang L., Liu X., Hu G. Y.* The structure and properties of nanosize crystalline silicon films // *J. Appl. Phys.* 1994. Vol. 75, № 2. P. 797–803.
31. *Голубев В. Г., Медведев А. В., Певцов А. Б., Селькин А. В., Феоктистов Н. А.* Спектры рамановского рассеяния и электропроводность тонких пленок кремния со смешанным аморфно-нанокристаллическим фазовым составом : определение объемной доли нанокристаллической фазы // *ФТТ*. 1997. Т. 39, вып. 8. С. 1348–1353.
32. *Нефедов Д. В., Яфаров Р. К.* Влияние температуры на формирование кремневых нанокристаллитов на некристаллических подложках в плазме СВЧ газового разряда низкого давления // *ПЖТФ*. 2008. Т. 34, вып. 2. С. 62–68.
33. *Усанов Д. А., Яфаров Р. К.* Методы получения и исследования самоорганизующихся наноструктур на основе кремния и углерода. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. 126 с.
34. *Витязь П. А.* Состояние и перспективы использования наноалмазов детонационного синтеза в Белоруссии // *ФТТ*. 2004. Т. 46, вып. 4. С. 591–595.
35. *Даниленко В. В.* Синтез и спекание алмазов взрывом. М. : Энергоатомиздат, 2003. 272 с.
36. *Алехин А. А., Суздальцев С. Ю., Яфаров Р. К.* Тонкая структура углеродных пленок, полученных в плазме микроволнового газового разряда низкого давления // *Письма в ЖТФ*. 2003. Т. 29, вып. 15. С. 73–79.
37. Алмазы в электронной технике : сб. ст. / отв. ред. В. Б. Квасков. М. : Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
38. *Зайцев Н. А., Горнев Е. С., Орлов С. Н., Красников А. Г., Свечкарев К. П., Яфаров Р. К.* Наноалмазографитовые автоэммиттеры для интегральных автоэмиссионных элементов // *Наноиндустрия*. 2011. № 5. С. 37–41.
39. *Рябов С. Н., Кутюлин С. А., Бойкин Н. И.* Физико-химические особенности процессов плазмохимического травления : обзоры по электронной технике. М. : ЦНИИ «Электроника», 1981. С. 73–79. (Сер. 7. Технология, организация производства и оборудование. Вып. 20 (844)).
40. *Кэрролл Д.* СВЧ-генератор на горячих электронах. М. : Мир, 1972. 382 с.
41. *Яфаров Р. К.* Физика СВЧ вакуумно-плазменных нанотехнологий. М. : Физматлит, 2009. 216 с.
42. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Низкотемпературная плазма с неравновесной ионизацией // *УФН*. 1979. Т. 128, вып. 2. С. 233–271.
43. *Никольский О. А., Юдин В. И.* Генерирование и усиление колебаний // *Сб. тр. Воронеж. политехн. ин-та*. 1973. № 6. С. 252–267.
44. *Никольский О. А., Юдин В. И.* Энергетический спектр электронов плазмы в электромагнитном поле // *Радиотехника и электроника*. 1977. № 2. С. 309–312.
45. *Гуляев Ю. В., Черкасов И. Д., Яфаров Р. К.* Диффузионная модель газового СВЧ-разряда в магнитном поле с распределенным вводом энергии // *Докл. АН*. 1998. Т. 358, № 3. С. 333–336.
46. Устройство для микроволновой вакуумно-плазменной с электронным циклотронным резонансом обработки конденсированных сред на ленточных носителях : пат. 2153733 Рос. Федерация. № 99110048/28 ; заявл. 07.05.1999 ; опубл. 27.07.00. Бюл. № 21. 17 с.



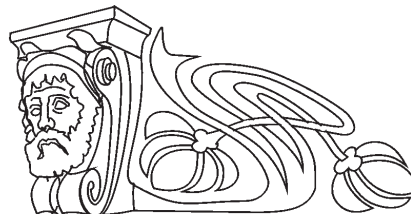
УДК 537.86

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ АВТОНОМНОЙ РЕГУЛЯЦИИ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ С КОНТУРОМ БАРОРЕФЛЕКТОРНОГО КОНТРОЛЯ СРЕДНЕГО АРТЕРИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ В ВИДЕ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю. М. Ишбулатов¹, А. С. Караваев^{1,2}, В. И. Пономаренко^{1,2},
М. Д. Прохоров², Б. П. Безручко^{1,2}

¹Саратовский государственный университет

²Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: karavaevas@gmail.com



Предложена математическая модель вегетативной регуляции деятельности сердечно-сосудистой системы человека в виде системы дифференциальных уравнений, часть из которых содержит запаздывающие члены. Спектральный анализ демонстрирует лучшее качественное и количественное соответствие предложенной модели экспериментальным данным по сравнению с другими известными моделями.

Ключевые слова: математическая модель, система с запаздыванием, спектр мощности, сердечно-сосудистая система.

Model of Cardiovascular System Autonomic Regulation with a Circuit of Baroreflectory Control of Mean Arterial Pressure in the Form of Delayed-Feedback Oscillator

Y. M. Ishbulatov, A. S. Karavaev, V. I. Ponomarenko,
M. D. Prokhorov, B. P. Bezruchko

A mathematical model of human cardiovascular system autonomic regulation is proposed having the form of differential equation set. Some equations of the model contain terms with time delay. The spectral analysis shows that the proposed model exhibits better qualitative and quantitative coincidence with experimental data than the known models.

Keywords: mathematical model, time-delay system, power spectrum, cardiovascular system.

Введение

Исследования сложных многокомпонентных систем реального мира, как правило, сопровождаются попытками построения моделей этих объектов. По мере получения новых знаний о таких объектах их модельные представления развиваются, совершенствуются и усложняются, стартуя от представлений в виде качественных структурных схем. Финальным этапом и целью такой работы является формализация полученных знаний в виде математических моделей, которые претендуют не только на качественное, но и на количественное описание исследуемых явлений и систем. Особое значение такое моделирование имеет в физиологии и медицине. Изуче-

ние особенности функционирования и взаимодействия систем регуляции организма человека, в частности, контуров нервной регуляции работы сердечно-сосудистой системы, имеет важнейшее фундаментальное и прикладное значение и привлекает внимание исследователей [1, 2].

Создание таких математических моделей, структура которых соответствует исследуемым объектам, а коэффициенты несут физический смысл, открывает широкий спектр возможностей [3]. Анализ поведения таких моделей позволяет прогнозировать поведение организма во времени, а также при воздействии патологических факторов и лекарственных препаратов. Решение задачи реконструкции параметров моделей с известной структурой по экспериментальным данным дает уникальную информацию о состоянии систем организма, позволяя, в частности, оценить параметры, прямое измерение которых затруднительно или невозможно. Значения привносимых возможностей для решения задач медицинской диагностики трудно переоценить [4–8].

Значительные сложности математического описания объектов реального мира, особенно объектов биологической природы, приводят к необходимости заведомого упрощения модельного представления по сравнению с оригинальным объектом. При этом, как правило, модель создается для описания конкретного состояния, в частности, конкретной патологии. Попытки создания «универсальных» моделей, как правило, оказываются безуспешными в связи со сложностью задачи, либо такие «универсальные» модели оказываются слишком общими, а их коэффициенты не имеют физического смысла. В этом случае невозможно претендовать на ко-



личественное описание моделируемых систем, процессов и явлений с их помощью.

В настоящее время предложен ряд моделей регуляции сердечно-сосудистой системы (ССС), включающих исследуемый нами контур барорефлекторного контроля тонуса артериальных сосудов. Однако модель данного контура, предложенная в работе [9], учитывающая воздействие процесса дыхания, является линейной и демонстрирует неустойчивое поведение. Нелинейная модель в виде автогенератора с запаздыванием [10], предложенная по результатам прямых экспериментов на кроликах *in vitro*, демонстрирует устойчивый предельный цикл и хорошо соответствует экспериментальным данным. Однако в оригинальной работе исследователи рассматривали автономную систему, не учитывая воздействия на нее никаких внешних факторов и ее взаимодействия с другими регуляторными процессами. При этом, как показано в работах [11–13], такое взаимодействие сильно и его степень несет ценную диагностическую информацию о состоянии ССС. В модели, предложенной в [14] и последователей [15, 16], предлагается использовать системы дифференциальных уравнений, часть из которых имеет запаздывание.

Например, модель, предложенная в [15], учитывает несколько взаимодействующих процессов регуляции тонуса сосудов, симпатическую и парасимпатическую иннервацию сердца, процесс дыхания. Однако в этих многокомпонентных моделях уравнения, описывающие процесс барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов, линейны и не могут демонстрировать автоколебаний, что не соответствует современным представлениям об устройстве этой системы. Кроме того, такие модели принципиально не позволяют моделировать наблюдаемый в экспериментах захват частот и фаз автоколебаний процессом дыхания [17, 18]. Следствием таких особенностей известных моделей является, в том числе, их неспособность воспроизведения типичных для реальных данных спектральных плотностей мощности, отражающих процессы симпатической, парасимпатической регуляции и дыхания. Эти процессы проявляются в спектрах кардиоинтервалограмм (последовательность интервалов между сердечными сокращениями, R-R-интервалы) в виде характерных спектральных составляющих, имеющих частоты в так называемой HF – высокочастотной и LF – низкочастотной областях спектров мощности [1, 2].

Сказанное выше подтверждает актуальность и важность создания математической модели, учитывающей современные представления об устройстве систем автономной регуляции деятельности ССС и воспроизводящей спектральные свойства сигналов кардиоинтервалограмм. В данной работе предлагается такая математическая модель.

Модель автономной регуляции сердечно-сосудистой системы

В основе предлагаемой модели лежат сложившиеся представления о функционировании сердечно-сосудистой системы, использованные авторами статьи в [12] и некоторыми другими исследователями, в частности [13, 14]. В них учитывается взаимодействие различных контуров регуляции, однако контуры описываются уравнениями, структура каждого из которых не допускает возникновения устойчивой автономной динамики на предельном цикле. Поэтому контур барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов, который в соответствии с известными результатами [10, 19, 20] обладает высокой степенью автономности и способностью к автоколебаниям, был заменен на модель, в основе которой лежат результаты, полученные в [10]. В этой работе по результатам серии экспериментов *in vitro* на кроликах была предложена автономная математическая модель системы барорефлекторной регуляции среднего артериального давления в виде дифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием. Были оценены значения параметров этой модели, соответствующие здоровому человеку, и был показан автоколебательный характер динамики данной модели для предложенных значений параметров.

Предложенная нами модель включает 15 алгебраических и дифференциальных уравнений (1)–(15), отражающих структуру, представленную на рис. 1. Частота сердечных сокращений задается работой синусного узла и модулируется влиянием симпатических и парасимпатических нервов (10), причем центры, управляющие симпатической и парасимпатической активностью, расположенные в центральной нервной системе (рис. 1). Сократимость сердца также модулируется активностью симпатических нервов. Сократимость сердца и частота сердечных сокращений определяют систолическое давление, которое быстро нарастает до максимума (примерно 0.1 с в соответствии с [14]) от момента сокращения левого желудочка.

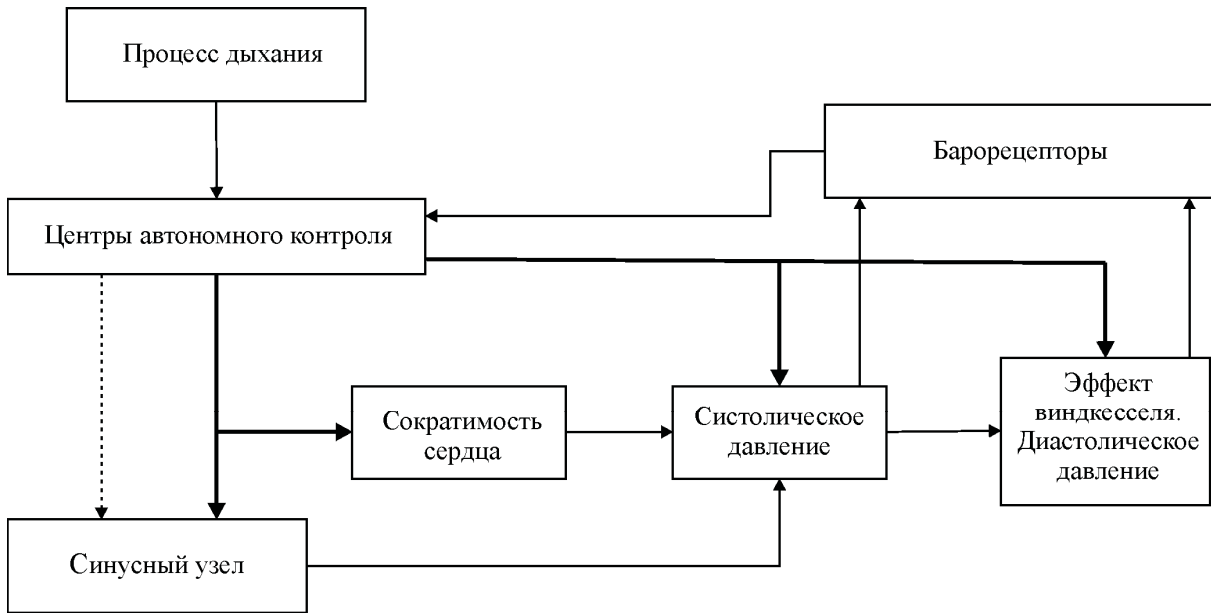


Рис. 1. Структурная схема предложенной модели. Влияние вагуса отмечено пунктирной линией, симпатическая иннервация – жирной линией

Далее инерционные свойства артериальных сосудов (так называемый эффект виндкесселя) обеспечивают сглаживание импульса давления, и оно релаксирует от максимума, достигнутого в фазе систолы, до следующего сердечного сокращения. Изменения артериального давления воспринимаются артериальными барорецепторами, активность которых влияет на работу центров автономной нервной регуляции. Эти центры представлены ядрами симпатического и парасимпатического отделов нервной системы. В частности, согласно результатам, полученным в [10], в этих центрах реализуется нелинейное преобразование сигнала $-f$, учитываемое в уравнении (4) нашей модели. Введенный нами в модель [14] контур регуляции среднего артериального давления, управляемый центрами симпатической регуляции, расположенными в продолговатом мозге [10], влияет на тонус артериальных сосудов, модулируя величины систолического и диастолического давления с характерной частотой около 0.1 Гц. Процесс дыхания влияет на активность центров автономной регуляции.

Изменение активности барорецепторов происходит в ответ на изменение как кровяного давления, так и его производной, в соответствии с экспериментальными результатами, представленными в [21]:

$$v_b = k_1(p - p^{(0)}) + k_2 \frac{dp}{dt}. \quad (1)$$

Изменения активности барорецепторов приводит к изменению активностей симпатических и парасимпатических контуров барорефлекторной регуляции артериального давления:

$$v_s = \max(0, v_s^{(0)} - k_s^b v_b + k_s^r |\sin(\pi f_r + \Delta\phi_s^r)|), \quad (2)$$

$$v_p = \max(0, v_p^{(0)} - k_p^b v_b + k_p^r |\sin(\pi f_r + \Delta\phi_p^r)| + \xi), \quad (3)$$

где v_s и v_p – симпатическая и парасимпатическая активности соответственно f_r – частота дыхания, а ξ – нормально распределенный розовый шум со среднеквадратичным отклонением 0.4, который, как показано в работе [19], имеет центральное происхождение.

Для описания контура симпатической регуляции тонуса артериальных сосудов авторы статьи отказались от линейных представлений и в соответствии с работой [10] ввели автоколебательный контур, описываемый уравнением

$$\varepsilon \frac{d\bar{p}}{dt}(t) = -\bar{p}(t) + f(\bar{p}(t - \tau)) + k_m^r \sin(2\pi f_r t), \quad (4)$$

где ε – инерционность периферийных сосудов; $\bar{p}(t)$ – среднее артериальное давление; τ – суммарное время афферентных и эфферентных задержек в контуре барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов; f – сигмоидальная функция, моделирующая обработку информации о среднем артериальном давлении, приходящей от барорецепторов в центральной нервной системе:



$$f(x(t-\tau)) = R \left(\frac{r^*}{1 + \alpha e^{-\beta(x(t-\tau)-x^*)}} - \frac{r^*}{1 + \alpha e^{\beta(x(t-\tau)-x^*)}} + y^* \right), \quad (5)$$

где R – коэффициент усиления центральной нервной системы; r^* , α , β , x^* , y^* – параметры нелинейной функции.

Воздействие симпатического и парасимпатического контуров барорефлекторной регуляции на частоту сердечных сокращений (ЧСС) выражается через введение факторов соответственно симпатического и парасимпатического влияний f_s и f_p :

$$f_s = 1 + k_\phi^{cNa} (c_{cNa} (\hat{c}_{cNa} - c_{cNa})) \frac{c_{cNa}^{n_{cNa}}}{\hat{c}_{cNa}^{n_{cNa}} + c_{cNa}^{n_{cNa}}}, \quad (6)$$

$$f_p = 1 + k_\phi^p \left(v_p(t - \theta_p) + \frac{v_p^{n_p}(t - \theta_p)}{\hat{v}_p^{n_p} + v_p^{n_p}(t - \theta_p)} \right) F(\phi). \quad (7)$$

Симпатическая нервная система воздействует на ЧСС изменением концентрации норадреналина в сердце c_{cNa} :

$$\frac{dc_{cNa}}{dt} = -\frac{c_{cNa}}{\tau_{cNa}} + k_{c_{cNa}}^s v_s(t - \theta_{cNa}), \quad (8)$$

где θ_{cNa} – время запаздывания, обусловленное конечностью скорости нервной проводимости, и временем, за которое норадреналин вызывает изменения в сердце. $F(\phi)$ – кривая фазовой эффективности, описываемая уравнением

$$F(\phi) = \phi^{1.3} (\phi - 0.45) \frac{(1 - \phi)^3}{(1 - 0.8)^3 + (1 - \phi)^3}. \quad (9)$$

Агентом парасимпатической системы является ацетилхолин, изменение концентрации которого происходит гораздо быстрее, почти не отставая от активности парасимпатической нервной системы. Таким образом, вместо изменения концентрации агента используется непосредственно нервный сигнал контура.

Работа синусного узла описывается моделью *integrate-and-fire*:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{T_o} f_s f_p, \quad (10)$$

где ϕ – фаза сердечного сокращения, T_o – период сокращений денервированного сердца.

Венный возврат и диастолическое давление в конце предыдущего цикла вместе с ЧСС определяют силу сердечных сокращений:

$$S'_i = S^{(0)} + k_S^c c_{cNa} + k_S^l T_{i-1} \quad (11)$$

$$S_i = S'_i + (\hat{S} - S'_i) \frac{S_i^{ms}}{S_i^{ms} + \hat{S}^{ms}}, \quad (12)$$

где T_i – длительность предыдущего сердечного цикла.

Воздействие симпатического контура барорефлекторной регуляции тонуса периферийных сосудов влияет на изменение артериального давления двумя способами, оба способа учитываются в предложенной модели. Первый способ состоит в модуляции артериального давления сигналом $\bar{p}(t)$ среднего артериального давления с выхода контура (4). Данное воздействие активно в первую, систолическую, часть сердечного цикла, в ходе которого артериальное давление увеличивается до систолического:

$$\frac{dp_{I_1}}{dt}(t) = D + Si \frac{(t - Ti)}{T_{sys}} \exp\left(1 - \frac{(t - Ti)}{T_{sys}}\right) + k_p^M \bar{p}(t), \quad (13)$$

где D – диастолическое давление в конце предыдущего цикла, T_{sys} – фиксированная длина систолической части сердечного цикла. Второй способ заключается в модуляции сопротивления периферийных сосудов сигналом нервной регуляции $f(\bar{p}(t - \tau_e))$, определяющим реакцию центральной нервной системы на изменение среднего артериального давления. Снижение давления в артериальных сосудах после систолы описывается моделью Виндкесселя:

$$\frac{dp_{II}}{dt}(t) = -\frac{p_{II}}{RC}, \quad (14)$$

где C – константа, определяющая эластичность аорты; R – сопротивление периферийных сосудов, модулируемое сигналом $f(\bar{p}(t - \tau_e))$:

$$R = R_o (1 + k_v^M f(\bar{p}(t - \tau_e))), \quad (15)$$

где τ_e – время эфферентных задержек в контуре симпатической регуляции тонуса артериальных сосудов.

Параметры модели, использованные в ходе численного моделирования, представлены в таблице.



Параметры модели ((1)–(15))

$p^{(0)}$	50 мм рт. ст.	k_p^r	0.1	y^*	0	$S^{(0)}$	25 мм рт. ст.
k_1	0.02 1/мм рт. ст.	$\Delta\phi_s^r$	0.0	$k_{c_{vNa}}^s$	1.2	$k_s^c c_{cNa}$	40 мм рт. ст.
k	0.0013 с/мм рт. ст.	ε	2.0	θ_{vNa}	1.65 с	k_s^t	10 1/мм рт.ст.
$v_s^{(0)}$	0.0	τ	3.6 с	k_ϕ^{cNa}	1.6	\hat{S}	70 мм рт.ст.
k_s^b	0.7	k_m^r	0.5	\hat{c}_{cNa}	2.0	n_s	2.5
k_s^r	0.1	R	1.65	n_{cNa}	2.0	T_{sy}	0.125 с
f_r	0.2 1/с	r^*	1	k_p^p	5.8	k_p^M	0.045
$\Delta\phi_s^r$	0.0	α	1	\hat{v}_p	2.5	$R_o C$	1.5 с
$v_p^{(0)}$	0.0	β	2	n_p	2.0	k_v^M	0.1
k_p^b	0.3	x^*	0	θ_p	0.5 с	τ_e	3.24 с

Результаты численного моделирования

Возможности предложенной модели исследовались в ходе сопоставления экспериментальных кардиоинтервалограмм здоровых испытуемых, данных полученных из сигнала активности синусного узла предложенной модели (уравнение (7)) и модели, предложенной в [14].

На рис. 2 сопоставляются спектральные плотности мощности экспериментальной кар-

диоинтервалограммы (рис. 2, а), выделенной из фоновой записи ЭКГ здорового испытуемого, сделанной в I стандартном отведении по Эйнтховену длительностью 30 мин и результаты численного моделирования с использованием двух модельных представлений (рис. 2, б). Длительности реализаций, полученных в численном моделировании, соответствовали длительности экспериментальной реализации.

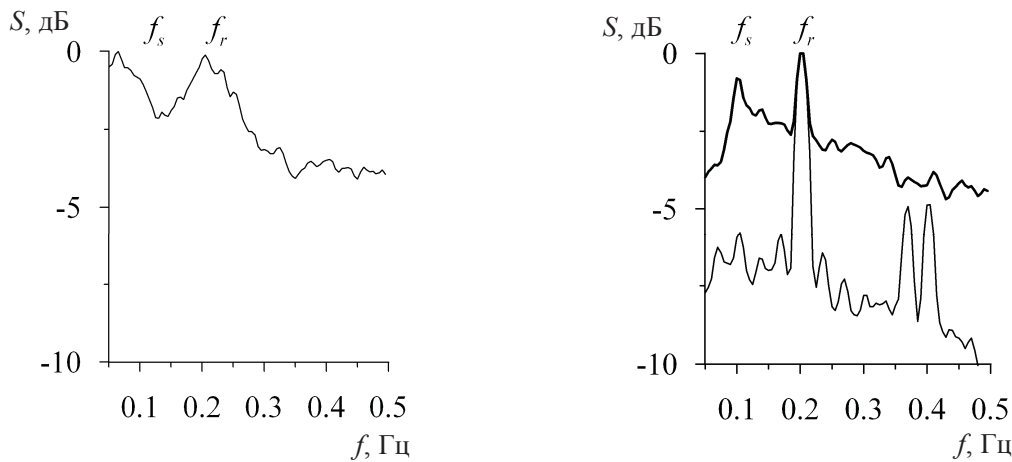


Рис. 2. Сопоставление спектральной плотности мощности кардиоинтервалограмм, полученных: а – в эксперименте, б – путем численного интегрирования модельных уравнений. Тонкая линия – для модели, предложенной в работе [14], жирная линия – для модели, предложенной в данной статье

Сопоставление спектров мощности ритмов, свойственных нашей модели и модели [14], демонстрирует наличие лишь в наших спектрах составляющей, соответствующей 10-секундным ритмам, наблюдаемым в эксперименте – f_s . Этот результат достигнут благодаря введению в структуру модели автоколебательного контура с запаздыванием, моделирующего регуляцию тонуса артериальных сосудов. В обоих сопо-

ставляемых на рис. 2, б спектрах виден пик, соответствующий частоте дыхания f_r .

В качестве количественной меры для сопоставления двух моделей и экспериментальных данных применялся широко используемый информативный индекс LF/HF [1], отражающий соотношение активности симпатического и парасимпатического отделов в системе вегетативной регуляции деятельности ССС [2]. С



физической точки зрения индекс представляет собой отношение спектральных плотностей мощности в двух указанных спектральных диапазонах. Индекс LF/HF рассчитывался по 6 кардиоинтервалограммам здоровых испытуемых длительностью по 5 мин. Кроме того, авторы статьи анализировали реализации такой же длины, полученные путем численного моделирования с использованием собственной модели (с параметрами, приведенными в таблице) и модели [14] (с параметрами, указанными в работе [14]). Анализировались по 6 временных реализаций кардиоинтервалограмм.

В результате средняя величина индекса LF/HF, рассчитанная по экспериментальным данным, составила 11.539 ± 3.697 (приводится среднее и стандартное отклонение). Анализ реализаций, полученных с помощью предложенной авторами статьи модели, показывает среднее значение индекса 0.505 ± 0.162 , а для модели Seidel – Herzel [14] – 0.002 ± 0.001 . Подчеркнем, что в соответствии со статистическими данными А. Н. Флейшмана [1] значения индекса LF/HF от десятых долей до десятков могут наблюдаться в ритмах здоровых обследуемых, а значения порядка тысячных долей не наблюдаются. Такие низкие значения индекса для модели [14] можно объяснить отсутствием в ее спектре выраженной составляющей около 0.1 Гц в связи с тем, что модельное уравнение, описывающее соответствующий регуляторный контур, линейно (линейный релаксатор с запаздыванием) и не может демонстрировать автоколебательную динамику на предельном цикле.

Заключение

Предложена математическая модель системы вегетативной регуляции деятельности сердечно-сосудистой системы человека в виде системы дифференциальных уравнений, часть из которых имеет запаздывание. В модели был учтен автоколебательный характер динамики контура барорефлекторной регуляции тонуса артериальных сосудов. Это позволило наблюдать в спектрах временных реализаций выраженный пик на частоте около 0.1 Гц (так называемый LF диапазон), чего ранее не удавалось добиться в других известных аналогичных моделях. Предложенная модель, в отличие от широко используемой модели [14], позволяет получать значения известного индекса LF/HF, характерные для здоровых людей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00291).

Список литературы

1. Флейшман А. Н. Медленные колебания гемодинамики. Теория, практическое применение в клинической медицине. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1999. 543 с.
2. Баевский Р. М., Иванов Г. Г., Чирейкин Л. В., Гаврилушкин А. П., Довгалецкий П. Я., Кукушкин Ю. А., Миронова Т. Ф., Прилуцкий Д. А., Семенов А. В., Федоров В. Ф., Флейшман А. Н., Медведев М. М. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (методические рекомендации) // Вестн. аритмологии. 2001. Т. 24. С. 65–87.
3. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов : ГосУНЦ «Колледж», 2005. 299 с.
4. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Хорев В. С. Восстановление времени запаздывания по временным рядам с применением метода ближайших соседей // Письма в Журнал технической физики. 2013. Т. 39, вып. 15. С. 32–39.
5. Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Сысоев И. В. Реконструкция систем с запаздыванием под внешним периодическим воздействием // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 4. С. 613–625.
6. Смирнов Д. А., Сидак Е. В., Безручко Б. П. Интервальные оценки времени запаздывания связи по временным рядам // Письма в Журнал технической физики. 2011. Т. 37, вып. 1. С. 64–71.
7. Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Восстановление систем нейтрального типа с запаздыванием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 3–16.
8. Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Гриднев В. И., Киселев А. Р., Безручко Б. П., Посненкова О. М., Струнина А. Н., Шварц В. А. Методика реконструкции модели системы симпатической барорефлекторной регуляции артериального давления по экспериментальным временным рядам // Технологии живых систем. 2007. Т. 4, № 4. С. 34–41.
9. Burgess D. E., Hundley J. C., Brown D. R., Li S. -G., Randal D. C. First-order differential-delay equation for the baroreflex predicts the 0.4-Hz blood pressure rhythm in rats // American J. of Physiology. 1997. Vol. 273. P. 1878–R1884.
10. Ringwood J. V., Malpas S. C. Slow oscillations in blood pressure via a nonlinear feedback model // American J. of Physiology – Regulatory, Integrative and Comparative Physiology. 2001. Vol. 280. P. 1105.
11. Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Gridnev V. I., Bodrov M. B., Bespyatov A. B. Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular



- system // Physical Review E. 2003. Vol. 68. P. 041913.
12. Karavaev A. S., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Kiselev A. R., Gridnev V. I., Ruban E. I., Bezruchko B. P. Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system // Chaos. 2009. Vol. 19. P. 033112.
 13. Kiselev A. R., Gridnev V. I., Prokhorov M. D., Karavaev A. S., Posnenkova O. M., Ponomarenko V. I., Bezruchko B. P., Shvartz V. A. Evaluation of 5-year risk of cardiovascular events in patients after acute myocardial infarction using synchronization of 0.1-Hz rhythms in cardiovascular system // Annals of Noninvasive Electrocardiology. 2012. Vol. 17. P. 204–213.
 14. Seidel H., Herzel H. Bifurcations in a nonlinear model of the baroreceptor-cardiac reflex // Physica D : Nonlinear Phenomena. 1998. Vol. 115. P. 145–160.
 15. Kotani K., Struzik Z.R., Takamasu K., Stanley H.E., Yamamoto Y. Model for Complex Heart Rate Dynamics in Health and Disease // Physical Review E. 2005. Vol. 72. P. 041904.
 16. Ottensen J. T. Modelling the dynamical baroreflex-feedback control // Mathematical and Computer Modelling. 2000. Vol. 31. P. 167.
 17. Прохоров М. Д., Бодров М. Б., Пономаренко В. И., Гриднев В. И., Беспятов А. Б. Исследование синхронизации между ритмами сердечно-сосудистой системы человека по последовательностям R-R-интервалов // Биофизика. 2005. Т. 50, вып. 5. С. 914–919.
 18. Smirnov D. A., Bodrov M. B., Perez Velazquez J. L., Wennberg R. A., Bezruchko B. P. Estimation of coupling between oscillators from short time series via phase dynamics modeling : Limitations and application to EEG data // Chaos. 2005. Vol. 15. P. 024102.
 19. Киселев А. Р., Беспятов А. Б., Колижирина О. М., Гриднев В. И., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Довгалецкий П. Я. Внутренняя синхронизация основных 0.1 Гц-частотных ритмов в системе вегетативного управления сердечно-сосудистой системой // Физиология человека. 2007. Т. 33, № 2. С. 69–75.
 20. Bunde A., Havlin S., Kantelhardt J. W., Penzel T., Peter J. H., Voigt K. Correlated and uncorrelated regions in heart-rate fluctuations during sleep // Physical Review Letters. 2000. Vol. 85. P. 3736.
 21. Warner H. R. The frequency-dependent nature of blood pressure regulation by the carotid sinus studied with an electric analog // Circulation. 1958. Res. 6. P. 35–40.

УДК 519.6

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТОБРАЖЕНИЯ И. М. АКУЛИНИЧЕВА

В. М. Аникин

Саратовский государственный университет
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Формулируются уравнения Перрона – Фробениуса и аналитически рассчитывается автокорреляционная функция для двумерного отображения И. М. Акулиничева.

Ключевые слова: детерминированный хаос, двумерные отображения, автокорреляционные функции.

Statistic Characteristics of Akulinichev's Map

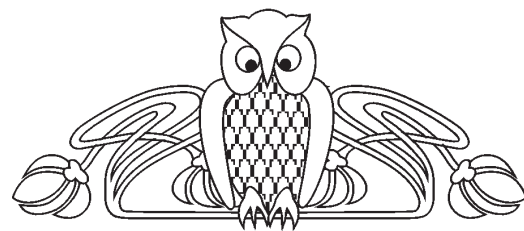
V. M. Anikin

Perron – Frobenius equations for Akulinichev's map are formulated. The autocorrelation function of the map orbits is analytically calculated.

Key words: deterministic chaos, two-dimensional maps, autocorrelation functions.

Введение

В теории детерминированного хаоса на «особом положении» находятся динамические системы, допускающие точные решения [1]. Они служат своего рода «поверочным эталоном», с



которым можно соотносить решения, полученные исключительно численными методами. В статье рассматривается одно из таких отображений – двумерное отображение, впервые введенное И. М. Акулиничевым. В [2] он рассмотрел ряд свойств двумерного отображения, определенного на единичном квадрате, с точки зрения динамической системы теории чисел. В данной работе мы дополняем описание свойств этого отображения с позиции операторного подхода – на базе линейного оператора Перрона – Фробениуса (ОПФ), определяющего вероятностные характеристики итераций этого отображения.

1. Определение динамической системы

Двумерное отображение И. М. Акулиничева формируется посредством выделения дробных частей двух алгебраических выражений, переводящее единичный квадрат в себя:



$$T(x, y) = (\{x + \gamma\}, \{y + 2x + \gamma\}), \quad x, y \in (0, 1), \quad (1)$$

где $0 < \gamma < 1$ – фиксированное иррациональное число, а фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа. Предположение об иррациональном характере параметра γ существенно для теоретического обеспечения бесконечности нециклических траекторий отображения.

Если итерации в (1) начинаются с некоторой начальной точки $(x_0, y_0) \in (0, 1)$, то в более явном покомпонентном представлении отображение (1.1) на n -м шаге переписывается как

$$\begin{cases} x_{n+1} = \{x_n + \gamma\}, & x_n \in (0, 1), \\ y_{n+1} = \{y_n + 2x_n + \gamma\}, & y_n \in (0, 1). \end{cases} \quad (2)$$

Введенное двумерное отображение обладает точным аналитическим решением, выражающим значения переменных на любом шаге итераций через начальные значения:

$$\begin{cases} x_n = \{x_0 + \gamma n\}, & 0 \leq x_n \leq 1, \\ y_n = \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2\}, & 0 \leq y_n \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, значение x_n вычисляется посредством выделения дробной части линейного соотношения относительно n , а значение y_n – посредством выделения дробной части квадратного трехчлена относительно n .

Доказательство (3) можно провести посредством сведения точного решения (3) к виду (2), что и будет означать его непротиворечивость. В самом деле, на $(n+1)$ -м шаге итераций на основании (3) должны иметь:

$$x_{n+1} = \{x_0 + \gamma(n+1)\} = \{x_0 + \gamma n + \gamma\} = \{[x_0 + \gamma n] + \{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} = \{\{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} \equiv \{x_n + \gamma\}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \{y_0 + 2x_0(n+1) + \gamma(n+1)^2\} = \{y_0 + 2x_0 n + 2x_0 + \gamma n^2 + 2\gamma n + \gamma\} = \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2 + 2(x_0 + \gamma n) + \gamma\} = \\ &= \{[y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2] + \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2\} + 2[x_0 + \gamma n] + 2\{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} = \{(y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2) + 2\{x_0 + \gamma n\} + \gamma\} \equiv \{y_n + 2x_n + \gamma\}, \end{aligned} \quad (5)$$

ч.т.д. В (4) и (5) введено обозначение для целой части $[a]$ числа a как ближайшего целого, меньшего a , и учтено, что $a = [a] + \{a\}$, $\{a\} = \{[a] + \{a\}\}$.

Преобразования для различного числа итераций отображения (1) связаны друг с другом по правилу композиции:

$$T^n T^m(x_0, y_0) = T^{n+m}(x_0, y_0), \quad (6)$$

т. е. эволюция системы в процессе итераций может быть найдена посредством преобразования $T^m(x_0, y_0)$ к состоянию (x_m, y_m) , а затем – преобразования $T^n(x_m, y_m)$ к новому состоянию (x_n, y_n) (m и n – натуральные числа). Другими словами, (1.1) можно рассматривать как полугруппу преобразований фазового пространства (единичного квадрата) в себя.

Показать это можно посредством преобразований, аналогичных использованным в (5). Согласно (3) имеем:

$$T^n(x_0, y_0) = (x_n, y_n) = (\{x_0 + \gamma n\}, \{y_0 + 2x_0 n + \gamma n^2\}); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T^{n+m}(x_0, y_0) &= (\{x_0 + \gamma(n+m)\}, \{y_0 + 2x_0(n+m) + \gamma(n+m)^2\}) = (\{x_0 + \gamma m + \gamma n\}, \\ &\quad \{y_0 + 2x_0 m + 2x_0 n + \gamma(n^2 + 2nm + m^2)\}). \end{aligned} \quad (8)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \{x_0 + \gamma m + \gamma n\} &= \{[x_0 + \gamma m] + \{x_0 + \gamma m\} + \gamma n\} = \{\{x_0 + \gamma m\} + \gamma n\} = \{x_m + \gamma n\}; \\ \{y_0 + 2x_0 m + \gamma m^2 + 2x_0 n + 2\gamma nm + \gamma n^2\} &= \\ &= \{[y_0 + 2x_0 m + \gamma m^2] + \{y_0 + 2x_0 m + \gamma m^2\} + 2n(x_0 + \gamma m) + \gamma n^2\} = \\ &= \{y_m + 2n[x_0 + \gamma m] + 2n\{x_0 + \gamma m\} + \gamma n^2\} = \{y_m + 2x_m n + \gamma n^2\}, \end{aligned}$$

устанавливаем справедливость (6):



$$x_{n+m} = \{x_0 + \gamma n + \gamma m\} = \{x_n + \gamma m\}; \quad (9)$$

$$y_{n+m} = \{y_0 + 2x_0(n+m) + \gamma(n+m)^2\} = \{y_n + 2mx_n + \gamma m^2\}; \quad (10)$$

$$T^{n+m}(x_0, y_0) = T^n(x_m, y_m) = T^n T^m(x_0, y_0). \quad (11)$$

2. Оператор и уравнения Перрона–Фробениуса для управляющей компоненты

Покажем далее, что отображение (1) обладает инвариантной мерой в форме меры Лебега, сохраняемой при преобразованиях (1). В другой терминологии это означает, что (1) является эргодическим преобразованием. Наличие инвариантной меры доказывается, в частности, посредством нахождения неподвижной точки ОПФ данного отображения. Отображение (1) специфично в том плане, что преобразование по одной из координат (x) происходит независимо от второй координаты. Поэтому можно ввести два оператора Перрона–Фробениуса, один из которых соотнесен с одномерным преобразованием «независимой» координаты

$$x_{n+1} = \{x_n + \gamma\}; \quad 0 \leq x_n < 1; \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad (12)$$

а второй оператор – собственно с двумерным отображением (1).

Получим выражение ОПФ для отображения (12), учитывая, что для отображения с итеративной функцией $g(x)$

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_n \in (0,1), \quad (13)$$

оператор имеет вид

$$Pf(x) = \int_0^1 \delta(x - g(\xi)) f(\xi) d\xi. \quad (14)$$

В случае отображения (12) оператор записывается как

$$Pf(x) = \int_0^1 \delta(x - \{\xi + \gamma\}) f(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Проведем в (15) линейную замену переменных $\eta = \xi + \gamma$, приводящую к изменению нижнего ($\xi = 0, \eta = \gamma$) и верхнего ($\xi = 1, \eta = 1 + \gamma$) пределов интегрирования в (15) и представлению ОПФ в виде

$$Pf(x) = \int_{\gamma}^{1+\gamma} \delta(x - \{\eta\}) f(\eta - \gamma) d\eta = \int_{\gamma}^1 \delta(x - \{\eta\}) f(\eta - \gamma) d\eta + \int_1^{1+\gamma} \delta(x - \{\eta\}) f(\eta - \gamma) d\eta.$$

Поскольку для $\gamma \leq \eta < 1$ $\{\eta\} = \eta, [\eta] = 0$, а для $1 \leq \eta < 1 + \gamma$ $\{\eta\} = \eta - 1, [\eta] = 1$ (в обоих случаях $\eta - [\eta] = \{\eta\}$), дальнейшие преобразования дают:

$$Pf(x) = \int_{\gamma}^1 \delta(x - \eta) f(\eta - \gamma) d\eta + \int_1^{1+\gamma} \delta(x + 1 - \eta) f(\eta - \gamma) d\eta = f(x - \gamma) \cdot \Theta_{\gamma,1}(x) + f(x + 1 - \gamma) \cdot \Theta_{0,\gamma}(x), \quad (16)$$

где $\Theta_{a,b}(x)$ – характеристическая функция интервала (a,b) , равная единице внутри интервала и нулю – за его пределами.

Оператор Перрона–Фробениуса определяет правило преобразования вероятностных плотностей при итерациях отображения (12), где величины x_n трактуются как случайные. Если распределение стартового значения отлично от инвариантного, то вероятностные плотности $f_n(x)$ для каждого шага итераций отображения (12) выражаются как

$$f_{n+1}(x) = f_n(x + 1 - \gamma) \cdot \Theta_{0,\gamma}(x) + f_n(x - \gamma) \cdot \Theta_{\gamma,1}(x). \quad (17)$$

Уравнение (17) можно трактовать как «нестационарное» уравнение Перрона–Фробениуса: оно содержит вероятностные плотности, относящиеся к различным шагам итерационного процесса. Под «стационарным» уравнением Перрона – Фробениуса мы будем понимать уравнение относительно инвариантной плотности $f^*(x)$. Оно получается подстановкой $f^*(x)$ в обе части уравнения (17):

$$f^*(x) = f^*(x + 1 - \gamma) \cdot \Theta_{0,\gamma}(x) + f^*(x - \gamma) \cdot \Theta_{\gamma,1}(x). \quad (18)$$



В отличие от классической теории вероятностей, на базе которой и выводится выражение для ОПФ (14), особым предметом интереса теории *детерминированного хаоса* является ситуация, когда нелинейное преобразование вероятностной плотности не меняет ее вида. Это и есть инвариантная плотность распределения. Уравнения типа (18) дают возможность для аналитического или численного расчета инвариантной плотности, которая, таким образом, и является неподвижной функциональной «точкой» ОПФ. В общем виде функциональное уравнение, определяющее инвариантную плотность, имеет вид

$$Pf^*(x) = f^*(x), \quad (19)$$

где символом P обозначен ОПФ для рассматриваемого отображения.

Особый интерес имеет решение нестационарного уравнения Перрона–Фробениуса (17) в форме, выражающей $f_n(x)$ через начальное распределение $f_0(x)$. Для этого необходимо знание точного траекторного решения для отображения (12). Оно было найдено выше как компонента точного решения для двумерного отображения (1) и выражается формулой (3):

$$x_n = \{x_0 + n\gamma\} = \{x_0 + [n\gamma] + \{n\gamma\}\} = \{x_0 + \{n\gamma\}\}. \quad (20)$$

С использованием (20) уравнение (17) запишется как

$$f_n(x) = \int_0^1 \delta(x - \{x_0 + n\gamma\}) f_0(x_0) dx_0 = \int_0^1 \delta(x - \{\xi + \{n\gamma\}\}) f_0(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Уравнение (21) непосредственно связывает $f_n(x)$ и $f_0(x)$. Для того чтобы воспользоваться фильтрующими свойствами дельта-функции, в (21) необходимо произвести замену переменных так, чтобы аргумент дельта-функции не содержал *функций* от переменной интегрирования, а содержал лишь аргумент вида $c - \xi$, где c – величина, не зависящая от переменной интегрирования. Такое представление достигается в результате следующей цепочки вычислений:

$$f_n(x) = \int_{\{n\gamma\}}^{1+\{n\gamma\}} \delta(x - \{\eta\}) f_0(\eta - \{n\gamma\}) d\eta = \int_{\{n\gamma\}}^1 \delta(x - \{\eta\}) f_0(\eta - \{n\gamma\}) d\eta + \int_1^{1+\{n\gamma\}} \delta(x - \{\eta\}) f_0(\eta - \{n\gamma\}) d\eta. \quad (22)$$

В (22) по сравнению с (21) введена новая переменная интегрирования согласно замене $\eta = \xi + \{n\gamma\}$, что привело к изменению пределов интегрирования. На различных участках интегрирования значения целых $[\eta]$ и дробных $\{\eta\}$ частей имеют различные значения: $\{n\gamma\} \leq \eta < 1$, $[\eta] = 0$ и $\{\eta\} = \eta$ для интервала интегрирования $(\{n\gamma\}, 1)$, а для интервала интегрирования $(1, 1 + \{n\gamma\})$ имеем $1 \leq \eta < 1 + \{n\gamma\}$, $[\eta] = 1$ и $\{\eta\} = \eta - 1$. Поэтому далее из (22) следует искомое решение нестационарного уравнения Перрона–Фробениуса через начальное вероятностное распределение:

$$f_n(x) = f_0(x + 1 - \{n\gamma\}) \Theta_{0, \{n\gamma\}}(x) + f_0(x - \{n\gamma\}) \Theta_{\{n\gamma\}, 1}(x). \quad (23)$$

Обратимся теперь к стационарному уравнению Перрона–Фробениуса (18). Его решением является *равномерное распределение*:

$$f^*(x) = \Theta_{0,1}(x), \quad x \in [0,1), \quad (24)$$

что проверяется непосредственной подстановкой (24) в (18). Тем самым отображение (12) можно рассматривать как генератор псевдослучайных (с равномерным распределением) точек на единичном интервале.

Как следует из формального рассмотрения (23), если распределение стартового значения $f_0(x)$ отображения (12) совпадает с инвариантной плотностью (24), то и все последующие распределения будут равномерными, что, собственно, согласуется со смыслом инвариантной плотности. Корректность проведенных вычислений можно подтвердить и непосредственным расчетом $f_n(x)$ по формуле (21), когда задана начальная плотность $f_0(x) = \Theta_{0,1}(x)$. Воспроизводя в «облегченной» форме проводившиеся ранее расчеты, получим в этом случае для $f_n(x)$:



$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= \int_0^1 \delta(\{\xi + \gamma n\} - x) \cdot f_0(\xi) d\xi = \int_0^1 \delta(\{\xi + \gamma n\} - x) d\xi = \\
 &= \int_0^1 \delta(\{\xi + \lfloor \gamma n \rfloor + \{\gamma n\}\} - x) d\xi = \int_0^1 \delta(\{\xi + \{\gamma n\}\} - x) d\xi = \\
 &= \int_{\{\gamma n\}}^{1+\{\gamma n\}} \delta(\{\eta\} - x) d\eta = \int_{\{\gamma n\}}^1 \delta(\{\eta\} - x) d\eta + \int_1^{1+\{\gamma n\}} \delta(\{\eta\} - x) d\eta = \\
 &= \int_{\{\gamma n\}}^1 \delta(\eta - x) d\eta + \int_1^{1+\{\gamma n\}} \delta(\eta - 1 - x) d\eta = \Theta_{\{\gamma n\}, 1}(x) + \Theta_{1, 1+\{\gamma n\}}(1+x) = \\
 &= \Theta_{\{\gamma n\}, 1}(x) + \Theta_{0, \{\gamma n\}}(x) = 1, \quad x \in [0, 1),
 \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
 \eta = \xi + \{\gamma n\}, \quad \{\gamma n\} \leq \eta < 1 \Rightarrow [\eta] = 0, \quad \{\eta\} = \eta - [\eta] = \eta; \\
 1 \leq \eta < 1 + \{\gamma n\} \Rightarrow [\eta] = 1, \quad \{\eta\} = \eta - [\eta] = \eta - 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, когда $f_0(x) = \Theta_{0,1}(x)$, все случайные величины, получаемые в процессе отображения (12), оказываются одинаково распределенными:

$$x_n = x_0, \quad f_n(x) = f_0(x) = \Theta_{0,1}(x), \quad x \in [0, 1). \tag{26}$$

3. Оператор и уравнения Перрона – Фробениуса для двумерного отображения

Точное траекторное решение для y -компоненты отображения (1) определяется формулой (3):

$$y_n = \{y_0 + 2x_0n + \gamma n^2\}. \tag{27}$$

При фиксированных начальных координатах (x_0, y_0) распределение y_n является вырожденным:

$$\rho_n(y | x_0, y_0) = \delta(\{y_0 + 2x_0n + \gamma n^2\} - y). \tag{28}$$

Когда y_0 рассматривается как случайная величина, «полное» условное распределение y_n определяется как

$$\rho_n(y | x_0) = \int_0^1 \delta(\{y_0 + 2x_0n + \gamma n^2\} - y) \cdot \rho_0(y_0 | x_0) dy_0, \tag{29}$$

где $\rho_0(y_0 | x_0)$ – условное распределение начального значения координаты y (при условии задания начального значения координаты x). Формула (29) носит общий характер в том плане, что применима для любого условного распределения $\rho_0(y_0 | x_0)$. Для конкретного расчета $\rho_n(y | x_0)$ требуется задать вид условной плотности $\rho_0(y_0 | x_0)$. Естественно, с математической точки зрения наиболее простым является ее задание в форме равномерного распределения:

$$\rho_0(y_0 | x_0) = \Theta_{0,1}(y_0). \tag{30}$$

Тогда с учетом (30) соотношение (29) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \rho_n(y | x_0) &= \int_0^1 \delta(\{y_0 + [2x_0n + \gamma n^2] + \{2x_0n + \gamma n^2\}\} - y) \cdot 1 \cdot dy_0 = \\
 &= \int_0^1 \delta(\{y_0 + \{2x_0n + \gamma n^2\}\} - y) dy_0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Вводя переменную $\xi = y_0 + \{2x_0n + \gamma n^2\}$, $0 \leq y_0 < 1$, далее получим:

$$\begin{aligned}
 \rho_n(y | x_0) &= \int_{\{2x_0n + \gamma n^2\}}^{1+\{2x_0n + \gamma n^2\}} \delta(\{\xi\} - y) d\xi = \int_{\{2x_0n + \gamma n^2\}}^1 \delta(\{\xi\} - y) d\xi + \int_1^{1+\{2x_0n + \gamma n^2\}} \delta(\{\xi\} - y) d\xi = \\
 &= \int_1^1 \delta(\xi - y) d\xi + \int_1^{1+\{2x_0n + \gamma n^2\}} \delta(\xi - 1 - y) d\xi = \\
 &= \Theta_{\{2x_0n + \gamma n^2\}, 1}(y) + \Theta_{1, 1+\{2x_0n + \gamma n^2\}}(1+y) = \Theta_{\{2x_0n + \gamma n^2\}, 1}(y) + \Theta_{0, \{2x_0n + \gamma n^2\}}(y) = \Theta_{0,1}(y).
 \end{aligned} \tag{32}$$



(Учтено, что при $\xi < 1$ $[\xi] = 0$, $\{\xi\} = \xi - [\xi] = \xi$, а при $\xi > 1$ $[\xi] = 1$, $\{\xi\} = \xi - [\xi] = \xi - 1$).

Таким образом, в предположении о равномерности условного распределения начального значения Y_0 (при фиксированном x_0) условное распределение величины y_n на n -м шаге итераций будет также равномерным:

$$\rho_n(y | x_0) = \Theta_{0,1}(y) = 1, \quad y \in [0,1]. \quad (33)$$

В предположении и равномерности распределения начального значения x_0 безусловное распределение y_n также будет равномерным:

$$\rho_n(y) = \int_0^1 \rho_n(y | x_0) \rho_0(x_0) dx_0 = \Theta_{0,1}(y) = 1, \quad y \in [0,1]. \quad (34)$$

Исследуемое отображение (2) можно привести к симметричной записи по обоим компонентам, если во втором уравнении для компоненты y_n ввести «эффективное» значение параметра $\gamma_{эф}^{(n)} = \{2x_n + \gamma\}$, зависящее от шага итерации. Отображение (2) примет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = \{x_n + \gamma\}, \\ y_{n+1} = \{y_n + 2x_n + \gamma\} = \{y_n + \{2x_n + \gamma\}\} = \{y_n + \gamma_{эф}^{(n)}\}. \end{cases} \quad (35)$$

Интересно отметить, что при итерациях переменная x_n «управляет» положением точки разрыва итеративной функции для y_n : на каждом шаге итераций кусочно-линейная функция, задающая отображение, видоизменяется. Это свойство может быть использовано, например, в хаотических схемах кодирования информации.

Как уже отмечалось во введении, переход к вероятностному описанию динамических систем основан на рассмотрении динамических уравнений как стохастических, куда случайность вносится через начальные условия. Полученные результаты для отдельных компонент рассматриваемого отображения позволяют записать и двумерный инвариантный закон распределения $f_n(x, y)$ для случайного вектора (x_n, y_n) . Если начальное распределение компонент (x_0, y_0) задать в виде $f_0(x, y) = \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y)$, то x_0 и y_0 суть независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[0,1]$ Маргинальные законы получаются интегрированием по соответствующей координате:

$$\rho_0(x) = \int_0^1 f_0(x, y) dy = \int_0^1 \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y) dy = \int_0^1 \Theta_{0,1}(x) dy = \Theta_{0,1}(x); \quad (36)$$

$$\rho_0(y) = \int_0^1 f_0(x, y) dx = \int_0^1 \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y) dx = \int_0^1 \Theta_{0,1}(y) dx = \Theta_{0,1}(y). \quad (37)$$

Выше было показано, что одинаковыми распределениями в форме (36) и (37) будут в этом случае описывать все x_n и y_n :

$$x_n \stackrel{d}{=} x_0, \quad y_n \stackrel{d}{=} y_0. \quad (38)$$

Двумерные же плотности вероятности на n -м шаге итераций и инвариантная двумерная плотность распределения будут иметь соответственно вид

$$f_n(x, y) = \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y), \quad f(x, y) = \Theta_{0,1}(x) \cdot \Theta_{0,1}(y). \quad (39)$$

Если компоненты двумерного отображения заданы функциями

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n), \quad (40)$$

то соответствующий ОПФ вычисляется по правилу:

$$Pf(x, y) = \iint_{D(x,y)} f(x, y) \delta(x - \varphi_1(u, v)) \delta(y - \varphi_2(u, v)) dudv, \quad (41)$$

где $D(x, y)$ – двумерная область определения отображения. Отображение (40) осуществляет преобразование $D \rightarrow D$ (из области D в ту же область D), сохраняющее площадь. В самом деле, ОПФ определяет правило, по которому вероятностное распределение случайного вектора (X, Y) , где X и Y – координаты случайной точки $(X, Y) \in D$, трансформируется под действием преобразований



(40). Рассматривая случайную точку (X, Y) в качестве исходной, в результате преобразования (40) получим случайный вектор (\tilde{X}, \tilde{Y}) :

$$\tilde{X} = \varphi_1(X, Y), \quad \tilde{Y} = \varphi_2(X, Y). \quad (42)$$

Формально говоря, имеем систему четырех случайных величин $(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y})$, исчерпывающей вероятностной характеристикой которой служит четырехмерная плотность распределения $f_4(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})$. Интегрируя эту характеристику по всей области изменения переменных x и y , получим выражение для искомого дифференциального закона распределения $\tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$\tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \iint_{D(x,y)} f_4(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) dx dy. \quad (43)$$

Но, с другой стороны, совместная плотность распределения $f_4(x, y, \tilde{x}, \tilde{y})$, согласно общим закономерностям теории вероятностей, может быть представлена произведением исходного распределения $f_2(x, y)$ и условного распределения $f_c(\tilde{x}, \tilde{y} | x, y)$, определяющего вероятностное описание случайного вектора (\tilde{X}, \tilde{Y}) при условии, что компоненты вектора (X, Y) имеют некоторые детерминированные значения (x, y) :

$$f_4(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y) f_c(\tilde{x}, \tilde{y} | x, y). \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43), получим для искомого распределения:

$$\tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \iint_{D(x,y)} f(x, y) f_c(\tilde{x}, \tilde{y} | x, y) dx dy. \quad (45)$$

Но поскольку связь между координатами (x, y) и (\tilde{x}, \tilde{y}) является *сугубо детерминированной*, условная вероятность имеет вид (вырожденного распределения):

$$f_c(\tilde{x}, \tilde{y} | x, y) = \delta(\tilde{x} - \varphi_1(x, y)) \delta(\tilde{y} - \varphi_2(x, y)) \quad (46)$$

(символом δ обозначена дельта-функция Дирака). Поэтому в общем виде уравнение Перрона–Фробениуса для двумерных отображений имеет представление (41). Оно принимает вид функционального уравнения (т.е. в известном смысле упрощается) при рассмотрении конкретных отображений. В нашем случае функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ имеют вид (2):

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) = \{x_n + \gamma\}, & x_n \in (0, 1), \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n) = \{y_n + 2x_n + \gamma\}, & y_n \in (0, 1). \end{cases} \quad (47)$$

Поэтому двумерный ОПФ в этом случае записывается как

$$Pf(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(x - \{\xi + \gamma\}) \cdot \delta(y - \{\eta + 2\xi + \gamma\}) \cdot f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (48)$$

Вводя новые переменные

$$\bar{\xi} = \xi + \gamma, \quad 2\bar{\xi} = 2\xi + 2\gamma, \quad 2\bar{\xi} - \gamma = 2\xi + \gamma, \quad \xi = \bar{\xi} - \gamma,$$

получаем далее:

$$Pf(x, y) = \int_{\gamma}^{1+\gamma} \delta(x - \{\bar{\xi}\}) d\bar{\xi} \int_0^1 \delta(y - \{\eta + 2\bar{\xi} - \gamma\}) f(\bar{\xi} - \gamma, \eta) d\eta. \quad (49)$$

Дальнейшие преобразования проводятся на основе замены переменных $\bar{\eta} = \{2\bar{\xi} - \gamma\} + \eta$, $\bar{\eta} - \{2\bar{\xi} - \gamma\} = \eta$:

$$\begin{aligned} Pf(x, y) &= \int_{\gamma}^{1+\gamma} \delta(\{\bar{\xi}\} - x) d\bar{\xi} \int_{\{2\bar{\xi} - \gamma\}}^{1+\{2\bar{\xi} - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f_n(\bar{\xi} - \gamma, \bar{\eta} - \{2\bar{\xi} - \gamma\}) d\bar{\eta} = \\ &= \left(\int_{\gamma}^1 \delta(\{\bar{\xi}\} - x) d\bar{\xi} + \int_1^{1+\gamma} \delta(\{\bar{\xi}\} - x) d\bar{\xi} \right) \int_{\{2\bar{\xi} - \gamma\}}^{1+\{2\bar{\xi} - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f_n(\bar{\xi} - \gamma, \bar{\eta} - \{2\bar{\xi} - \gamma\}) d\bar{\eta}. \end{aligned} \quad (50)$$

Замечая, что на интервале $(\gamma, 1)$ $[\bar{\xi}] = 0$, $\{\bar{\xi}\} = \bar{\xi}$, а на интервале $(1, 1 + \gamma)$ $[\bar{\xi}] = 1$, $\{\bar{\xi}\} = \bar{\xi} - 1$, с учетом свойства дельта-функции получим из (50) далее:



$$\begin{aligned}
 Pf(x, y) &= \int_{\gamma}^1 \delta(\bar{\xi} - x) d\bar{\xi} \int_{\{2\bar{\xi} - \gamma\}}^{1 + \{2\bar{\xi} - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f(\bar{\xi} - \gamma, \bar{\eta} - \{2\bar{\xi} - \gamma\}) d\bar{\eta} + \\
 &+ \int_1^{1 + \gamma} \delta(\bar{\xi} - 1 - x) d\bar{\xi} \int_{\{2\bar{\xi} - \gamma\}}^{1 + \{2\bar{\xi} - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f(\bar{\xi} - \gamma, \bar{\eta} - \{2\bar{\xi} - \gamma\}) d\bar{\eta} = \\
 &= \Theta_{\gamma, 1}(x) \int_{\{2x - \gamma\}}^{1 + \{2x - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f(x - \gamma, \bar{\eta} - \{2x - \gamma\}) d\bar{\eta} + \\
 &+ \Theta_{0, \gamma}(x) \int_{\{2(1+x) - \gamma\}}^{1 + \{2(1+x) - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f(x + 1 - \gamma, \bar{\eta} - \{2(1+x) - \gamma\}) d\bar{\eta}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $\{2 + 2x - \gamma\} = \{2x - \gamma\}$, то далее получаем:

$$\begin{aligned}
 Pf(x, y) &= \Theta_{\gamma, 1}(x) \int_{\{2x - \gamma\}}^{1 + \{2x - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f(x - \gamma, \bar{\eta} - \{2x - \gamma\}) d\bar{\eta} + \Theta_{0, \gamma}(x) \int_{\{2x - \gamma\}}^{1 + \{2x - \gamma\}} \delta(\{\bar{\eta}\} - y) f(x + 1 - \gamma, \bar{\eta} - \{2x - \gamma\}) d\bar{\eta} = \\
 &= \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f(x - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f(x - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\}) + \\
 &+ \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f(x + 1 - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f(x + 1 - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\})
 \end{aligned}$$

(учтено, что при $0 \leq x < \gamma$ имеет место $1 \leq x + 1 < 1 + \gamma$; $1 - \gamma \leq x + 1 - \gamma < 1$, а при $0 \leq y < \{2x - \gamma\} - 1 \leq y + 1 < 1 + \{2x - \gamma\}$; $1 - \{2x - \gamma\} \leq y + 1 - \{2x - \gamma\} < 1$).

Таким образом, ОПФ для двумерного отображения (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
 Pf(x, y) &= \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f(x - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f(x - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\}) + \\
 &+ \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f(x + 1 - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f(x + 1 - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\}).
 \end{aligned} \tag{51}$$

Нестационарное уравнение Перрона–Фробениуса, соотношенное с двумерным отображением (1), на основании (51) имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(x, y) &= \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f_n(x - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f_n(x - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\}) + \\
 &+ \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f_n(x + 1 - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f_n(x + 1 - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\}).
 \end{aligned} \tag{52}$$

Стационарное же уравнение Перрона–Фробениуса, определяющее инвариантную плотность отображения, записывается как

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f(x - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{\gamma, 1}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f(x - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\}) + \\
 &+ \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{\{2x - \gamma\}, 1}(y) f(x + 1 - \gamma, y - \{2x - \gamma\}) + \Theta_{0, \gamma}(x) \Theta_{0, \{2x - \gamma\}}(y) f(x + 1 - \gamma, y + 1 - \{2x - \gamma\}).
 \end{aligned} \tag{53}$$

Непосредственно подстановкой в (53) можно убедиться, что неподвижной точкой ОПФ для исследуемого двумерного отображения является равномерное распределение, определенное на единичном квадрате:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0, 1) \\ 0, & (x, y) \notin [0, 1). \end{cases} \tag{54}$$

При этом и распределения координатных составляющих отображения (1) являются равномерными:

$$f(x, y) = \Theta_{0, 1}(x) \cdot \Theta_{0, 1}(y). \tag{53}$$



4. Автокорреляционные свойства орбит отображения

Рассчитаем автокорреляционную функцию «ведущей» компоненты рассматриваемого двумерного отображения (1):

$$x_{n+1} = \{x_n + \gamma\} = (x_n + \gamma) \bmod 1 = \begin{cases} x_n + \gamma, & 0 \leq x_n < 1 - \gamma, \\ x_n + \gamma - 1, & 1 - \gamma \leq x_n < 1, \end{cases} \quad (54)$$

где $\gamma \in (0,1)$ – иррациональное число. Точное решение для хаотического отображения (2.54) имеет вид

$$x_n = \{x_0 + n\gamma\}, \quad (55)$$

так что для шага $n+k$ будем иметь

$$x_{n+k} = \{x_0 + n\gamma + k\gamma\} = \{x_n + k\gamma\}. \quad (56)$$

Представление (56) будем использовать при вычислении смешанного момента

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \overline{x_n \cdot \{x_n + \{k\gamma\}\}}, \quad (57)$$

в свою очередь выходящего в выражение для автокорреляционной функции орбиты (траектории) отображения (56):

$$R(k) = \overline{x_n \cdot x_{n+k}} - \overline{x_n} \cdot \overline{x_{n+k}} = \overline{x_n \cdot \{x_n + \{k\gamma\}\}} - \overline{x_n} \cdot \overline{\{x_n + \{k\gamma\}\}}, \quad (58)$$

где $\overline{x_n}$ и $\overline{x_{n+k}}$ – средние значения фазовой переменной отображения на n -м и $(n+k)$ -м шаге итераций. В выражениях (57) и (58) усреднение должно проводиться по плотности вероятности $f_n(x)$, отвечающей n -му шагу итераций. Выражения для $f_n(x)$ определяют ОПФ (17) и решение нестационарного уравнения Перрона–Фробениуса (23). Как было показано выше, если распределение стартовой точки является инвариантным (т. е. в нашем случае равномерным), то инвариантным (равномерным) являются распределения для всех шагов итераций (см. формулу (23)). В общей записи (при отличии $f_n(x)$ от инвариантного распределения) получим для смешанного момента (57):

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \overline{x_n \cdot \{x_n + \{k\gamma\}\}} = \int_0^1 x \{x + \{k\gamma\}\} f_n(x) dx. \quad (59)$$

Вводя в (59) новую переменную по правилу

$$x + \{k\gamma\} = \xi, \quad x = \xi - \{k\gamma\}, \quad dx = d\xi,$$

получим далее:

$$\begin{aligned} \overline{x_n \cdot x_{n+k}} &= \int_{\{k\gamma\}}^{\{k\gamma\}+1} (\xi - \{k\gamma\}) \{\xi\} f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi = \\ &= \int_{\{k\gamma\}}^1 (\xi - \{k\gamma\}) \{\xi\} f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi + \int_1^{\{k\gamma\}+1} (\xi - \{k\gamma\}) \{\xi\} f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь при $\{k\gamma\} \leq \xi < 1$ $\{\xi\} = \xi$, а при $1 \leq \xi < 1 + \{k\gamma\}$ $\lfloor \xi \rfloor = 1$, $\{\xi\} = \xi - 1$. Поэтому выражение для смешанного момента и автокорреляционной функции примут соответственно вид

$$\overline{x_n \cdot x_{n+k}} = \int_{\{k\gamma\}}^1 \xi (\xi - \{k\gamma\}) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi + \int_1^{\{k\gamma\}+1} (\xi - \{k\gamma\}) (\xi - 1) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} R(k) &= \int_{\{k\gamma\}}^1 \xi (\xi - \{k\gamma\}) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi + \int_1^{\{k\gamma\}+1} (\xi - \{k\gamma\}) (\xi - 1) \cdot f_n(\xi - \{k\gamma\}) d\xi - \\ &\quad - \int_0^1 \xi f_n(\xi) d\xi \int_0^1 \{\xi + \{k\gamma\}\} f_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (61)$$

поскольку средние значения, исчисленные в сечениях n и $n+k$, определяются как

$$\overline{x_n} = \int_0^1 x f_n(x) dx, \quad \overline{x_{n+k}} = \int_0^1 \{x + \{k\gamma\}\} f_n(x) dx. \quad (62)$$

Представления (60) – (62) справедливы для любого распределения стартовой точки отображения (54). Дальнейшие упрощения можно провести, считая начальное распределение инвариантным (равномерным). В этом случае для смешанного момента получим следующее выражение:



$$\begin{aligned} \overline{x_n \cdot x_{n+k}} &= \int_{\{k\gamma\}}^1 (\xi^2 - \{k\gamma\} \cdot \xi) d\xi + \int_1^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\})(\xi - 1) d\xi = \\ &= \int_{\{k\gamma\}}^{1+\{k\gamma\}} (\xi^2 - \{k\gamma\} \xi) d\xi - \int_1^{1+\{k\gamma\}} (\xi - \{k\gamma\}) d\xi = \frac{\xi^3}{3} - \{k\gamma\} \cdot \frac{\xi^2}{2} \Big|_{\{k\gamma\}}^{1+\{k\gamma\}} - \left(\frac{\xi^2}{2} - \{k\gamma\} \cdot \xi \right) \Big|_1^{1+\{k\gamma\}} = \\ &= \frac{(1+\{k\gamma\})^3}{3} - \{k\gamma\} \cdot \frac{(1+\{k\gamma\})^2}{2} - \frac{(\{k\gamma\})^3}{3} + \{k\gamma\} \cdot \frac{(\{k\gamma\})^2}{2} - \\ &- \left(\frac{(1+\{k\gamma\})^2}{2} - \{k\gamma\} \cdot (1+\{k\gamma\}) - \frac{1}{2} + \{k\gamma\} \right) = \frac{1}{2} \left(\{k\gamma\}^2 - \{k\gamma\} + \frac{2}{3} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Соответственно среднее значения фазовой переменной на любом шаге итераций равно

$$\overline{x_p} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \quad (64)$$

Объединяя (63) и (64), для автокорреляционной функции орбит отображения (54) в случае распределения стартовой точки по инвариантному закону окончательно получим:

$$R(k) = \frac{1}{2} \{k\gamma\}^2 - \frac{1}{2} \{k\gamma\} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(\{k\gamma\}^2 - \{k\gamma\} + \frac{1}{6} \right). \quad (65)$$

Поведение автокорреляционной функции зависит от значения иррационального параметра γ . Покажем, что, во-первых, знак автокорреляционной функции может меняться от итерации к итерации и, во-вторых, на некоторых шагах итерации возможно полное «расщепление» корреляций в динамической системе (54), т. е. есть обращение $R(n)$ в ноль. В самом деле, вводя обозначение $z = \{k\gamma\}$ (фигурные скобки, напомним, применены для операции взятия дробной части числа), условие обращения автокорреляционной функции в ноль на основании (65) можно записать в виде квадратного уравнения:

$$f(z) = z^2 - z + \frac{1}{6} = 0. \quad (66)$$

Корни уравнения (66) действительны и принадлежат отрезку (0,1):

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}. \quad (67)$$

Следовательно, для любого значения параметра γ возможно осуществление смены знака значения автокорреляционной функции орбиты траектории отображения (54) с течением итераций. Минимальное (причем, отрицательное) значение функция (66) (и тем самым автокорреляционная функция орбит) принимает в точке $z_{\min} = 1/2 : f(z_{\min}) = -1/12$. Максимальные (и положительные) значения функция (66) принимает на границах единичного отрезка: $f(0) = f(1) = 1/6$.

Заключение

Рассмотрено двумерное отображение И. М. Акулиничева, определяемое выделением дробных частей двух алгебраических выражений. При преобразованиях точки квадрата переводятся в область этого же квадрата, при этом сохраняется лебегова мера – площадь квадрата. Математически данное отображение задает операция взятия дробных частей от линейной и квадратической функций.

Аналитически выявлены (с учетом результатов [2]) следующие характеристики и свойства отображения:

точные траекторные решения для точек двумерного отображения как по координате x , так и в области квадрата $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

наличие полугрупповых свойств у изучаемого отображения;

нестационарное и стационарное уравнения Перрона–Фробениуса для отображения, образованного x -компонентой исходного двумерного отображения;

решения нестационарного и стационарного уравнений Перрона–Фробениуса для x -компоненты исходного двумерного отображения, что является доказательством существования инвариантной меры в виде равномерного распределения (эргодичности отображения);



одинаковая (равномерная) распределенность координат x_n отображения в случае распределения начального значения x_0 по равномерному закону;

условная и безусловная плотности вероятности, характеризующие случайное поведение y -координаты исходного двумерного отображения;

нестационарное и стационарное уравнения Перрона-Фробениуса для исследуемого двумерного отображения;

инвариантная мера для двумерного отображения в виде равномерного распределения на квадрате, а также по y -координате;

автокорреляционная функция для траектории движения точки по x -координате, что позволяет аналитически оценить характер статистической зависимости точек траектории в процессе итераций: эта зависимость имеет колебательный характер, при этом существуют алгебраические иррациональные точки $\{k\gamma\}$, отвечающие некоторому шагу итераций k , при котором происходит «расщепление» корреляций ($R(k) = 0$).

Результаты представляют интерес для теории динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, теории чисел и функционального анализа, поскольку содержат элементы решения спектральной задачи для двумерного линейного несамосопряженного оператора Перрона-Фробениуса [3–6], что актуально для оценки скорости расщепления корреляций в исследуемой динамической системе [1, 7–8].

Прикладные возможности результатов связаны с применением отображения в имитационных экспериментах в качестве генератора псевдослучайных точек на единичном квадрате, а также при решении задач криптографической защиты данных, поскольку параметр для y -компоненты отображения меняется с каждой итерацией, что является дополнительной алгоритмической защитой против несанкционированного раскодирования данных [9,10].

Список литературы

1. Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
2. Акулиничев И. М. О динамической системе, связанной с распределением дробных долей многочлена второй степени // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 3. С. 503–505.
3. Голубенцев А. Ф., Аникин В. М., Аркадакский С. С. О некоторых свойствах оператора Перрона – Фробениуса для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67–73.
4. Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С. Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Там же. 2006. Т. 14, № 2. С. 16–34.
5. Аникин В. М., Ремизов А. С., Аркадакский С. С. Собственные функции и числа оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Там же. 2007. Т. 15, № 2. С. 62–75.
6. Аникин В. М. Спектральные задачи для оператора Перрона – Фробениуса // Там же. 2009. Т. 17, № 4. С. 35–48.
7. Аникин В. М., Чебаненко С. В. Аналитический расчет корреляционных функций дискретных хаотических сигналов // Гетеромагнитная микроэлектроника. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 8. С. 103–109.
8. Аникин В. М., Муштаков А. В. Автокорреляционная функция орбит кусочно-линейного хаотического отображения общего вида // Там же. 2014. Вып. 17. С. 12–23.
9. Аникин В. М., Чебаненко С. В. Хаотические отображения и кодирование информации : модификации исторически первого алгоритма // Там же. 2011. Вып. 9. С. 81–95.
10. Аникин В. М., Ноянова С. А., Чебаненко С. В. Кодирование информации на базе отображения пекаря // Там же. 2012. Вып. 12. С. 52–60.



К 70-ЛЕТИЮ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА (СГУ)

УДК 53(091), 53(092), 378.4

НАУЧНАЯ ШКОЛА ПЕТРА НИКОЛАЕВИЧА ЛЕБЕДЕВА И САРАТОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. М. Аникин

Саратовский государственный университет
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Приводятся сведения о роли научной школы П. Н. Лебедева в становлении физической науки и физического образования в Саратовском государственном университете имени Н. Г. Чернышевского (СГУ), этапах развития физического факультета СГУ, юбилейных мероприятиях 2015 года.

Ключевые слова: Саратовский государственный университет, физический факультет.

Scientific P. N. Lebedev's School and Saratov University

V. M. Anikin

Some data about the role of scientific school by Prof. P. N. Lebedev in the formation of physical science and physical education at Saratov State University, stages of development of Physics Faculty and anniversary events in 2015 are presented.

Key words: Saratov State University, Physical Faculty.

Физические науки и профессиональное физическое образование в Саратове стали развиваться с момента учреждения Саратовского университета в 1909 г. Вот основные исторические вехи на этом пути:

1909 – создание кафедры физики;

1914 – открытие Физического института;

1917 – организация физико-математического факультета;

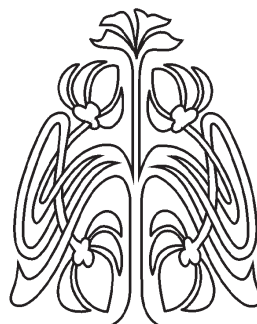
1928 – проведение в Большой физической аудитории заседания «передвижного» 6-го всесоюзного съезда физиков с участием будущих отечественных и зарубежных нобелевских лауреатов;

1945 – организация физического факультета как отдельного структурного подразделения университета;

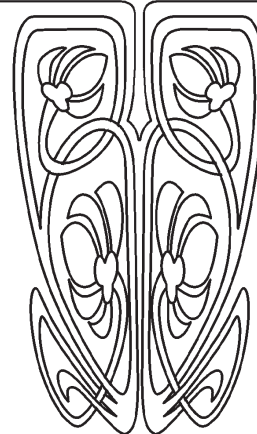
1994 – открытие «дочернего» факультета – нелинейных процессов (до 2000 г. функционировал как Колледж прикладных наук на правах факультета);

2005 – открытие «дочернего» факультета – нано- и биомедицинских технологий.

2012 – проведение в Большой физической аудитории заседания «передвижного» (по маршруту съезда физиков 1928 г.) XX Международного симпозиума «Наноструктуры: физика и технология», руководимого лауреатом Нобелевской премии Ж. И. Алфёровым.



УНИВЕРСИТЕТСКАЯ
ЛЕТОПИСЬ



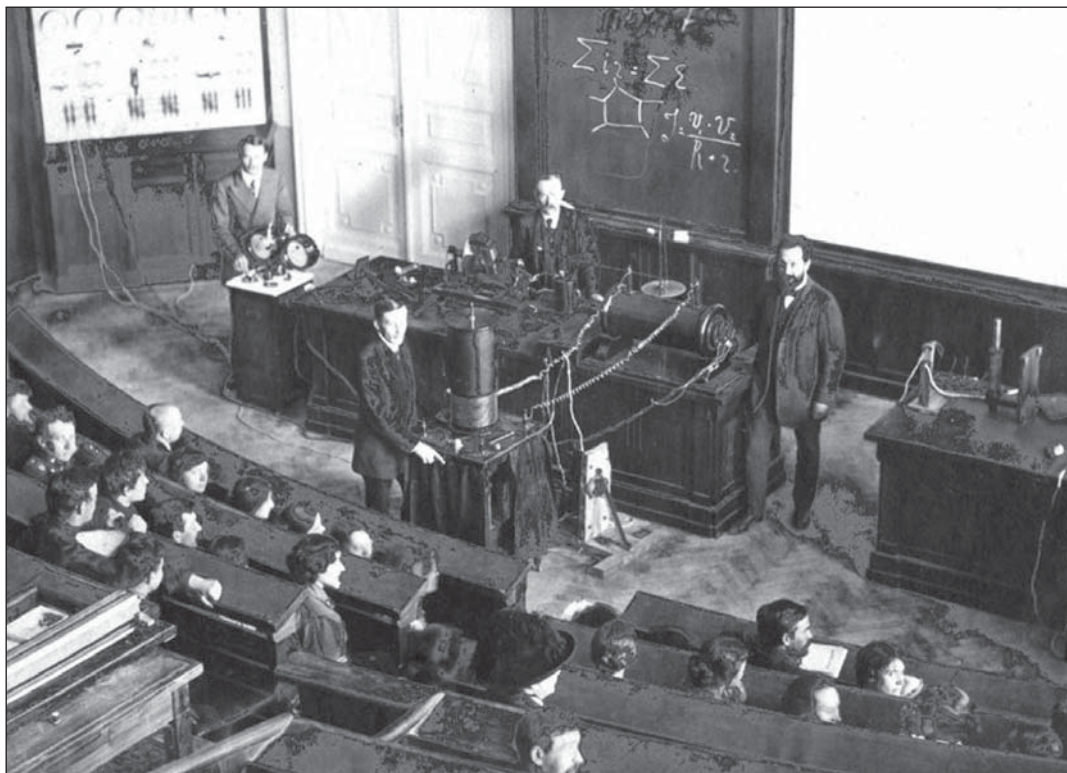


Можно гордиться, что у истоков нашего физического факультета стоял выдающийся русский физик Пётр Николаевич Лебедев, приобретший мировое признание благодаря проведенным им тонким экспериментам по световому давлению, подтвердившим правильность фундаментальной теории электромагнетизма Дж. Максвелла.

Вплоть до своей смерти в 1912 г. Пётр Николаевич оказывал свою авторитетную поддержку новому университету. В 1909 г. в числе первых семи профессоров Саратовского университета по рекомендации П. Н. Лебедева был утвержден его ученик Владимир Дмитриевич Зёрнов (памятная доска с его портретом укреплена на фасаде Физического института – третьего учебного корпуса университета, строительство которого завершилось в 1914 г.). Зёрнов занимал посты первого заведующего кафедрой физики и первого директора Физического института, первого декана физико-математического факультета, ректора университета. Вместе с ним в Саратов приехали другие представители первой российской физической научной школы П. Н. Лебедева – Николай Павлович Неклепаев, Владимир Ефимович Сребницкий и Константин Александрович Леонтьев, оставившие свой след в истории отечественной физики и истории становления физического

образования в Саратове. Под руководством П. Н. Лебедева Неклепаев и Сребницкий выполнили научные исследования по акустике, которые были отмечены (как, впрочем, и работа В. Д. Зёрнова) престижной для начала прошлого века научной премией имени В. П. Мошнина в области физики и химии, «распорядителем» которой являлось Общество любителей естествознания, антропологии и этнографии при Московском университете.

Постановка первых работ в физическом практикуме Саратовского университета и экспериментальные демонстрации на лекциях – заслуга еще одного сотрудника физического факультета Московского университета Ивана Максимовича Серебрякова, бывшего механика в практикуме профессора Алексея Петровича Соколова. Всех названных людей, работавших на факультете в первые годы его существования, запечатлел снимок, сделанный в 1914 г. на лекции по физике в Большой физической аудитории. Крайний справа – исполняющий должность экстраординарного профессора В. Д. Зёрнов, на переднем плане, рядом с трансформатором Н. Теслы, – ассистент Н. П. Неклепаев, у доски – лаборант В. Е. Сребницкий, крайний слева – лаборант И. М. Серебряков.



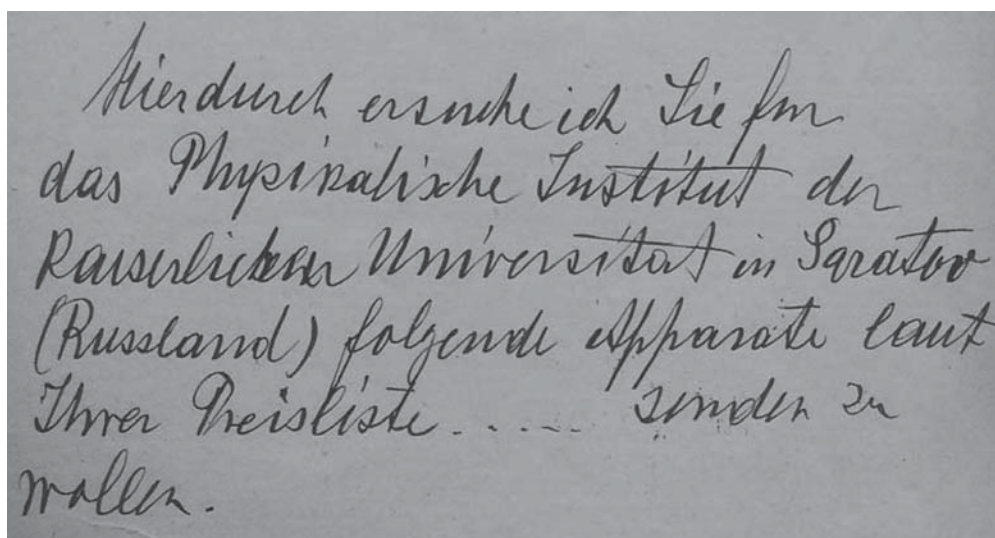
1914 г. На лекции по физике в Большой физической аудитории



В 1918–1921 гг. в Саратове на физико-математическом факультете работал профессор Московского университета физик-теоретик Сергей Анатольевич Богуславский.

В музее физических приборов и лекционных демонстраций физического факультета как символ научно-образовательной эстафеты поколений хранится записная книжка с автографом П. Н. Лебедева, которую он подарил В. Д. Зёрнову с надписью: «Профессору В. Д. Зёрнову для умеренности и аккуратности от друга – П. Лебедева. Москва. 19.VIII.09». Чтобы подчеркнуть, что имя Петра Николаевича в истории физического факультета упомянуто не ради красного словца, добавим еще два факта. Лебедев не только неоднократно рекомендовал Зёрнова

на должность профессора университета, но и постоянно консультировал его по различным вопросам, в частности по вопросу строительства корпуса Физического института [1, 2] и приобретению лабораторного оборудования. Так, вслед за дарственной надписью в упомянутой записной книжке следует написанная Лебедевым форма обращения к зарубежной фирме; заказ Лорху и Шмидту на станки и оборудование мастерской сделаны под его диктовку и, отчасти, прямо его рукой [3]. А в день официального открытия Саратовского университета, 6 (19) декабря 1909 г., Лебедев прислал Зёрнову телеграмму: «Приветствую нарождающийся Физический институт. Желаю ему расти большим, иметь силы, много успешно работать» [3].



Ученики П. Н. Лебедева задали хороший старт научным исследованиям, которые впоследствии привели к формированию разнообразных образовательных и научных направлений на факультете. Стали развиваться радиофизика, теоретическая физика, оптика, физика полупроводников, вакуумная и твердотельная электроника, радиотехника [4].

Эти направления поддерживаются и сегодня на новом качественном научном и техническом уровне [5]. Их кадровую базу составляют прежде всего научные школы, созданные ведущими учеными факультета, – Валерием Викторовичем Тучиным в области оптики, лазерной физики и биомедицинской фотоники [6, 7] и Вадимом Семеновичем Анищенко в области радиофизики и нелинейной динамики [8]. Отмечен Государ-

ственной премией в области науки и техники вклад Николая Ивановича Синицына в разработку биомедицинской аппаратуры. За внедрение прогрессивных компьютерных технологий при сооружении длиннопролетных мостов премия Правительства Российской Федерации в области науки и техники присуждена Владимиру Иванову Наянову. В последние годы международную известность получила деятельность коллектива, возглавляемого Ольгой Евгеньевной Глухой, в области теоретических основ современных нанотехнологий.

Безусловно, славу факультета составляют и научно-образовательные школы кафедр, прежде входивших в состав физического факультета, а ныне составляющие ядро «дочерних» факультетов. Это научная школа по вакуумной электро-



нике СВЧ члена-корреспондента РАН Дмитрия Ивановича Трубецкого и научная школа по твердотельной электронике Дмитрия Александровича Усанова [9].

Мировой уровень университетских научно-образовательных школ физического профиля характеризуют издание монографий и учебников в ведущих международных издательствах, публикации научных статей в авторитетных журналах, приглашения с пленарными докладами на представительные международные конференции, присуждение научных премий, поддержка исследований многочисленными грантами, широкая сеть ведущих отечественных и зарубежных научных и образовательных центров, в которых либо работают выпускники физического факультета, либо с которыми поддерживаются многолетние научные связи.

70-летие со дня образования физического факультета в 2015 году будет отмечено, прежде всего, рядом научных мероприятий. В их число входят научные и научно-методические конференции, проводимые в Саратовском университете.

Апрель–май 2015 года: проведение научно-методической конференции «Воспитательный потенциал инновационной образовательной среды» и традиционной студенческой научной конференции.

Сентябрь 2015 года:

Международная научная конференция «3rd International Symposium on Optics and Biophotonics (Saratov Fall Meeting 2015)»;

Международная молодежная научная школа «19th International School for Junior Scientists and Students on Optics, Laser Physics and Biophysics (Saratov Fall Meeting 2015)»;

Международная научная конференция «The 7th Finnish-Russian Photonics and Laser Symposium, PALS'15».

В научной библиотеке СГУ будет организована юбилейная выставка, на которой будут представлены материалы, посвященные событиям из истории факультета и людям, которые формировали его лицо.

Планируется издание монографии «Феномен научной школы: история, типология получения

и передачи знаний, психология коммуникаций», приуроченной одновременно (так совпали события) и к 70-летию юбилею факультета, и к 150-летию со дня рождения Петра Николаевича Лебедева.

Статьи, посвященные событиям и людям, делавшим историю физического факультета, опубликованы в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика» за 2014 год [10–13] (см. также библиографию к [5]).

Торжественное заседание ученого совета физического факультета по случаю юбилея состоится в конце октября 2015 г.

Список литературы

1. Зёрнов В. Д. Физический институт Императорского Николаевского университета в Саратове // Изв. Саратов. ун-та. Нов. Сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 59–64.
2. Игнатъев А. А., Данке О. Г. Как строился главный корпус саратовских физиков // Там же. Вып. 2. С. 72–75.
3. Зёрнов В. Д. Учитель и друг // Вопросы истории естествознания и техники. 2004. № 4. С. 143–149.
4. Аникин В. М. «Приобретать умение делать физические измерения и исследования» : к 100-летию физического образования и физической науки в Саратове // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 53–58.
5. Аникин В. М. Физический факультет в XXI веке // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 65–71.
6. Аникин В. М. Валерий Викторович Тучин (к 70-летию со дня рождения) // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 87–90.
7. Синичкин Ю. П. Кафедра оптики : люди и свет // Там же. Вып. 2. С. 76–78.
8. Аникин В. М. Вадим Семенович Анищенко (к 70-летию со дня рождения) // Там же. Вып. 1. С. 83–86.
9. Аникин В. М. Дмитрий Александрович Усанов (к 70-летию со дня рождения) // Там же. Вып. 1. С. 79–82.
10. Усанов Д. А. Большая Физическая : лучшая из лучших // Там же. Вып. 1. С. 76.
11. Роках А. Г. Третий корпус : Пятидесятые – начало шестидесятых годов XX века // Там же. Вып. 1. С. 77–78.
12. Голубков П. В. Константин Александрович Леонтьев // Там же. Вып. 1. С. 65–68.
13. Дмитриев Б. С. Петр Васильевич Голубков. Страницы биографии в контексте истории физического факультета и университета // Там же. Вып. 1. С. 69–75.

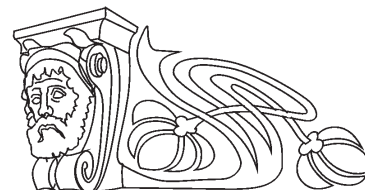


УДК 620.22:620.3

СУБЛИМИРОВАННЫЕ ФОТОПРОВОДЯЩИЕ ПЛЕНКИ ТИПА CdS: ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОСТЬ

А. Г. Роках

Саратовский государственный университет
E-mail: rokakhag@mail.ru



Приводится краткая история исследований в Саратовском университете и в СССР физических свойств сублимированных фотопроводящих пленок типа CdS, сыгравших заметную роль в развитии исследований фотоэлектрических явлений, для которых сульфид кадмия служил модельным веществом. Добавление к сульфиду кадмия сульфида свинца позволило увеличить быстродействие пленок и стойкость к деградации. На сублимированных пленках типа CdS обнаружены и исследованы поверхностный фотоемкостный эффект, фотоиндуктивный эффект, вторично-ионный фотоэффект и дана теоретическая модель аномального экранирования электрического поля (увеличение глубины проникновения электрического поля с ростом легирования).

Ключевые слова: фотопроводящие пленки, сульфид кадмия, сульфид кадмия-свинца, ограниченный твердый раствор, фотоемкостный эффект, вторично-ионный фотоэффект, аномальное экранирование, широкозонная и узкозонная фазы, стойкость к деградации, плазменный резонанс.

Sublimated Photoconductive Films of CdS Type: History and Modernity

A. G. Rokakh

Brief history is given of the physical properties study at Saratov University and in the USSR of sublimated photoconducting films of CdS type that plays a prominent role in photoelectric researches, for which the cadmium sulfide served as a model substance. An addition of lead sulfide to cadmium sulfide has increased the speed of photoresponse and the resistance to degradation. Upon the sublimated films of CdS type it was discovered and studied the surface photocapacitive effect, photoinductive effect, secondary-ion photo effect and given a theoretical model of anomalous electric field screening (increase the depth of an electric field penetration on the doping growth of semiconductor).

Key words: photoconductive films, cadmium sulphide, cadmium-lead sulphide, limited solid solution, photocapacitive effect, secondary-ion photo effect, abnormal screening, wide-gap and narrow-gap phases, resistance to degradation, plasma resonance.

Введение

Фотоэлектрические исследования полупроводников тесно примыкают к оптическим, точнее, относятся к оптоэлектронным методам. В основе их функционирования лежит явление фотопроводимости – разновидности внутреннего фотоэффекта.

Внутренний фотоэффект был открыт в 1873 г. английским инженером У. Смитом на аморфном селене. Вероятно, первыми фото-

проводящими пленками, получившими широкое применение, были пленки сульфида свинца, полученные еще до Второй мировой войны (в СССР – Б. Т. Коломиец) и использованные в военных целях благодаря их чувствительности в ближней инфракрасной области спектра. Все вышеупомянутые пленки были аморфными или поликристаллическими.

По-видимому, наиболее простым методом получения фотопроводящего слоя является намазывание на подложку порошка соответствующего вещества с добавками, улучшающими его фотоэлектрические свойства, с последующим отжигом (спеканием), увеличивающим плотность и придающим полупроводниковые свойства, одним из которых является фотопроводимость. Описанную или подобную ей процедуру можно отнести к толстопленочной технологии. Однако электрический контакт легче осуществить с сублимированной в вакууме пленкой, что особенно важно в режиме продольной фотопроводимости.

Сублимат-фосфоры

Широко распространенными предшественниками фотопроводящих пленок были пленки люминофоров, в особенности катодолюминофоров [1], в частности на основе ZnS-CdS. Среди них были и пленки, нанесенные сублимацией в вакууме (сублимат-фосфоры). Из слоев люминофоров впоследствии стали изготавливать экспериментальные образцы электролюминесцентных ячеек для создания электролюминофоров и усилителей света системы фотопроводник–электролюминофор для визуализации ближнего инфракрасного света. Как показали наши исследования, при наличии отрицательной фотопроводимости такая система позволяла получать негативное изображение.

Сульфид кадмия как модельное вещество

В 1946 г. Р. Фрерикс приготовил листообразные монокристаллы CdS [2], которые получили распространение как фотопроводящие среды,



в частности в киевском Институте полупроводников АН УССР. Президент Академии наук ГДР Карл Бёер назвал сульфид кадмия модельным веществом для фотоэлектрических исследований [3]. Поводом для такого названия послужила широкая запрещенная зона сульфида кадмия (2.4 эВ при комнатной температуре), которая позволяла производить основные исследования свойств без специального охлаждения [4].

Вакуумные методы получения фотопроводящих пленок

Для получения тонких металлических и полупроводниковых пленок стали использоваться вакуумные методы, в первую очередь испарение (сублимация) и катодное распыление. Для регулирования толщины использовалось изменение скорости напыления и расстояния подложки от источника.

Одними из первых в СССР сублимированные фотопроводящие пленки CdS были получены в Саратовском университете. Начало было положено В. А. Носовой в конце 1950-х гг., работавшей под руководством З. И. Кирьяшкиной. Эти пленки предназначались для детектирования электронов средних энергий [5] в работе, которая выполнялась, как мы узнали уже потом, в связи с готовившимся полетом человека в космос. Эти пленки обладали и фотопроводимостью. В то время работы по катодопроводимости на монокристаллах селенида кадмия проводились в Кишиневском университете [6].

Добавки значительных количеств хлоридов металлов, прежде всего меди, позволили существенно увеличить фотопроводимость (автором статьи было получено первое в СССР авторское свидетельство на изобретение, не подлежавшее опубликованию в открытой печати). Это дало основание профессору В. Б. Сандомирскому на Всесоюзной конференции в Ташкенте назвать нас пионерами фотопроводящих пленок этого типа в СССР. Статьи в «Украинском физическом журнале» [7], доклад диссертационной работы автора этих строк на заседании ученого совета Института полупроводников АН УССР под председательством академика АН УССР В. Е. Лашкарева в 1964 г., а также предоставление сотрудникам этого института образцов пленок стимулировали распространение исследований фотопроводящих пленок типа CdS по Украине в 1960-х гг. Следует отметить, что наличие хлоридов металлов в испаряемом порошке при-

водило и к влажочувствительности пленочных образцов, что позволило создать на их основе датчик влажности воздуха, отличавшийся малой инерционностью, поскольку толщина пленки была достаточно мала (1 мкм) [8].

В 1964 г. в НИИ ПФ (г. Москва) состоялось межведомственное совещание, на котором обсуждалась возможность разработки отечественной промышленностью фотоэлектрических экспонетров для фото- и киноаппаратуры. Автор этих строк сделал там доклад о технологии и характеристиках сублимированных пленок CdS-CdSe. Выбор тогда был сделан в пользу толстопленочной технологии (пульверизацией суспензии) по японскому образцу. Промышленный выпуск осуществлял завод «Кварц» в г. Черновцы.

Пленки CdS, полученные по нашему методу, обладали значительной кратностью изменения сопротивления (5 порядков величины) и некоторой остаточной проводимостью (фотопамятью). Впервые о пленках селенида кадмия с фотопамятью сообщил И. А. Карпович с соавторами [9]. Практически одновременно работы по исследованию фотопамяти, главным образом на CdS, были развернуты в Киеве под руководством М. К. Шейнкмана [10]. Благодаря легированию хлоридами щелочных металлов фотопамять в пленках CdS была улучшена в Саратовском университете (В. Ф. Названов с соавторами).

Существует несколько способов вакуумного нанесения фотопроводящих пленок, которые можно свести к трем основным: 1) испарение в открытом объеме; 2) испарение в квазизамкнутом объеме (метод горячих стенок); 3) катодное (ионно-плазменное) распыление. Мы начинали с первого метода, а впоследствии использовали все три. Второй метод успешно развивали К. В. Шалимова с соавторами в Московском энергетическом институте, изготавливая пленки типа CdS для оптических исследований [11]. Впоследствии подобный метод был использован в Киевском институте полупроводников для изготовления фотопроводящих пленок (С. В. Свечников, Э. Б. Каганович).

И. П. Калинкиным (Технологический институт им. Ленсовета, Ленинград) была развита технология монокристаллических пленок соединений A^2B^6 на ориентирующих слюдяных подложках из фторфлогопита [12], а также гетеропереходов на основе этих соединений совместно с А. В. Симашкевичем с соавторами (Кишиневский университет) [13].



Изучение технологических, фотоэлектрических, оптических характеристик и катодопроводимости пленок типа CdS были подытожены в книге [14].

Полевой транзистор на пленке типа CdS работал в режиме обогащения канала, что потребовало теоретического обоснования, которое показало наличие аномального экранирования электрического поля в квазиоднополярном полупроводнике [15], заключающееся в проникновении электрического поля глубже в более легированный фотопроводник (в определенном диапазоне концентраций основных носителей заряда).

Фотопроводящие пленки CdS-PbS

В конце 1970-х гг. прошлого столетия круг твердых растворов на основе сульфида кадмия был расширен за счет сульфида свинца. В отличие от исследовавшихся нами ранее твердых растворов CdS-CdSe, новые растворы были ограниченными, как, впрочем, и исследовавшийся ранее CdS-CdTe. При этом наибольшая растворимость наблюдалась со стороны PbS. В такой пленке существовали две фазы: широкозонная (твердый раствор со стороны сульфида кадмия) и узкозонная (со стороны сульфида свинца).

По сравнению с пленками CdS, пленки сульфида кадмия-свинца обладали рядом новых свойств: меньшая инерционность фотоответа, линейность и сверхлинейность люкс-амперной характеристики, стойкость к деградации, в частности к радиации [16, 17]. Высокая стойкость к радиации привлекла к себе внимание. С помощью НПО «Орион» (г. Москва) наши пленки побывали в космическом пространстве и хорошо выдерживали ионизирующее излучение ближнего космоса.

При исследовании состава таких пленок на масс-спектрометре обнаружилось довольно странное поведение: при освещении белым светом выход вторичных ионов кадмия в вакуум уменьшался, а ионов свинца увеличивался. Систематическое исследование влияния света на выход положительных ионов началось в конце XX столетия. Была установлена причина различного поведения ионов кадмия и свинца, связанная с разным пространственно-энергетическим положением, которое эти элементы занимают в гетерофазном материале CdS-PbS [18, 19].

В гетерофазном фотопроводнике на основе сульфида кадмия-свинца существует дополнительный, по сравнению с CdS, канал рекомбинации неравновесных (созданных светом)

носителей заряда. Он связан с уходом неравновесных носителей на стоки, роль которых играют вкрапления узкозонной фазы. С этим связано отсутствие фотопамяти в ограниченных твердых растворах указанного типа.

Пленки CdS-PbS готовятся по меньшей мере четырьмя способами: испарением спеченной смеси порошков сульфида кадмия и сульфида свинца; катодным распылением смеси сульфидов; добавлением свинца в пленку сульфида кадмия, например методом Ленгмюра-Блуджетт (С. В. Стецюра, Е. Г. Глуховской с соавторами [20]); химическим осаждением [21]. Пока надежные исследования по стойкости к деградации и радиационной стойкости существуют только для пленок, полученных сублимацией в вакууме.

На пленках типа сульфида кадмия проведен большой цикл фотоэлектрических исследований, связанный с продольной фотопроводимостью, фотодиэлектрическим (фотоемкостным, фотоимпедансным) эффектом, фотоиндуктивным эффектом [22], поверхностным фотоемкостным эффектом. Это позволило предложить новую классификацию фотодиэлектрических эффектов и сформулировать противоречие, возникающее при исследовании широкозонных полупроводников: альтернатива глубокий уровень – коллективный барьер [23], развитие которого привело к объяснению ионного фотоэффекта. На основе пленок типа CdS были созданы фотопроводящие среды для моделирования геологических пластов в геофизике с теоретическим обоснованием такой возможности [24].

На сублимированных пленках CdS-PbS, как и ранее на пленках селенида и сульфоселенида кадмия, исследовался плазменный резонанс носителей заряда в средней инфракрасной области, связанный с нескомпенсированным избытком кадмия, типичным для этих химических соединений [25]. Высокая проводимость на оптической частоте сочеталась с низкой проводимостью на постоянном токе. Аналогия с вторично-ионным фотоэффектом позволила предположить возможность получения фотоприемника на плазменном резонансе для средней инфракрасной области спектра, работающего при комнатной температуре.

Оценка фотоэлектрических параметров пленок CdS-PbS

На основании полученных экспериментальных данных был проведен расчет основных параметров фотопроводника, таких как



подвижность μ , время жизни τ и коэффициент фотоэлектрического усиления G , а также относительная заполненность уровней захвата n_t/n . При этом решалась система из четырех уравнений, выражающих соответственно закон токов j , ограниченных пространственным зарядом (ТОПЗ), связь времени фотоответа $\tau_{\text{ф.о}}$ и времени жизни, связь фототока I со скоростью генерации F (второе характеристическое соотношение фотопроводимости) и связь фотоэлектрического усиления G с параметрами фотопроводника:

$$j = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu V^2}{L^3} \cdot \frac{n}{n_t}, \quad (1)$$

$$\tau_{\text{ф.о}} = \tau \left(1 + \frac{n_t}{n} \right), \quad (2)$$

$$I = qGF, \quad (3)$$

$$G = \frac{\tau\mu V}{L^2}. \quad (4)$$

Время фотоответа $\tau_{\text{ф.о}}$ определялось из результатов измерений частотных характеристик фотопроводимости по формуле:

$$\tau_{\text{ф.о}} = \sqrt{\frac{I_1^2 - I_2^2}{(2\pi f_2 I_2)^2 - (2\pi f_1 I_1)^2}}, \quad (5)$$

где I_1, I_2 – фототоки при соответствующих частотах модуляции f_1 и f_2 .

Интенсивность фотовозбуждения F в объеме V фотопроводника запишется как

$$F = fSL = \alpha\beta\Phi SL = \alpha\beta V \cdot \frac{P}{h\nu}, \quad (6)$$

где f – скорость генерации носителей заряда в единице объема, α – коэффициент оптического поглощения, β – квантовая эффективность (среднее число фотоносителей, приходящихся на один фотон), Φ – интенсивность освещения (число фотонов, падающих в единицу времени на единичную площадь фотопроводника), S – площадь контактов фоторезистора, L – расстояние между контактами, P – мощность освещения, $h\nu$ – энергия падающего кванта.

Результаты расчетов приведены в таблице.

Параметры фотопроводящих пленок CdS(0.9)-PbS(0.1)

Режим	Длина волны λ , нм	Время фотоответа $\tau_{\text{ф.о}}$, мс	Время жизни τ , мс	Фотоэлектрическое усиление G	Подвижность μ , см ² /В·с
Поперечный	400	0.12	0.018	296	9.7
	530	0.11	0.059	4803	49
	800	0.03	0.019	1.4	0.41
Продольный	400	0.07	0.029	536	2.8
	530	0.04	0.033	4863	37
	800	0.01	0.006	6.44	0.26
Полевой ($U_3 = -3\text{В}$)	400	0.14	0.006	624	3.7
	530	0.06	0.013	8438	58
	800	0.04	0.004	7.16	1

Обычно тонкопленочные транзисторы на сульфиде кадмия (транзисторы с изолированным затвором) обнаруживают наибольшую крутизну при положительном смещении на затворе, что соответствует отрицательному смещению канала. При этом радиус экранирования может возрастать с ростом концентрации свободных носителей. В рассматриваемом в данной работе случае наибольшее управление и наибольший ток (в цепи исток–сток) достигается при отрицательном смещении на затворе. В отсутствие

подзатворного диэлектрика это соответствует инжекции отрицательного заряда в канал полевого транзистора. Об инжекции основных носителей заряда свидетельствуют вольт-амперные характеристики образца, измеренные при различных схемах включения.

Кроме того, обогащение слоя основными носителями может вызывать активацию центров чувствительности (центров класса 2) вследствие повышения квазиуровня Ферми для электронов.



Инжекция носителей заряда из контактов приводит к понижению сопротивления участков образца, включенных последовательно с фазой, возбуждаемой монохроматическим излучением. Понижаются и потенциальные барьеры на границах отдельных фаз многофазной системы, которая представляет собой пленочный гетерофазный полупроводник с составом исходной шихты (в весовых долях) CdS(0.9)-PbS(0.1), нанесенный на стеклянную подложку методом сублимации в вакууме. Понижение потенциальных барьеров приводит к росту фотоэлектрического усиления и эффективной подвижности основных носителей заряда (фотоносителей) в соответствии с представлениями, описанными А. Я. Шиком. Отметим также, что в проведенных расчетах предполагалось численное равенство подвижности эффекта поля и дрейфовой подвижности.

Таким образом с помощью приведенной выше системы уравнений удается преодолеть основную трудность в определении параметров фотопроводника – разделить подвижность и время жизни фотоносителей, которые входят в главный параметр фотопроводника – фотоэлектрическое усиление – в виде произведения¹.

Заключение

Создание поликристаллических гетерофазных сред более воспроизводимых и однородных, чем монокристаллы, позволило провести изучение различных проявлений фотопроводимости, а стойкость к деградации, особенно к радиации, сулят новые возможности применения в технике. Наличие на поверхности пленок CdS-PbS островков узкозонной фазы типа квантовых точек еще ждет своего исследователя. На пленках типа CdS наблюдается ряд новых физических явлений:

– аномальное экранирование электрического поля – более глубокое проникновение электрического поля в полупроводник с большей концентрацией носителей заряда, позволившее объяснить экспериментальные результаты Ваймера и Шалкросса по тонкопленочным транзисторам, имеющим большую крутизну при работе в режиме обогащения канала [15];

– поверхностный фотоемкостный эффект [23];

– фотоиндуктивный эффект [23];

– вторично-ионный фотоэффект [20].

¹ Автор выражает благодарность студентам-дипломникам Л. Махониной и К. Разумихину за помощь в проведении необходимых экспериментов и расчетов.

В настоящем обзоре приведен лишь краткий список публикаций, не включающий ряд отечественных и зарубежных статей и около 40 изобретений.

Благодарности

Перечисленные исследования были бы невозможны без участия сотрудников, ряд которых перечислен в ссылках в качестве соавторов публикаций. Всем им автор выражает глубокую благодарность. Большинство из них входило в научную группу «Фотоэлектрические и радиационные явления в полупроводниках», оформленную в 1964 г. при кафедре физики твердого тела (заведующая кафедрой Зинаида Ивановна Кирьяшкина) и вошедшую впоследствии в состав НИИ механики и физики СГУ.

Список литературы

1. Москвин А. В. Катодолюминесценция : в 2 ч. Ч. 1. Общие свойства явления. М. ; Л., 1948.
2. Frerichs R. // Naturwissenschaften. 1946. Bd. 33. S. 281.
3. Boeer K.W. Cadmium Sulfide as a Model for Photoelectric Researches // Wissen. Z. Humboldt-Univ. Math.-Nat. R. Berlin, 1958/1959. Bd. VIII.
4. Георгобиани А. Н. Широкозонные полупроводники A^2B^6 и перспективы их применения // УФН. 1974. Т. 113, вып. 5. С. 129–155.
5. Свердлова А. М., Роках А. Г. Влияние облучения электронами средних энергий на проводимость пленок полупроводников // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1964. Т. 28, № 9. С. 1514–1515.
6. Кот М. В., Симашкевич А. В. Поперечная катодопроводимость кристаллов и тонких слоев некоторых соединений A^2B^6 // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 7, вып. 9. С. 1672.
7. Кирьяшкина З. И., Носова В. А., Роках А. Г. О получении фоточувствительных пленок сернистого кадмия с помощью легирования // Укр. физ. журн. 1964. Т. 9, вып. 6. С. 664.
8. Кирьяшкина З. И., Роках А. Г., Волчанин Е. Н. О влиянии влаги на проводимость пленок CdS с примесью CdCl₂ // Укр. физ. журн. 1964. Т. 9, вып. 3. С. 342.
9. Карпович И. А., Омаров А. М., Звонков Б. Н. Эффект поля в фоточувствительных слоях CdSe // ФТП. 1960. Т. 2, вып. 2. С. 153.
10. Шейнкман М. К., Маркевич И. В., Хвостов В. А. Модель остаточной проводимости в полупроводниках и ее параметры в CdS : Ag : Cl // ФТП. 1971. Т. 5, вып. 10. С. 1904.
11. Шалимова К. В., Травина Т. С., Резвый Р. Р. // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, вып. 2. С. 234.
12. Калинин И. П., Муравьева К. К. Эпитаксия соединений A^2B^6 // Электролюминесцирующие пленки : сб. ст. Тарту, 1972. С. 7.



13. Калинин И. П., Алесковский В. Б., Симашкевич А. В. Эпитаксиальные пленки соединений A^2B^6 . Л., 1978.
14. Кирьяшкина З. И., Роках А. Г., Кац Н. Б., Малков В. П., Новикова Е. А., Цукерман Н. М. Фотопроводящие пленки (типа CdS). Саратов, 1979.
15. Баранов Л. И., Гаманюк В. Б., Роках А. Г., Юдович М. В. // ФТП. 1976. Т. 10, вып. 10. С. 1953–1955.
16. Роках А. Г., Кумаков А. В., Елагина Н. В. Гетерогенный фотопроводник на основе CdS-PbS // ФТП. 1979. Т. 13, вып. 4. С. 787–790.
17. Роках А. Г. Варизонная модель полупроводника стойкого к деградации // Письма в ЖТФ. 1984. Вып. 13. С. 820–824.
18. Роках А. Г., Жуков А. Г., Сердобинцев А. А., Стецюра С. В. Особенности вторичной ионной масс-спектрометрии полупроводникового образца при освещении // Физика полупроводников и полупроводниковая электроника. Саратов, 2001. С. 56.
19. Роках А. Г., Матасов М. Д. Парадоксы фотопроводящей мишени и влияние спектрального состава света на выход вторичных ионов // ФТП. 2010. Т. 44, вып. 1. С. 101–108.
20. Стецюра С. В., Глуховской Е. Г., Козловский А. В., Мальяр И. В. Создание ультратонкого источника примеси для снижения радиационных потерь фоточувствительных пленок CdS // ЖТФ. 2015. Т. 85, вып. 5. С. 116–122.
21. Маскаева Л. Н., Марков В. Ф., Китаев Г. А. Синтез пленок твердых растворов $Cd_xPb_{1-x}S$ осаждением из водных сред в динамических условиях // ЖПХ. 2000. Т. 73, вып. 5. С. 709–711.
22. Алимцев В. Н., Баранов Л. И., Роках А. Г. Об индуктивных свойствах квазимонополярных полупроводников // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18, вып. 12. С. 2567.
23. Роках А. Г. Фотоэлектрические явления в полупроводниках и диэлектриках. Саратов, 1984. С. 152.
24. Грищенко В. Л., Малков В. П., Пронин В. П., Роках А. Г. Модели с фотопроводящей средой для решения уравнений эллиптического типа // ЖТФ. 1975. Т. 45, вып. 2. С. 425.
25. Роках А. Г., Биленко Д. И., Шишкин М. И., Скапцов А. А., Вениг С. Б., Матасов М. Д. Оптические спектры пленок CdS-PbS и возможность фотоэффекта в среднем инфракрасном диапазоне // ФТП. 2014. Т. 48, вып. 12. С. 1602–1606.



СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Аникин Валерий Михайлович – Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (СГУ), физический факультет, профессор, декан; базовая кафедра компьютерной физики и метаматериалов физического факультета СГУ в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, зав. кафедрой. E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Безручко Борис Петрович – Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (СГУ), факультет нано- и биомедицинских технологий, профессор; базовая кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, зав. кафедрой; Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, ведущий научный сотрудник. E-mail: bezruchkobp@gmail.com

Ишбулатов Юрий Михайлович – Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (СГУ), факультет нано- и биомедицинских технологий, базовая кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, старший лаборант. E-mail: ishbulatov95@mail.ru

Караваев Анатолий Сергеевич – Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (СГУ), факультет нано- и биомедицинских технологий, базовая кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, доцент; Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, старший научный сотрудник. E-mail: karavaevas@gmail.com

Кузнецов Сергей Петрович – Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, факультет нелинейных процессов, профессор; Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, зав. лабораторией теоретической нелинейной динамики; Университет Потсдама (Германия), Группа статистической физики и теории хаоса, приглашенный исследователь. E-mail: spkuz@rambler.ru

Пономаренко Владимир Иванович – Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (СГУ), факультет нано- и биомедицинских технологий, базовая кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор; Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, ведущий научный сотрудник. E-mail: romomarenkovi@gmail.com

Прохоров Михаил Дмитриевич – Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, доцент, зав. лабораторией СФ-6 моделирования в нелинейной динамике. E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Роках Александр Григорьевич – Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, факультет нано- и биомедицинских технологий, кафедра физики полупроводников, профессор. E-mail: rokakhag@sgu.ru

Яфаров Равиль Кяшшафович – Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, факультет нано- и биомедицинских технологий, кафедра физики твердого тела, профессор; Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор. E-mail: pirpc@yandex.ru



INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anikin Valery Michailovich – Saratov State University (SSU), Physical Faculty, Professor, Dean; Base Department of Computational Physics and Metamaterials of Physical Faculty at Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Head. E-mail: AnikinVM@info.gu.ru

Bezruchko Boris Petrovich – Saratov State University (SSU), Faculty of Nano- and Biomedical Technology, Professor; Base Department of Dynamical Modeling and Biomedical Engineering of Faculty of Nano- and Biomedical Technologies at Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Head; the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Leading Researcher. E-mail: bezruchkobp@gmail.com

Ishbulatov Yury Mikhailovich – Saratov State University (SSU), Faculty of Nano- and Biomedical Technology, Base Department of Dynamical Modeling and Biomedical Engineering of Faculty of Nano- and Biomedical Technologies at Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Senior Laboratory Assistant. E-mail: ishbulatov95@mail.ru

Karavaev Anatoly Sergeevich – Saratov State University (SSU), Faculty of Nano- and Biomedical Technology, Base Department of Dynamical Modeling and Biomedical Engineering of Faculty of Nano- and Biomedical Technologies at Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Associate Professor; Saratov Branch of Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Senior Researcher. E-mail: karavaevas@gmail.com

Kuznetsov Sergey Petrovich – Saratov State University (SSU), Faculty of Nonlinear Processes, Professor; Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Laboratory of Theoretical Nonlinear Dynamics, Head; University of Potsdam (Germany), Statistical Physics and Theory of Chaos Group, Visiting Researcher. E-mail: spkuz@rambler.ru

Ponomarenko Vladimir Ivanovich – Saratov State University (SSU), Faculty of Nano- and Biomedical Technology, Base Department of Dynamical Modeling and Biomedical Engineering of Faculty of Nano- and Biomedical Technologies at Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Professor; Saratov Branch of Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Laboratory of Modelling in Nonlinear Dynamics, Leading Researcher. E-mail: ponomarenkovi@gmail.com

Prokhorov Mikhail Dmitrievich – Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Assistant Professor, Laboratory of Modelling in Nonlinear Dynamics, Head. E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Rokakh Alexander Grigorievich – Saratov State University, Faculty of Nano- and Biomedical Technology, Department of Semiconductor Physics, Professor. E-mail: rokakhag@sgu.ru

Yafarov Ravil Kyashafovich – Saratov State University, Faculty of Nano- and Biomedical Technologies, Department of Solid Body Physics, Professor; Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences (RAS), Professor. E-mail: pirpc@yandex.ru



Подписка на II полугодие 2015 года (3 выпуска)

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36015,
раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки».
Журнал выходит 4 раза в год.

Подписка оформляется по заявочным письмам
непосредственно в редакции журнала.

Заявки направлять по адресу:

410012, Саратов, Астраханская, 83.

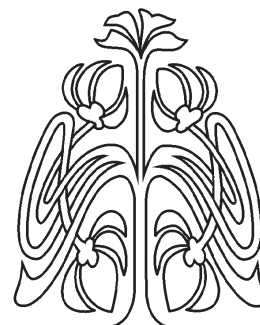
Редакция журнала «Известия Саратовского университета».

Новая серия».

Тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-85; факс (845-2) 27-85-29;

e-mail: fizika.sgu@bk.ru

Каталожная цена одного выпуска 250 руб.



ПОДПИСКА

