Представляя его решение в виде $f = F\exp(i\varphi)$, получим уравнения для амплитуды (модуля) F и фазы φ:

$$
\begin{aligned}
&(2\varphi' F' + \varphi'' F)t + 2\varphi' F = 0\\
&t^4\left[F'' - (\varphi')^2 F\right] + 2t^3 F' + \left[\left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-2} q^2 l(l+1) + t^2\left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-1}\right] l(l+1)F = 0.
\end{aligned}
\qquad (\text{П}2)
$$

Первое уравнение для фазы интегрируется и дает $\varphi' = \mathrm{const}/F^2t^2$, где значение константы определяется через значение модуля $F(t = 0) = F_0$ (т.е. при $r \to \infty$): $\mathrm{const} = F_0^2 q l(l+1)$. Подставляя полученное решение во второе уравнение (П2), получим уравнение для F:

$$
t^4 F'' + 2t^3 F' + \left[\left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-2} q^2 l(l+1) + t^2\left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-1}\right] l(l+1)F = \frac{\mathrm{const}^2}{F^3}, \qquad (\text{П}3)
$$

которое можно исследовать только численно. Результаты численного анализа этого уравнения показывают, что $F(t)$ слабо меняется на интервале $0 < t < 1$ и выходит на постоянное значение при $t \to 1$. Численную оценку вариации $F(t)$ при $t \sim 1$ можно получить, оценивая величину производной dF/dr на масштабах порядка r_s. Согласно расчетам $dF/dr \cdot r_s \sim 10^{-5}$ для $F_0 = 1$, $F_0' = 0$, $q = 10^{-8}$, $l = 2$.

УДК 538.56:519.25

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СТАЦИОНАРНОСТИ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, ИМЕЮЩЕГО В СВОЕЙ СТРУКТУРЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ШУМ С ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭРЛАНГА ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ПАРАМЕТРЫ, СВЯЗАННЫЕ ПРОПОРЦИЕЙ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

О. Л. Сироткин

«ОКБ Приборостроения», Саратов
E-mail: maxbor111@gmail.com

Целью данной работы является исследование условий существования стационарных моментов случайного процесса, динамика которого описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка с флуктуациями одного из коэффициентов в виде немарковского дихотомического шума, имеющего произвольное время корреляции. Показано, что реализация стационарности моментов зависит от того, будут или нет параметры динамической системы и дихотомического шума связаны пропорцией золотого сечения.

Ключевые слова: золотое сечение, распределение Эрланга, принцип двойственности, уравнения Колмогорова.

Investigating Stationary Conditions for Moments of Stochastic Process, Driven by Multiplicative Dichotomous Noise and Featuring Erlang First-order Distribution Function, Conditions Related by Golden Ratio

O. L. Sirotkin

Conditions for the existence of stationary moments of a stochastic process, satisfying a linear differential stochastic first-order equation, comprising a coefficient, subjected to non-Markov dichotomous noise fluctuations with an arbitrary correlation time, are investigated. It is shown that the existence of stationary moments is related to the golden ratio tying the parameters of the dynamic system and dichotomous noise.

Key words: golden section, Erlang distribution, duality principle, Kolmogorov equations.

Введение

Поиск законов гармонии в исследуемых процессах составляет одну из интересных задач физики. Как правило, эта идея связана с понятием золотого сечения, т.е. числами $0{,}5(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}6180$ или $0{,}5(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}6180$.

Р. Фейман обнаружил, что золотая пропорция даёт минимальное энергетическое состояние молекулы бутадиена [1]. В области термодинамики, цикл Карно, максимальное значение коэффициента полезного действия холодильной и тепловой машины одновременно равно 0,6180 [2]. В теории электрослабых взаимодействий есть отношения, совпадающие с золотым сечением [3].

В статистической физике [4] результатов подобного рода нет, что и послужило поводом для проведения данной работы.

1. Постановка задачи

Здесь будет рассматриваться, как наиболее часто встречающееся, простейшее линейное стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка в прямых производных с одним случайным коэффициентом. Уравнения такого рода можно найти в задачах статистической радиофизики [5], а также при исследовании процессов рождения и гибели (генерационно-рекомбинационные) частиц некоторого вида: молекулы в случае химических реакций, электроны, фотоны, бактерии в биологических популяциях [6]. Таким образом, решается модельная задача, которая имеет широкий спектр применений.

Принципиальным моментом данного исследования является представление случайного характера изменения коэффициента исходного уравнения в виде немарковского дихотомического шума, имеющего в своей структуре функцию распределения Эрланга и произвольное время корреляции. Как известно, телеграфный сигнал к гауссовским процессам не относится, что требует применения специальных методов решения поставленной здесь задачи. Далее будет сделана попытка объяснения выбора фактора случайности именно в такой форме с точки зрения привлечения понятия «двойственности», как причины, следствием которой является пропорция золотого сечения.

Одними из важнейших физических понятий являются «энергия» и «мощность». Исходя из этого, здесь, в частности, будет вычислено среднеквадратичное значение, которое определяет интенсивность и служит мерой средней мощности, несомой выборочной функцией исследуемого случайного процесса.

Цель состоит в том, чтобы получить замкнутые уравнения для моментов, решения которых будут иметь стационарный или нестационарный режим в зависимости от того, связаны или нет параметры нашей задачи пропорцией золотого сечения. В результате мы определим класс случайных процессов, встречающихся в прикладных исследованиях и содержащих указанную пропорцию.

2. Исходная модель стохастического процесса

Рассмотрим макроскопическую систему с динамикой развития согласно уравнению

$$\frac{d}{dt}N(t) = \gamma(t)N(t) + a, \qquad N(0) = 0.$$

Для конкретности будем придерживаться обычной интерпретации этого уравнения. Согласно ей величина $N(t)$ соответствует случайной численности заселённости некоторого состояния, γ – параметр роста, т.е. разность между скоростями генерирования и рекомбинации частиц произвольной природы, a – интенсивность увеличения их числа за счет внешнего источника, иммиграция. Внешняя среда воздействует на систему через параметр γ, который становится случайной функцией времени. Представим $\gamma(t)$ в виде двух слагаемых, т.е. $\gamma(t) = h + \sigma I(t)$, где h соответствует среднему состоянию параметра роста, $I(t)$ – дихотомический шум, $\sigma I(t)$ описывает флуктуации $\gamma(t)$ относительно h с интенсивностью σ. Очевидно, что если средняя скорость рекомбинации равна средней скорости генерирования – своеобразное динамическое равновесие когда параметр $h = 0$, изменение численности $N(t)$ в детерминированном случае $\sigma = 0$ происходит только за счёт иммиграции, т.е. параметра a.

Итак, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}N(t) = -h \cdot N(t) + \sigma N(t)I(t) + a, \qquad (1)$$

где $h = \mu - \lambda$, μ – интенсивность гибели, λ – интенсивность рождаемости. Принимается $\mu \geq \lambda, \sigma > 0$.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы определить безусловные плотности вероятности парного процесса $(N(t)I(t))$ и вычислить при их помощи второй момент $\overline{N^2}(t)$.

3. Уравнения Колмогорова для безусловных плотностей вероятности парного процесса $(N(t)I(t))$ и следующий из них второй момент $\overline{N^2}(t)$ в марковском варианте $I(t)$

Как известно, если $I(t)$ является марковским процессом, эволюция которого описывается уравнениями для плотностей вероятности $Q_{\pm}(t) = Q(I(t) = j \in \pm 1)$ вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, Q_+(t) = \alpha_2 Q_-(t) - \alpha_1 Q_+(t), \\ \dfrac{d}{dt}\, Q_-(t) = \alpha_1 Q_+(t) - \alpha_2 Q_-(t), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\alpha_{1,2}$ – средние частоты переходов между уровнями „± 1”, парный процесс $(N(t)I(t))$ тоже марковский и его безусловные плотности вероятностей

$$P_{\pm}(x,t) = P(N(t) \in (x, x + dx); \quad I(t) = j \in \pm 1)$$

подчиняются уравнениям [7, 8]

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P_+(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\{(a-(h-\sigma)x)P_+(x,t)\} - \alpha_1 P_+(x,t) + \alpha_2 P_-(x,t),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\,P_-(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\{(a-(h+\sigma)x)P_-(x,t)\} - \alpha_2 P_-(x,t) + \alpha_1 P_+(x,t)\,. \quad (3)$$

Структура системы (3) следующая. Процесс $I(t)$ флуктуирует независимо от $N(t)$, поэтому изменение $P_\pm(x,t)$ за время Δt обусловлено двумя отдельными причинами, которые в первом порядке по являются аддитивными. Таким образом, уравнения для $P_\pm(x,t)$ состоят из двух частей: первые слагаемые в правой части (3) описывают эволюцию $N(t)$ при фиксированном значении $I(t)$, а вторые и третьи отвечают за эволюцию $I(t)$ согласно системе (2), с заменой $Q_\pm$ на $P_\pm$.

Определим частные среднеквадратичные как

$$\overline{x_\pm^2}(t) = \int\limits_0^\infty x^2\cdot P_\pm\,(x,t)dx. \quad (4)$$

Следуя (4), умножим уравнения системы (3) на x и проинтегрируем результат в пределах $[0,\infty)$. С учетом соотношений

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}P_\pm\,(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}x^2 P_\pm\,(x,t) - 2xP_\pm\,(x,t),$$
$$x^3\frac{\partial}{\partial x}P_\pm\,(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}x^3 P_\pm\,(x,t) - 3xP_\pm\,(x,t)$$

получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\,\overline{x_+^2}(t) = 2a\overline{x_+}(t) - (2h-2\sigma+\alpha_1)\overline{x_+^2}(t) + \alpha_2\overline{x_-^2}(t),\\ \dfrac{d}{dt}\,\overline{x_-^2}(t) = 2a\overline{x_-}(t) - (2h+2\sigma+\alpha_2)\overline{x_-^2}(t) + \alpha_1\overline{x_+^2}(t).\end{cases} \quad (5)$$

В образах по Лапласу с параметром s и начальными условиями $\overline{x_+^2}(0) = \overline{x_-^2}(0) = 0$ из (5) находим

$$\overline{x_+^2}(s) = \frac{2a(s+d)}{f_2(s)}\cdot\overline{x_+}(s) + \frac{2a\alpha_2}{f_2(s)}\cdot\overline{x_-}(s),$$
$$\overline{x_-^2}(s) = \frac{2a\alpha_1}{f_2(s)}\cdot\overline{x_+}(s) + \frac{2a(s+b)}{f_2(s)}\cdot\overline{x_-}(s)\,, \quad (6)$$

где

$$d = \alpha_2 + 2(h+\sigma),$$
$$f_2(s) = s^2 + (\alpha_1+\alpha_2+4h)s + 2\alpha_1(h+\sigma) + $$
$$+ 2\alpha_2\,(h-\sigma) + 4(h^2-\sigma^2\,),$$
$$b = \alpha_1 + 2(h-\sigma).$$

Интерес представляют не совместные вероятности для переменной состояния x и флуктуирующего параметра, а плотность вероятности только переменной состояния, т.е. $\mathrm{P}(x,t)$. Очевидно, что

$$\mathrm{P}(x,t)=\mathrm{P}_+\,(x,t) + \mathrm{P}_-(x,t).$$

В этом случае, согласно (4) имеем:

$$\overline{x^2}(s) = \overline{x_+^2}(t) + \overline{x_-^2}(t)$$

и из (6) находим

$$\overline{x^2}(s) = \frac{2a(s+d)+2a\alpha_1}{f_2(s)}\,\overline{x_+}(s) + $$
$$+ \frac{2a(s+b)+2a\alpha_2}{f_2(s)}\,\overline{x_-}(s). \quad (7)$$

Далее необходимо вычислить первые моменты $\overline{x}_\pm\,(s)$.

4. Первые моменты $x_\pm(s)$ и условие их стационарности

Кроме того, что $\overline{x}_\pm\,(s)$ входят в выражение для $\overline{x^2}(s)$ они представляют самостоятельный интерес, так как содержат пропорцию золотого сечения. Далее будет рассматриваться модель с симметричным телеграфным сигналом.

Определив частные средние в виде

$$\overline{x_\pm}(t) = \int\limits_0^\infty x\cdot P_\pm\,(x,t)dx; \quad \overline{x}(t) = \overline{x_+}(t) + \overline{x_-}(t)\,,$$

из (3) находим:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\overline{x_+}(t) = a\cdot Q_+ - (h-\sigma+\alpha_1)\overline{x_+}(t) + \alpha_2\overline{x_-}(t),\\ \dfrac{d}{dt}\overline{x_-}(t) = a\cdot Q_- - (h+\sigma+\alpha_2)\overline{x_-}(t) + \alpha_1\overline{x_+}(t),\end{cases} \quad (8)$$

где $Q_+ = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} \qquad Q_- = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$.

При выводе (8), как и в случае системы (3), считалось, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{d}{dx}xP_\pm(x,t)dx = 0\,, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{d}{dx}x^2P_\pm(x,t)dx = 0$$

в силу быстрого убывания $P_\pm(x,t)$ при $x = +\infty$. В образах по Лапласу с параметром s и начальными условиями $\overline{x_+}(0) = \overline{x_-}(0) = 0$ из (8) получаем систему

$$\begin{cases}(s+\tilde{b})\overline{x_+}(s) - \alpha_2\cdot\overline{x_-}(s) = a\cdot s^{-1}Q_+\,,\\ -\alpha_1\cdot\overline{x_+}(s) + (s+\tilde{d})\overline{x_-}(s) = a\cdot s^{-1}Q_-\,,\end{cases} \quad (9)$$

где $\tilde{b} = \alpha_1 + h - \sigma$; $\tilde{d} = \alpha_2 + h + \sigma$.
Решение (9) при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ даёт частные средние $\overline{x}_{\pm}(s)$ и соответственно $\overline{x}(s)$:

$$\overline{x}(s) = \frac{a(s + 2\alpha + h)}{s[s^2 + 2(\alpha + h)s + \sigma^2(z^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma}z - 1)]},$$

где $z = h \cdot \sigma^{-1}$. Стационарное значение первого момента существует, если по теореме Гурвица для многочленов второй степени $2(\alpha + h) > 0$, что всегда выполняется, и

$$z^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma}z - 1 > 0. \quad (10)$$

Когда $\alpha = 2^{-1}\sigma$, из (10) следует неравенство

$$z^2 + z - 1 > 0.$$

Положительный корень уравнения $z^2 + z - 1 = 0$ есть $z_1 = 0{,}6180$ – величина, обратная золотому сечению 1,6180. Если $z = 0{,}62$, то $z^2 + z - 1 > 0$ – стационарный режим $\overline{x}$ есть. Если $z = 0{,}6$, то $z^2 + z - 1 < 0$ – стационарного режима $\overline{x}$ нет.

Таким образом, при условии $h > 0{,}6180\sigma$ полюса функции $s\overline{x}(s)$ расположены в левой части комплексной s-плоскости, что позволяет найти стационарное значение первого момента:

$$\overline{x} = \lim_{s\to 0} s \cdot \overline{x(s)} = \frac{a(2\alpha + h)}{\sigma^2(z^2 + z - 1)}.$$

Пропорция золотого сечения содержится в знаменателе $\overline{x}$.

5. Стационарное значение среднеквадратичного и условия его реализации с учётом выражений для частных средних $\overline{x_{\pm}}(s)$

После вычисления из системы (9) частных средних $\overline{x}_{\pm}(s)$ и подстановки их в (7) промежуточные выкладки опускаем, находим замкнутое выражение для среднеквадратичного:

$$\overline{x^2}(s) = \frac{a^2 \cdot \{2s^2 + 2(4\alpha + 3h)s + 4\sigma^2 \cdot (z^2 + 3\frac{\alpha}{\sigma}z + 2\frac{\alpha^2}{\sigma^2} + 1)\}}{s\left\{s^2 + 2(\alpha + 2h)s + 4\sigma^2\left(z^2 + \frac{\alpha}{\sigma}z - 1\right)\right\}\left\{s^2 + 2(\alpha + h)s + \sigma^2\left(z^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma}z - 1\right)\right\}}.$$

Далее нас будут интересовать корни уравнений

$$s^2 + 2(\alpha + 2h)s + 4\sigma^2\left(z^2 + \frac{\alpha}{\sigma}z - 1\right) = 0,$$

$$s^2 + 2(\alpha + h)s + \sigma^2\left(z^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma}z - 1\right) = 0.$$

Очевидно, что стационарный режим среднеквадратичного реализуется, если эти корни имеют отрицательную действительную часть. По теореме Гурвица такой вариант существует при условиях $\alpha + 2h > 0$ и $\alpha + h > 0$, что всегда имеет место, и

$$\begin{aligned} &z^2 + \frac{\alpha}{\sigma}z - 1 > 0, \\ &z^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma}z - 1 > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пропорция золотого сечения следует из (11) при условии $\alpha = \sigma$. В этом случае имеем $z^2 + z - 1 > 0$, $z^2 + 2z - 1 > 0$. Первое неравенство выполняется, когда $z > 0{,}6180$. Положительный корень уравнения $z^2 + 2z - 1 = 0$ есть $z \approx 0{,}4142$. Второе неравенство выполняется, когда $z > 0{,}4142$ и тем более при $z > 0{,}6180$. Таким образом, если $\alpha = \sigma$, стационарное значение $\overline{x^2}(t)$ существует при условии $h > 0{,}6180\sigma$ и имеет следующий вид:

$$\overline{x^2} = \lim_{s\to 0} s \cdot \overline{x^2}(s) = \frac{a^2(z^2 + 3z + 3)}{\sigma^2(z^2 + z - 1) \cdot (z^2 + 2z - 1)}.$$

Пропорция золотого сечения содержится в знаменателе $\overline{x^2}$.

6. Гипотеза двойственности и следующая из неё модель дихотомического шума

В данной статье, чтобы получить уравнение золотого сечения, принималось $\alpha = \sigma$ или $\alpha = 2^{-1}\sigma$. Эти допущения можно не делать, если изменить модель дихотомического шума.

Обратимся к связанной с золотым сечением концепции двойственности [9], понимая под этим присутствие в модели некоторой системы или процесса, состоящих из двух неразрывно связанных частей, которые взаимно определяют и дополняют друг друга. Поясним сказанное на примере цикла Карно [2]. Тепловые и холодильные машины можно считать двойственными, так как они переходят друг в друга при обращениях идеального цикла Карно. Максимальное значение коэффициента полезного действия холодильной и тепловой машины одновременно равно 0,6180. В нашем случае представление о двойственности определяется тем, что дихотомический шум имеет два состояния, т.е. ±1. Этого, однако, не достаточно и пришлось предполагать связь между параметрами α и σ. Допустим, что два состояния остаются, но функция распределения времени жизни шума $I(t)$ в *„–1”* задаётся согласно закону Эрланга первого порядка, а в *„+1”* остаётся экспоненциальное распределение, как для обычного марковского варианта. Корреляционная функция такого телеграфного сигнала осциллирует во времени [10], и он, следовательно, относится к случайным процессам со скрытой периодичностью, т.е. состоит одновременно из двух частей – детерминированной и случайной. Известны и другие модели стохастических процессов, имеющих скрытую периодичность [11]. Гипотеза двойственности здесь выполняется.

Таким образом, далее мы принимаем, что

$$\begin{gathered} F_+(t) = 1 - \exp(-\alpha t), \\ F_-(t) = 1 - \exp(-\alpha t) - \alpha t \cdot \exp(-\alpha t). \end{gathered} \tag{12}$$

С этими функциями распределения дихотомический шум относится к немарковским случайным процессам. Одним из приёмов их исследований является метод псевдофаз [12], при помощи которого в следующем разделе будут получены уравнения для плотностей вероятности парного процесса $(N(t),\ I(t))$.

7. Кинетические уравнения для плотности вероятности парного процесса $(N(t), I(t))$, имеющего в своей структуре дихотомический шум с функцией распределения Эрланга. Метод псевдофаз

Суть метода псевдофаз состоит в том, что функцию распределения можно считать распределением суммы $F_-(t)$ независимых случайных величин, каждая из которых распределена экспоненциально с параметром α. В нашей модели случайное время жизни процесса $I(t)$ в состоянии „–1” складывается из двух времён (фаз). Из „+1” процесс переходит сначала в „–1,1” , затем в „–1,2” и после этого обратно в „+1” . Далее всё повторяется. Таким образом, состояние „–1” определяется как сумма двух состояний – вторые индексы у „–1”. Соответственно для плотностей вероятности $Q_+(t) = Q(I(t) = 1)$, $Q_{-1,1}(t) = Q(I(t) = -1{,}1)$, $Q_{-1,2}(t) = Q(I(t) = -1{,}2)$ имеем аналог системы (2):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} Q_+(t) = -\alpha Q_+(t) + \alpha Q_{-1,2}(t), \\ \dfrac{d}{dt} Q_{-1,1}(t) = -\alpha Q_{-1,1}(t) + \alpha Q_+(t), \\ \dfrac{d}{dt} Q_{-1,2}(t) = -\alpha Q_{-1,2} + \alpha Q_{-1,1}(t). \end{cases} \tag{13}$$

Теперь процесс $I(t)$ является марковским, поэтому структура системы (3) сохраняется и мы получаем следующие кинетические уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} P_+(x,t) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\{(a-(h-\sigma)x)P_+(x,t)\} - \alpha P_+(x,t) + \alpha P_{-1,2}(x,t), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} P_{-1,1}(x,t) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\{(a-(h+\sigma)x)P_{-1,1}(x,t)\} - \alpha P_{-1,1}(x,t) + \alpha P_+(x,t), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} P_{-1,2}(x,t) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\{(a-(h+\sigma)x)P_{-1,2}(x,t)\} - \alpha P_{-1,2}(x,t) + \alpha P_{-1,1}(x,t). \end{cases} \tag{14}$$

По смыслу метода псевдофаз плотность вероятности только переменной состояния x имеет вид

$$P(x,t) = P_+(x,t) + P_{-1,1}(x,t) + P_{-1,2}(x,t).$$

что позволяет определить моменты как суммы частных средних:

$$\overline{x^2(t)} = \overline{x_+^2}(t) + \overline{x^2}_{-1,1}(t) + \overline{x^2}_{-1,2}(t)\ ,$$

$$\overline{x(t)} = \overline{x_+}(t) + \overline{x}_{-1,1}(t) + \overline{x}_{-1,2}(t)\ .$$

Собственно среднее и среднеквадратичное вычисляются из системы (14) по той же методике, что и в марковском варианте задачи. Подробно останавливаться на выводе и решении уравнений для $\overline{x_+}(t)$, $\overline{x}_{-1,1}(t), \overline{x}_{-1,2}(t)$, и $\overline{x_+^2}(t)$, $\overline{x^2}_{-1,1}(t)$, $\overline{x^2}_{-1,2}(t)$ мы здесь не будем, а перейдём сразу к конечным результатам – условиям существования стационарных моментов $\overline{x(t)}$ и $\overline{x^2}(t)$ по признакам Гурвица.

Отметим, что в случае функций распределения (12) процесс $I(t)$ не будет симметричным телеграфным сигналом. В стационарном режиме из (13) следует

$$Q_+ = \frac{1}{3};\quad Q_- = Q_{-1,1} + Q_{-1,2} = \frac{2}{3}\ ,$$

т.е. $Q_- > Q_+$, и чётко проявляется двойственность $I(t)$.

8. Стационарность моментов $\overline{x(t)}$ и $\overline{x^2(t)}$ парного процесса $(N(t), I(t))$, имеющего в своей структуре дихотомический шум с распределением Эрланга

Уравнения для среднего и среднеквадратичного, которые следуют из системы (14), достаточно просто решаются при помощи преобразования Лапласа с параметром s.

В случае начальных условий

$$\overline{x}_+(0) = \overline{x}_{-1,1}(0) = \overline{x}_{-1,2}(0) = 0$$

находим образ первого момента:

$$\overline{x(s)} = \frac{a(3s^2 + (9\alpha + 6h + 2\sigma)s + 3(h + 2\alpha)(h + \alpha) + \sigma(2h + 3\alpha) - \sigma^2 + 3\alpha^2)}{3s(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)},$$

где $$a_1 = 3\alpha + 3h + \sigma; \quad a_2 = (h + \alpha + \sigma)[3(h + \alpha) - \sigma];$$

$$a_3 = (h + \alpha)^3 + \sigma^3 \left[\left(\frac{h + \alpha}{\sigma}\right)^2 - \frac{h + \alpha}{\sigma} - 1\right] - \alpha^3.$$

Далее, как и в марковской модели, нас будут интересовать корни многочлена, стоящего в знаменателе $\overline{x(s)}$. По теореме Гурвица эти корни имеют отрицательную действительную часть, если

$$a_1 = 3(\alpha + h) + \sigma > 0,$$

$$a_1 a_2 - a_3 = 8(h + \alpha + \sigma)(\alpha + h)^2 + \alpha^3 > 0,$$

что всегда выполняется, и

$$a_3 = (h + \alpha)^3 + \sigma^3(z^2 - z - 1) - \alpha^3 > 0, \quad (15)$$

где $z = (h + \alpha)\sigma^{-1}$. В свою очередь, неравенство (15) выполняется, когда $z^2 - z - 1 = 0$, так как $(h + \alpha)^3 > \alpha^3$, что и даёт уравнение золотого сечения с решением $z = 1,6180$. Никаких условий, связывающих при этом параметры α, σ, h, здесь нет. В марковской модели такое условие было: $\alpha = 2^{-1}\sigma$. «Отстроимся» от $z = 1,6180$ к значению $z = 1,62$. В этом случае $z^2 - z - 1 > 0$ и, так как $(h + \alpha)^3 - \alpha^3 > 0$, получаем $a^3 > 0$ – стационарный режим есть. При других значениях $z > 1,6180$ будет $z^2 - z - 1 > 0$, и, следовательно, $a^3 > 0$. Реализация нестационарного режима здесь невозможна.

Теперь «отсроимся» к значению $z = 1,6$, что дает $z^2 - z - 1 = -0,04$ и знак a_3 зависит от величины $\alpha\sigma^{-1}$. В числах имеем:

$$a_3 \sim z^3 + z^2 - z - 1 - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^3 = 4,056 - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^3.$$

Так как $\sqrt[3]{4,056} \approx 1,5948$, то $a_3 > 0$, если $\alpha\sigma^{-1} < 1,5948$.

Например, с $h\sigma^{-1} = 0,1$ получаем $\alpha\sigma^{-1} = 1,6 - h\sigma^{-1} = 1,5$, соответственно $(\alpha\sigma^{-1})^3 = 3,375$. В свою очередь, $z^3 + z^2 - z - 1 = 4,056$ и $a_3 > 0$, как это и должно быть. Нестационарный режим здесь возможен, если $\alpha\sigma^{-1} > 1,5948$. Допустим, что $h\sigma^{-1} = 0,005$. В этом случае $\alpha\sigma^{-1} = 1,595$ и соответственно $(\alpha\sigma^{-1})^3 = 4,0577$, но $z^3 + z^2 - z - 1 = 4,056$ – мы получаем $a_3 < 0$, т.е. нестационарный режим. Когда $z \le 1$, имеем $z^3 + z^2 - z - 1 \le 0$ и $a_3 < 0$ при любых значениях $\alpha\sigma^{-1}$ и $h\sigma^{-1}$, соответствующих, конечно, условию $(h + \alpha)\sigma^{-1} \le 1$.

Таким образом, только стационарность первого момента реализуется, если $(h + \alpha)\sigma^{-1} \ge 1,6180$.

Рассмотрим стационарность среднеквадратичного $\overline{x^2}(t)$ с начальными условиями

$$\overline{x_+^2}(0) = \overline{x^2}_{-1,1}(0) = \overline{x^2}_{-1,2}(0).$$

Имеем в образах по Лапласу:

$$\overline{x^2}(s) = \frac{2a^2\{\Psi_1(s)\varphi_1(s) + \Psi_2(s)\varphi_2(s) + \Psi_3(s)\varphi_3(s)\}}{3s(s^3 + a_1 s + a_2 s + a_3)(s^3 + b_1 s + b_2 s + b_3)},$$

где $\Psi_1(s),\ldots,\varphi_3(s)$ полиномы второй степени по s, которые на стационарность среднеквадратичного не влияют, поэтому здесь приводятся только некоторые из них:

$$\Psi_1(s) = s^2 + [3\alpha + 4(h + \sigma)]s + 2[2(h + \sigma) + \alpha]\cdot(h + \sigma + \alpha) + \alpha^2,$$

$$\varphi_3(s) = s^2 + (3\alpha + 2h)s - (\sigma - h - \alpha)(h + 2\alpha + \sigma) + \alpha^2.$$

Для нас интерес представляют коэффициенты b_1, b_2, b_3:

$$b_1 = 3(2h + \alpha) + 2\sigma, \quad b_2 = (2h + \alpha)(6h + 3\alpha + 4\sigma) - 4\sigma^2,$$

$$b_3 = (2h + \alpha)^3 + 2\sigma^3 \left[\left(\frac{2h + \alpha}{\sigma}\right)^2 - 2\cdot\frac{2h + \alpha}{\sigma} - 4\right] - \alpha^3.$$

Как обычно, корни уравнения $s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3 = 0$ имеют отрицательную действительную часть, если $b_1 > 0$, $b_1 b_2 - b_3 = 8(2h + \alpha)^2 \cdot (2h + \alpha + 2\sigma) + \alpha^3 > 0$, что всегда выполняется, и

$$b_3 = \left\{z^3 + 2(z^2 - 2z - 4) - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^3\right\}\sigma^3 > 0, \quad (16)$$

где $z = (2h + \alpha)\sigma^{-1}$. Неравенство (16) имеет место при условии $z^2 - 2z - 4 = 0$ – получаем уравнение, положительным корнем которого является удвоенное значение золотой пропорции, т.е. $z \approx 3{,}2360 = 2 \cdot 1{,}6180$. Очевидно, что при $z > 2 \cdot 1{,}6180$ будет $z^2 - 2z - 4 > 0$ и, следовательно, $b_3 > 0$. Реализация нестационарного режима здесь невозможна.

«Отстроимся» к $z = 3{,}2$. Теперь $2 \cdot (z^2 - 2z - 4) = -0{,}32$ и знак b_3 зависит от величины $\alpha\sigma^{-1}$. В числах имеем:

$$b_3 \sim z^3 + 2 \cdot (z^2 - 2z - 4) - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^3 =
= 32{,}448 - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^3 .$$

Так как $\sqrt[3]{32{,}448} \approx 3{,}1895$, то $b_3 > 0$, если $\alpha\sigma^{-1} < 3{,}1895$. Например, с $2h\sigma^{-1} = 0{,}15$ получаем $\alpha\sigma^{-1} = 3{,}05$ и $(\alpha\sigma^{-1})^3 = 28{,}372$, что дает $b_3 > 0$ – стационарный режим есть. Рассмотрим возможность реализации нестационарного режима с $z = 3{,}2$ и $\alpha\sigma^{-1} > 3{,}1895$. Допустим, что $2h\sigma^{-1} = 0{,}005$. В этом случае $\alpha\sigma^{-1} = 3{,}195$ и $(\alpha\sigma^{-1})^3 = 32{,}615$. Так как $32{,}615 > 32{,}448$, то приходим к $b_3 < 0$ – есть нестационарный режим.

Таким образом, только стационарность среднеквадратичного имеет место, если $2(h + \alpha)\sigma^{-1} \geq 2 \cdot 1{,}6180$.

Условие отрицательности действительных частей корней уравнения $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$ было получено ранее, когда рассматривался первый момент $\overline{x(s)}$.

9. Пропорция золотого сечения в стационарных моментах парного процесса $(N(t), I(t))$ с параметром $h = 0$

Полученные в предыдущем разделе выражения для среднего и среднеквадратичного упрощаются в случае $h = 0$. Менее громоздкие вычисления позволяют найти пропорцию золотого сечения в моментах более высокого порядка, чем второй, что интересно с точки зрения установления общих законов гармонии процесса $(N(t), I(t))$.

Образ по Лапласу первого момента уже был вычислен и с $h = 0$ легко получаем $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \lim_{s \to 0} s \cdot \overline{x(s)} = \frac{\alpha(9z^2 + 3z - 1)}{3\sigma(z^2 - z - 1)} , \quad (17)$$

где $z = \alpha\sigma^{-1} > 1{,}6180$.

Аналогично находим стационарное значение среднеквадратичного с $h = 0$:

$$\overline{x^2} = \lim_{s \to 0} s \cdot \overline{x^2(s)} = \frac{\alpha^2(27z^4 + 27z^3 - z^2 + 18z + 12)}{3\sigma^2(z^2 - z - 1)(z^2 - 2z - 4)} , \quad (18)$$

где $z = \alpha\sigma^{-1} > 2 \cdot 1{,}6180$.

Сравнивая выражения (17) и (18), можно заметить правило записи знаменателей. Число квадратных трёхчленов в круглых скобках определяется порядком момента. Каждый трёхчлен состоит из следующих слагаемых: первым всегда будет z^2 с коэффициентом единица, второе есть z с коэффициентом, равным порядку момента, свободный член – квадрат этого порядка. Очерёдность смены знаков всегда одна: плюс, минус, минус. Следуя указанному мнемоническому правилу, запишем знаменатель $\overline{x^3}$:

$$(z^2 - z - 1)(z^2 - 2z - 4)(z^2 - 3z - 9). \quad (19)$$

Проверим этот результат непосредственным вычислением $\overline{x^3}$.

Умножим уравнения системы (14) на x^3 и проинтегрируем по x в пределах $[0, \infty)$.

В стационарном режиме после этих операций получаем:

$$\begin{cases} (\alpha - 3\sigma)\overline{x^3}_{+1} - \alpha\overline{x^3}_{-1,2} = 3a\overline{x^2}_{+1} , \\ (\alpha + 3\sigma)\overline{x^3}_{-1,1} - \alpha\overline{x^3}_{+1} = 3a\overline{x^2}_{-1,1} , \\ (\alpha + 3\sigma)\overline{x^3}_{-1,2} - \alpha\overline{x^3}_{-1,1} = 3a\overline{x^2}_{-1,2} , \end{cases} \quad (20)$$

где частные среднеквадратичные были определены ранее.

Собственно третий момент есть

$$\overline{x^3} = \overline{x^3}_{+1} + \overline{x^3}_{-1,1} + \overline{x^3}_{-1,2} , \quad (21)$$

и после решения системы (20) получаем:

$$\overline{x^3} = \frac{a(27z^6 + 54z^5 + 109z^4 + 118z^3 + 191z^2 + 42z - 12)}{\sigma^3(z^2 - z - 1)(z^2 - 2z - 4)(z^2 - 3z - 9)} . \quad (22)$$

Выражение (22) справедливо, конечно, при условии, что $\alpha\sigma^{-1} > 3 \cdot 1{,}6180$ и его знаменатель совпадает с предполагаемой формой (19).

Моменты $\overline{x^4}$, $\overline{x^5}$ и т.д. не определялись, но из алгоритма вычисления $\bar{x}$, $\overline{x^2}$, $\overline{x^3}$ следует, что знаменатель $\overline{x^n}$ будет иметь вид

$$(z^2 - z - 1) \cdot \ldots \cdot (z^2 - nz - n^2) = \prod_{k=1}^{n} (z^2 - kz - k^2),$$

и, следовательно, в точке $z = n \cdot 1{,}6180$ происходит перестройка нестационарных режимов изменения $\overline{x^n}$ в стационарные.

Таким образом, моменты любого порядка связаны с пропорцией золотого сечения, в чём и проявляется гармоничность процесса $(N(t), I(t))$. Примечательно, что эта пропорция встречается в различных разделах естественных наук и статистическая физика не является исключением.

Выводы

В рамках модельного стохастического дифференциального уравнения со случайным параметром показано, что через золотое сечение естественные системы приобретают стационарный режим существования, функциональную устойчивость.

Необходимым условием этого эффекта является концепция двойственности, согласно которой параметрические флуктуации, моделирующие воздействие внешней среды, представляются в виде дихотомического шума, имеющего в своей структуре две функции распределения: Эрланга первого порядка и типичной для марковских процессов показательно-степенной.

Список литературы

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. ; пер. с англ. Т. 9. Квантовая механика II. М. : Мир, 1967. 260 с.
2. *Попков В. В., Шипицин Е. В.* Золотое сечение в цикле Карно // УФН. 2000. Т. 170. С. 1253–1255.
3. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. М. : Бином, 2002. 534 с.
4. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М. : Наука, 1982. 606 с.
5. *Ахманов С. Ф., Дьяков Ю. Е.* Введение в статистическую физику и оптику. М. : Наука, 1981. 640 с.
6. *Гардинер С., Криспин В.* Стохастические методы в естественных науках. М. : Мир, 1986. 526 с.
7. *Тихонов В. И., Кульман Н. К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. М. : Сов. радио, 1975. 704 с.
8. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М. : Мир, 1987. 397 с.
9. *Попков В. В.* Двойственность // Тектологический альманах. 2000. № 1. С. 4–67.
10. *Сироткин О. Л.* Особенности моментных функций осциллятора с параметрической нестабильностью, обусловленной дихотомическим шумом с эрланговскими функциями распределения // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 11. С. 921–932.
11. *Болотин В. В., Москвин В. Г.* О параметрических резонансах в стохастических системах // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1972. № 4. С. 88–94.
12. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М. : Мир, 1971. 536 с.

УДК 579.23:53.086:615.281

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ АНТИБАКТЕРИАЛЬНЫХ ПРЕПАРАТОВ НА МИКРОБНУЮ КЛЕТКУ
(НА ПРИМЕРЕ *E.COLI* И ЦЕФАЛОСПОРИНОВ I ПОКОЛЕНИЯ)

**П. С. Ерохин, Д. В. Уткин, О. С. Кузнецов,
Н. П. Коннов, Н. А. Осина**

Российский научно-исследовательский противочумный институт «Микроб», Саратов
E-mail: rusrapi@microbe.ru

Методами атомно-силовой микроскопии (АСМ) показано изменение клеточной стенки *E.coli* под воздействием Цефазолина-АКОС. С использованием режимов прерывистого и непрерывного контакта установлено, что повреждающее действие антибиотика Цефазолин-АКОС отмечено через 30 мин экспозиции. Физические показатели позволяют получать более полную информацию о воздействии антибиотика на микроорганизмы.
Ключевые слова: АСМ, полуконтактный режим, контактный режим, микроорганизмы, антибактериальные препараты, шероховатость, сила адгезии, распределение латеральных характеристик, чувствительность.

Application of Atomic Force Microscopy for Detection of Influence of Antibiotic Upon the Microbial Cell (on the Model of *E.coli* and I Generation Cephalosporins)

**P. S. Erokhin, D. V. Utkin, O. S. Kuznetsov,
N. P. Konnov, N. A. Osina**

Alteration of *E.coli* cell wall caused by Cefazolin-AKOS was observed atomic force microscopy (AFM).Using semi-contact and contact modes the damaging effect of the Cefazolin-AKOS antibiotic was shown after a 30 minutes exposure. The assessment of physical