



УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ СИНФАЗНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДИНАМИКУ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

Е. С. Попова¹, Е. П. Селезнев²¹Саратовский государственный университет²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

E-mail: lenochkafnp@yandex.ru

Численно исследуется система связанных квадратичных отображений, находящаяся под синфазным гармоническим воздействием. На основе оценки спектра ляпуновских показателей, исследована структура пространства управляющих параметров, построены области существования мультистабильных состояний, изучена эволюция их бассейнов притяжения.

Ключевые слова: отображения, мультистабильность, спектр ляпуновских показателей, странный нехаотический аттрактор, хаос, корреляционная размерность, бассейны притяжения.

Influence of the Co-Phase Harmonic Excitation on the Dynamics of the Two Coupled Period Doubling Systems

E. S. Popova, E. P. Seleznev

The system of two coupled maps under in-phase harmonic forcing is investigated numerically. By calculating of the Lyapunov exponent spectrum the structure of control parameters space is investigated, the existence regions of the various multistable states are presented, the structure of the basins of attraction is studied.

Key words: maps, multistability, Lyapunov exponent spectrum, strange nonchaotic attractor, chaos, correlation dimension, basins of attraction.

Система двух симметрично связанных идентичных объектов, каждый из которых демонстрирует при изменении управляющего параметра переход к хаосу, является одним из эталонных объектов нелинейной динамики и является важным звеном при переходе к изучению хаоса в многомерных и распределенных системах [1–3]. Ярким примером является исследование динамики одномерных отображений с последующим переходом к связанным системам и цепочкам [2–9]. Так, если в одномерном отображении реализуются лишь два сценария перехода к хаосу: через последовательность удвоений периода и режим перемежаемости, то уже в двух связанных системах имеет место рождение тора и многообразие мультистабильных регулярных и хаотических движений. Усложнение систем возможно как по пути увеличения количества взаимодействующих элементов, так и по пути введения внешних гармонических и более сложных воздействий [2–9]. Такой подход, в частности, позволил достаточно подробно изучить переход к хаосу через рождение

странного нехаотического аттрактора [10–14]. Логичным развитием исследований в этом направлении является изучение связанных систем.

Интерес к связанным неавтономным системам обусловлен тем, что, с одной стороны, в отсутствие связи каждая из подсистем демонстрирует переход к хаосу через рождение странного нехаотического аттрактора [10–14]. Возникает вопрос: какова динамика и структура пространства управляющих параметров более сложной связанной системы? С другой стороны, известно [6–9], что в отсутствие гармонического воздействия, связанная система демонстрирует иерархию мультистабильных состояний, различные сценарии перехода к хаосу, и соответственно возникает вопрос: как влияет внешнее гармоническое воздействие на многообразие мультистабильных состояний, сценарии перехода к хаосу? Проблема оказывается достаточно сложной, так как и само воздействие может быть реализовано различными способами. Возникает целый спектр вопросов: каковы последствия такого воздействия, какова динамика системы, ее аттракторы, сценарии перехода к хаосу, структура пространства управляющих параметров, влияние и роль свойств симметрии и типов связи, характер и эволюция границ бассейнов притяжения.

Целью данной работы является исследование динамики двух связанных подсистем, демонстрирующих с изменением управляющего параметра переход к хаосу через последовательность удвоений периода и находящихся под внешним синфазным гармоническим воздействием с иррациональным значением его частоты.

Численно исследовалась система квадратичных отображений с диссипативной связью с гармоническим воздействием вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + k \cdot (x_n^2 - y_n^2) + \varepsilon \cdot \cos(2\pi\omega), \\ y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + k \cdot (y_n^2 - x_n^2) + \varepsilon \cdot \cos(2\pi\omega), \end{cases} \quad (1)$$

где λ – управляющий параметр, k – параметр связи, ε – амплитуда дополнительного воздействия,



ω – частота воздействия. Для системы (2) при $\varepsilon=0$ известно, что при $k \rightarrow 0$ наблюдается множество мультистабильных состояний, иерархия которых подробно описана в [6–9].

На рис. 1 представлены области существования различных динамических режимов на плоскости управляющих параметров (k, λ) , при фиксированных $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0.1$, построенные по результатам вычислений спектра ляпуновских показателей. Вычисления проводились с помощью перенормировки и ортогонализации Грамма–Шмидта [3]. Светлым тоном отмечены области существования синфазных регулярных режимов (с отрицательными ляпуновским показателями), серым – синфазных хаотических (с одним положительным ляпуновским показателем),

тёмным – области существования несинфазных режимов. В выделенных фрагментах представлены проекции фазовых портретов на плоскости (x_n, y_n) и (x_{n+1}, x_n) наиболее типичных аттракторов. При $\varepsilon=0$ в системе (1) эволюционируют циклы, многообразие которых подробно описано в [8], а представленная структура плоскости параметров (k, λ) хорошо совпадает с известными результатами [8]. С введением гармонического воздействия в системе (1) эволюционируют торы и режимы, сформировавшиеся в результате их бифуркаций. Фрагменты 1 и 2 соответствуют синфазному тору, 3 и 4 – удвоенному синфазному тору, 5 и 6 – странному нехаотическому аттрактору, 7 и 8 – синфазному хаосу или режиму полной хаотической синхронизации, 9 и 10 – гиперхаосу.

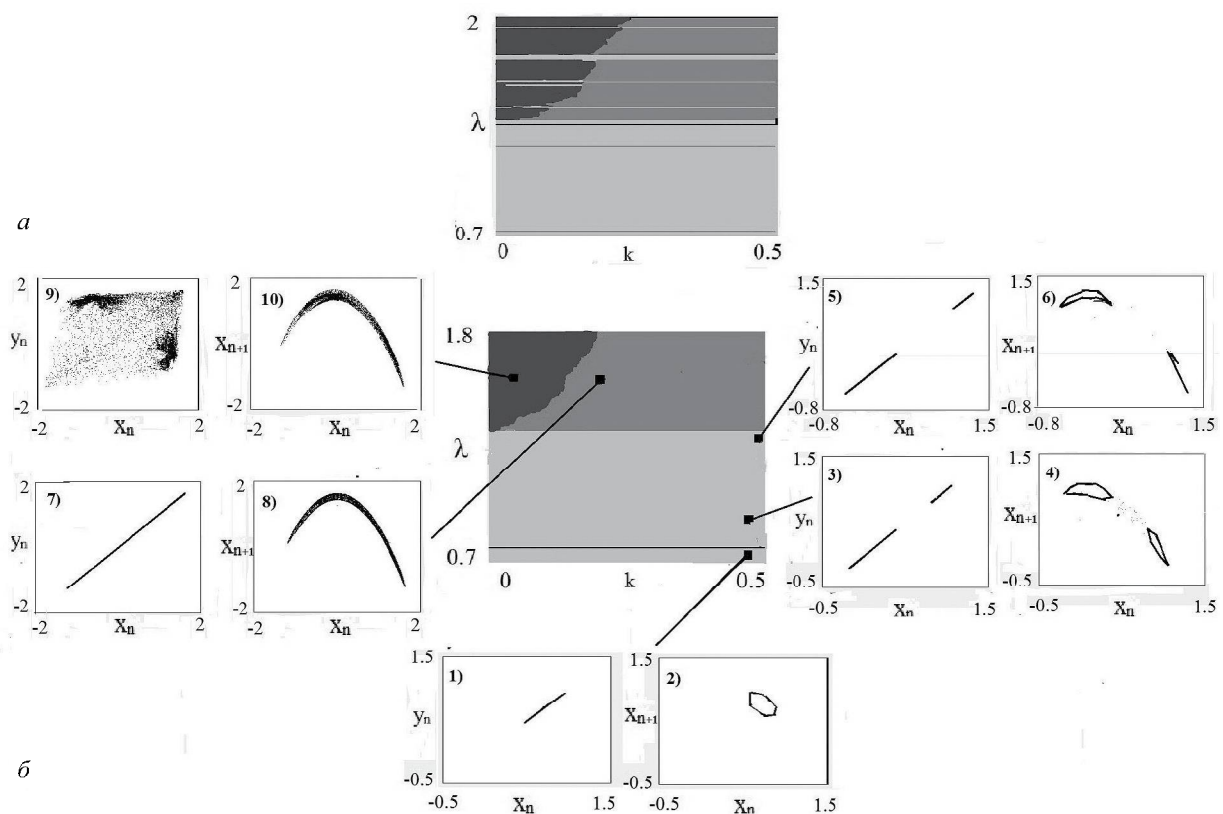


Рис. 1. Плоскость параметров (k, λ) : а – при $\varepsilon = 0$; б – при $\varepsilon = 0.1$

Рассмотрим более подробно эволюцию синфазного тора, для этого выберем (см. рис. 1, б) значение параметра связи, равное $k = 0.45$, и рассмотрим эволюцию тора вначале с увеличением λ , а затем – с уменьшением k . При $k = 0.45$ с увеличением параметра λ тор Т (фрагменты 1 и 2 на рис. 1, б) претерпевает бифуркацию удвоения, в результате которой рождается удвоенный тор 2Т (фрагменты 3 и 4). С приближением к границе

перехода порядок-хаос на плоскости (x_{n+1}, x_n) наблюдается искажение формы проекции фазового портрета, на ней появляются изломы. Оценка корреляционной размерности показывает, что переходу к хаосу предшествует рождение странного нехаотического аттрактора. Для аттрактора, представленного на фрагментах 5 и 6, оценка размерности дает значение $d_c = 1.15$, что указывает на наличие у аттрактора фрактальных свойств,



в то же время ляпуновский показатель остается отрицательным. При дальнейшем увеличении параметра λ в системе формируется хаотический аттрактор. Проекция аттрактора на плоскость (x_n, y_n) лежит на диагонали, что соответствует равенству динамических переменных $x_n = y_n$, что свидетельствует о наличии режима полной хаотической синхронизации. Уменьшение связи качественно не влияет на режим хаотической синхронизации (фрагменты 7, 8). Вблизи границы области существования синфазных режимов, полная синхронизация нарушается, при этом на проекции фазового портрета на плоскости (x_n, y_n) появляются фазовые точки, не принадлежащие ди-

агонали. В целом следует отметить, что синфазное воздействие стабилизирует режим хаотической синхронизации [13–16]. На рис. 2 представлена зависимость ляпуновских показателей системы от амплитуды воздействия при $k = 0.15$ и $\lambda = 1.56$. Из рис. 2 видно, что с увеличением параметра ε наблюдается некоторое уменьшение значений обоих показателей Ляпунова, что свидетельствует о стабилизации синфазного режима. Уменьшение старшего (положительного) ляпуновского показателя указывает на некоторое подавление хаоса в системе, а уменьшение младшего (отрицательного) – на увеличение устойчивости в трансверсальном направлении.

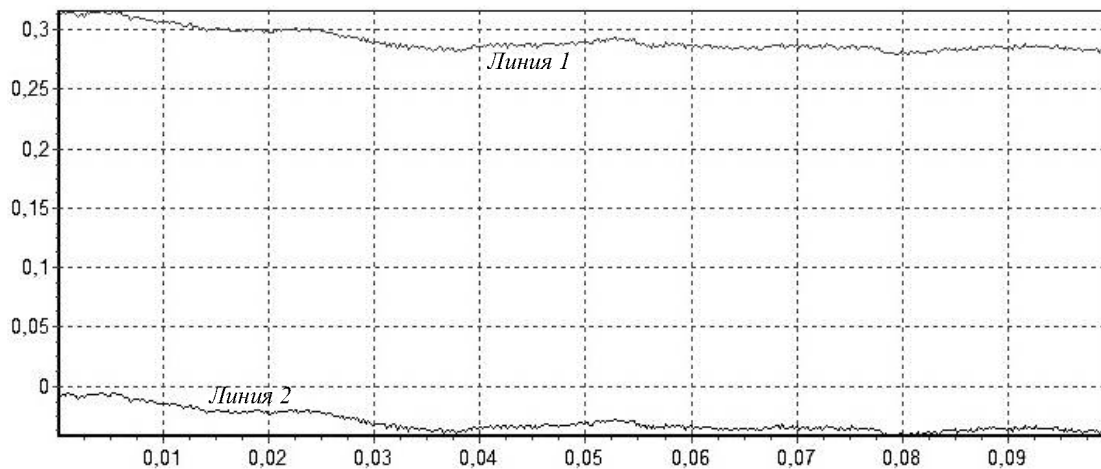


Рис. 2. Зависимость ляпуновских показателей от параметра ε при $k = 0.15$ и $\lambda = 1.56$

В целом сравнение рис. 1, а и рис. 1, б показывает, что синфазное воздействие не разрушает режима хаотической синхронизации. Основное отличие состоит в том, что последовательность бифуркаций удвоения синфазного тора является конечной, в отличие от последовательности бифуркаций удвоения синфазного цикла, которая является бесконечной, переходу к хаосу предшествует рождение странного нехаотического аттрактора, сглаживается граница разрушения синфазного режима.

На рис. 3 представлены карты ляпуновских показателей динамических режимов на плоскости параметров (λ, ε) при различных фиксированных значениях параметра связи. Выделенные фрагменты иллюстрируют фазовые портреты типичных режимов. При $k = 0.45$ (рис. 3, а) ляпуновский показатель, характеризующий трансверсальную устойчивость, остается всегда отрицательным, динамика связанной системы тождественна одиночной, а плоскость

параметров повторяет (λ, ε) , аналогичную для квадратичного отображения с гармоническим воздействием [3, 10–12]. В динамике системы, как и в случае одиночной системы [3, 10–12], удвоения торов происходят на соответствующих линиях, которые заканчиваются в терминальных точках **TDT** [3, 10–12]. Уменьшение связи не меняет структуру плоскости параметров (λ, ε) , (рис. 3, б) до тех пор, пока в динамике системы (1) не формируются несинфазные режимы. На рис. 4 представлены карты ляпуновских показателей при $k = 0.003$, в выделенных фрагментах – проекции аттракторов на плоскость (x_n, y_n) . При данном значении параметра связи ляпуновский показатель, характеризующий трансверсальную устойчивость принимает как отрицательные, так и положительные значения, что приводит к формированию иерархии несинфазных режимов.

Фрагмент 1 (рис. 4) соответствует синфазному тору, с переходом через сплошную линию

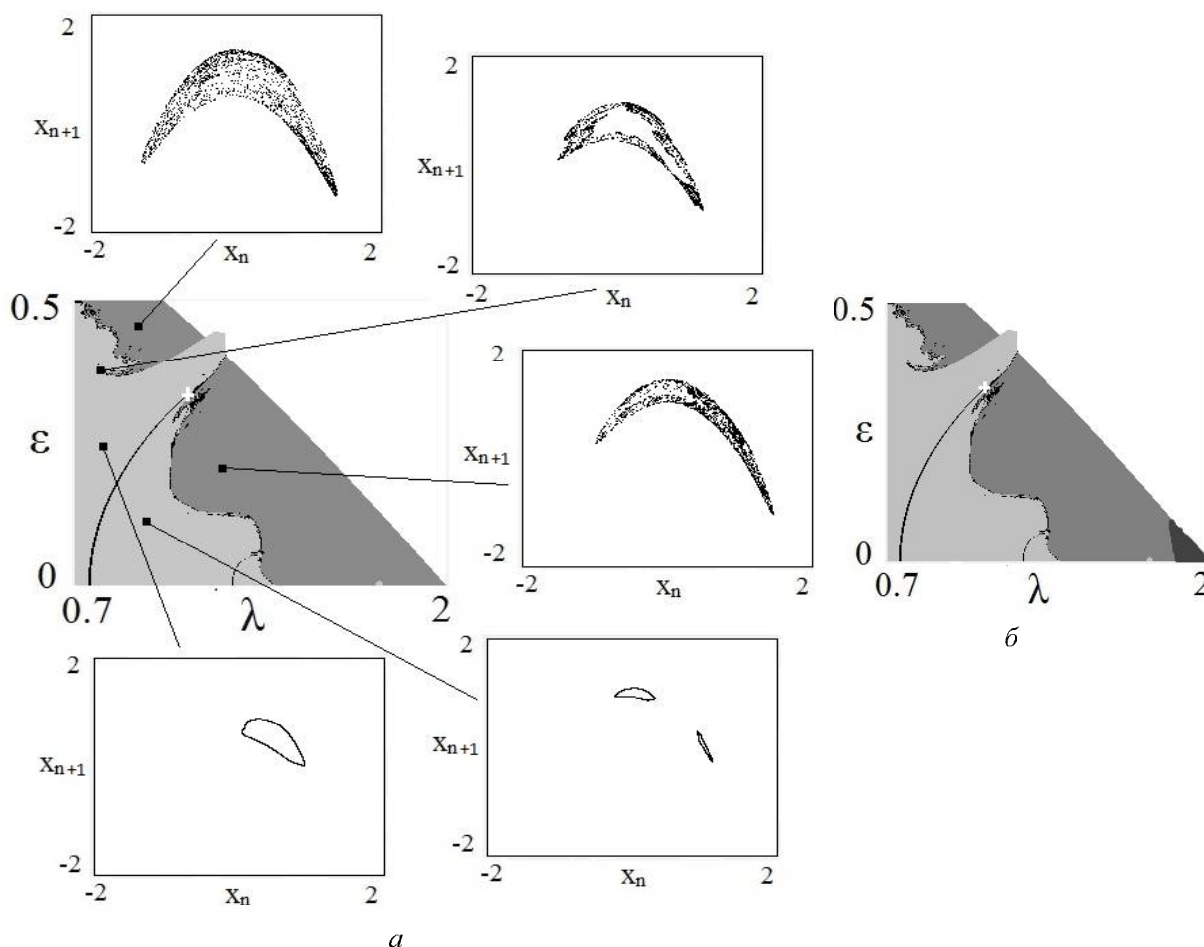


Рис. 3. Плоскость параметров (λ, ϵ) при различных фиксированных параметрах связи: $a - k = 0.15$; $b - k = 0.2$

в результате бифуркации рождается синфазный удвоенный тор (фрагмент 2). С дальнейшим увеличением параметра λ синфазный удвоенный тор эволюционирует к хаосу, аналогичным образом как это показано на рис. 2.

Помимо синфазных режимов в пространстве управляющих параметров, имеются области существования несинфазных режимов, то есть имеет место би- и мультистабильность. Так, в пространстве параметров существует несинфазный удвоенный тор (фрагмент 3 на рис. 4). Можно предположить, что механизм формирования несинфазного тора аналогичен механизму формирования несинфазных циклов [8]. Применительно к данному случаю, представляется следующая схема рождения несинфазного тора. Односвязный тор становится неустойчивым (первый ляпуновский показатель достигает нулевого значения), а в его окрестности рождается удвоенный синфазный тор. Неустойчивый односвязный тор с изменением управляющих параметров претерпевает бифуркацию удвое-

ния (второй ляпуновский показатель достигает нулевого значения), и в результате рождается неустойчивый несинфазный удвоенный тор. При дальнейшем увеличении параметров неустойчивый несинфазный удвоенный тор становится устойчивым.

Эволюция несинфазного тора качественно отличается от эволюции синфазного. С увеличением λ несинфазный тор претерпевает бифуркацию, в результате которой рождается трехмерный тор (фрагмент 4). Область существования трехмерного тора имеет сложную структуру, в ней имеют место зоны синхронизации к двумерному тору. При дальнейшем увеличении λ наблюдается синхронизация трехмерного тора, в результате которой рождается пара четырех обходных двумерных торов (фрагменты 5 и 6), которые существуют также на отдельных листах. Эти торы симметричны друг другу относительно диагонали плоскости (x_n, y_n) , и соответственно их дальнейшая эволюция с изменением управляющих параметров идентична.

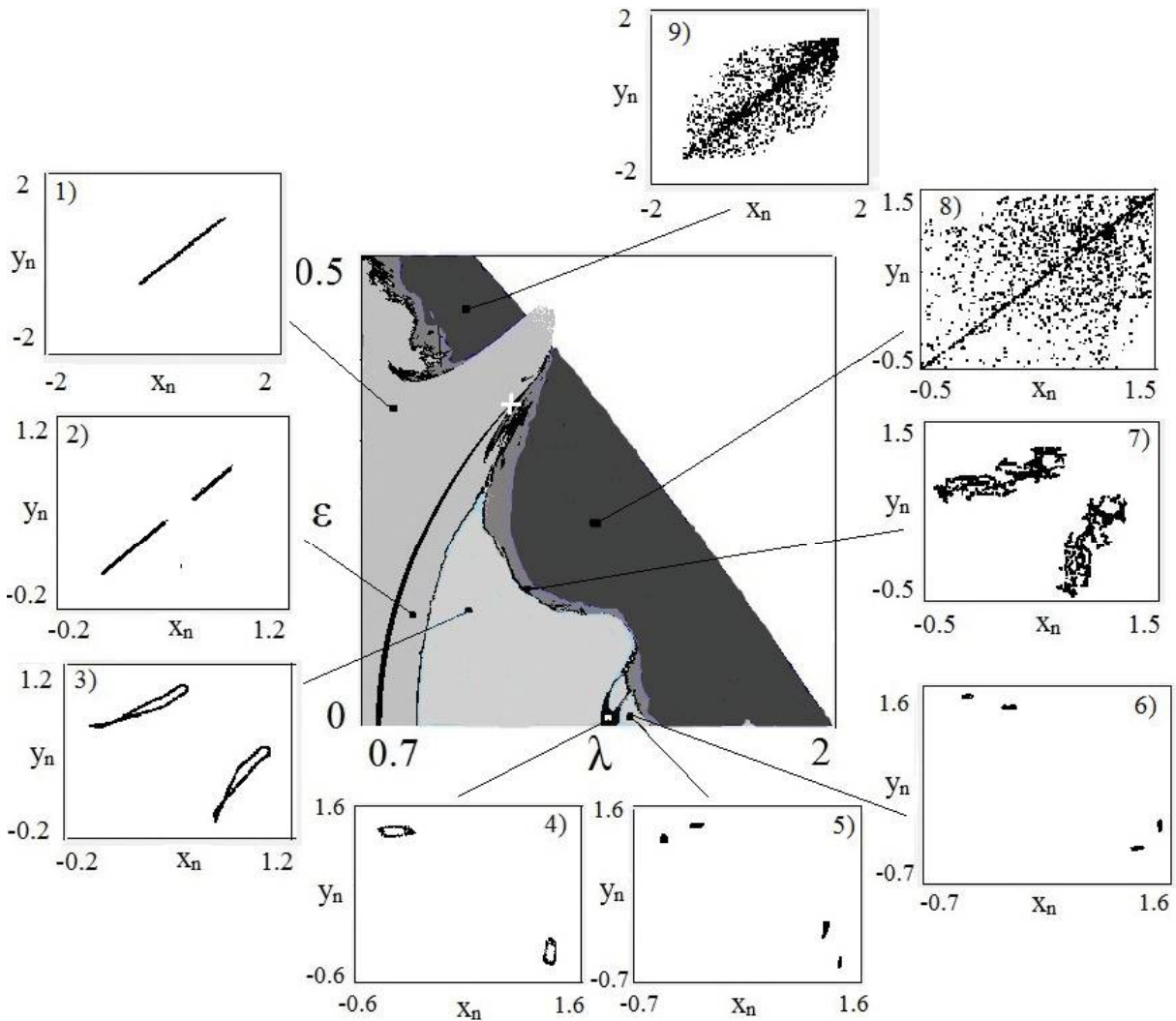


Рис. 4. Плоскость параметров (λ, ϵ) при $k = 0.03$ и фазовые портреты в характерных точках

В целом плоскость параметров (λ, ϵ) имеет сложную многолистную структуру, аналогично [8], и каждый несинфазный режим эволюционирует на отдельном листе. Однако в отличие от [8] последовательность бифуркаций торов является конечной, завершающейся переходом к хаосу через рождение странного нехаотического аттрактора.

На рис. 5 представлены бассейны притяжения аттракторов при различных значениях управляющих параметров. Качественно эволюция бассейнов притяжения повторяет аналогичную для связанных квадратичных отображений [15–19]. С изменением параметра λ в результате формирования би- и мультистабильности бассейн притяжения тора дробится на бассейны притяжения удвоенных синфазного и несинфазного торов (рис. 5, а). При дальнейшем увеличении λ бассейн

притяжения несинфазного тора преобразуется в бассейн притяжения трехмерного тора (рис. 5, б), а бассейн притяжения синфазного удвоенного тора дробится на бассейны притяжения учетверенных синфазного и несинфазного торов. Дальнейшее увеличение параметра λ приводит к дроблению бассейна притяжения трехмерного тора на бассейны притяжения торов, родившихся в результате синхронизации трехмерного (рис. 5, в). Данные изменения бассейнов притяжения сопровождаются формированием известной структуры «озер» и «островов» [20, 21].

В целом для многообразия квазипериодических и хаотических режимов исследуемой системы аналогично [8] можно ввести следующую классификацию: в пределе нулевых связи и амплитуды воздействия N -связный тор (где $N = 0, 1, 2 \dots$) может быть реализован N способа-

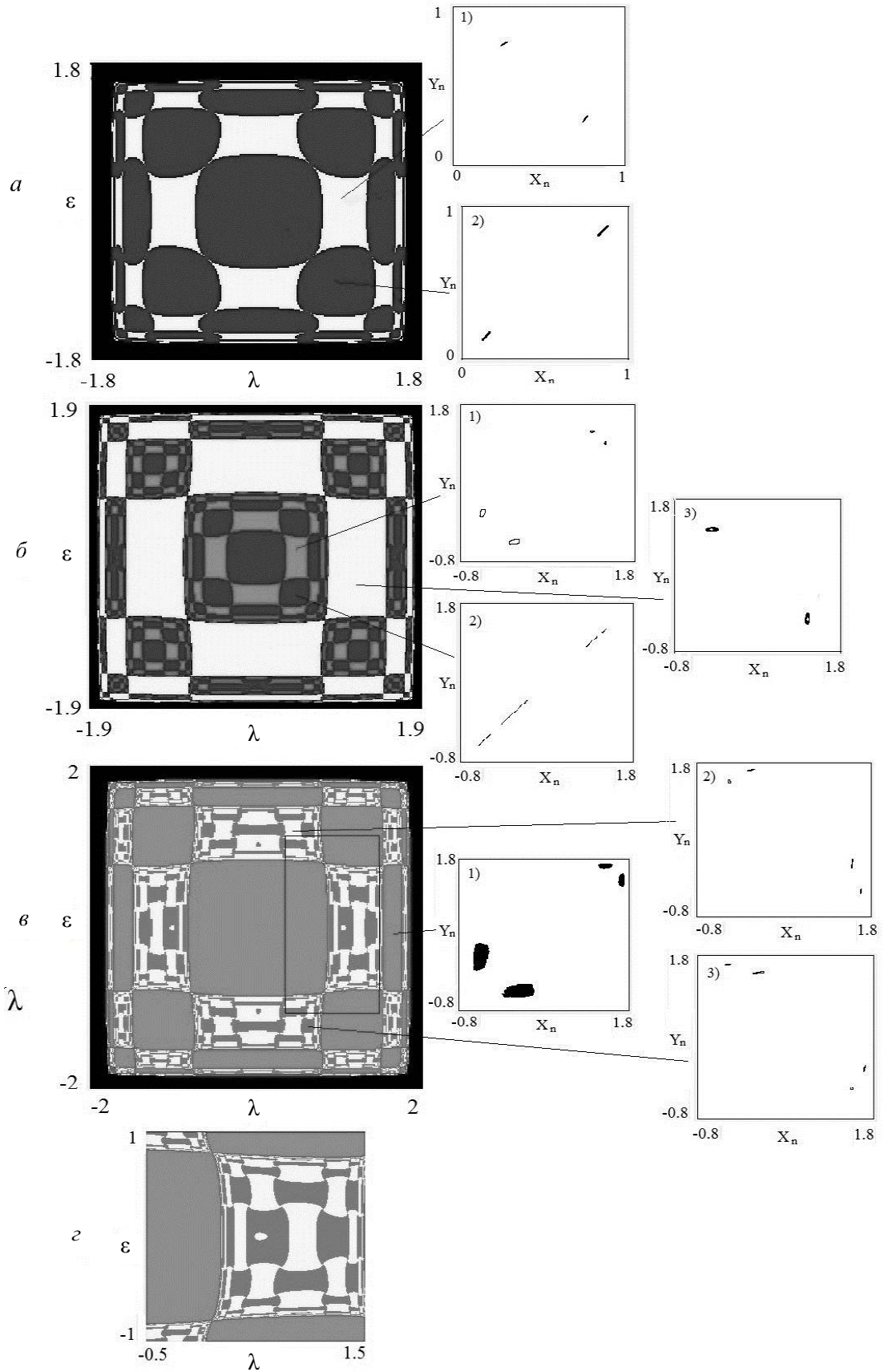


Рис. 5. Бассейны притяжения аттракторов при $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.03$ и значениях параметра: $a - \lambda = 0.87$; $б - \lambda = 1.37$; $в - \lambda = 1.42$



ми, отличающимися сдвигом реализаций x_n и y_n на интервал дискретного времени $T = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-02-91334 и 11-02-00599).

Список литературы

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Kaneko K. Collaps of tori and genesis of chaos in dissipative system. World Scientific, 1986. 264p.
3. Кузнецов С. П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
4. Feigenbaum M. I. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25–52.
5. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, вып. 2. С. 343–374.
6. Pikovsky A. S. On Interaction of Strange Attractors // Z. Phys. B. 1984. Vol. 55. P. 149–154.
7. Кузнецов С. П. Масштабно инвариантная структура пространства параметров связанных систем Фейгенбаума // ЖТФ. 1985. Т. 55, № 9. С. 1830–1834.
8. Астахов В. В., Безручко Б. П., Ерастова Е. Н., Селезнев Е. П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19–26.
9. Grebogi C., Ott E., Pelican S., Yorke J. Strange attractor that are not chaotic // Physica. 1984. Vol. D13. P. 261.
10. Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Пиковский А. С., Фойдель У., Селезнев Е. П. О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 6. С. 3–20.
11. Bezruchko B. P., Kuznetsov S. P., Seleznev Ye. P. Experimental observation of dynamics near the torus–doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828–7830.
12. Захаревич А. М., Селезнев Е. П. Структура пространства управляющих параметров модели нелинейного осциллятора при двухчастотном воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 2. С. 39–44.
13. Астахов В. В., Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Селезнёв Е. П. Квазиоднородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 5. С. 627–630.
14. Кузнецов С. П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991–1007.
15. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of Chaos Synchronization through the Sequence of Bifurcations of Saddle Periodic Orbits // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 76, № 6. P. 1014–1017.
16. Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Popovych O., Mosekilde E. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 3. P. 2817–2830.
17. Безручко Б. П., Смирнов Е. В., Селезнев Е. П. Эволюция бассейнов притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, вып. 8. С. 12–17.
18. Астахов С. А., Безручко Б. П., Смирнов Д. А., Селезнев Е. П. Эволюция бассейнов притяжения связанных систем с удвоением периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2. С. 87–89.
19. Безручко Б. П., Селезнев Е. П. Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоением периода // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, вып. 4. С. 40–46.
20. Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J. C. Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps : fractalization of basins // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 4, № 2. P. 343–381.
21. Мира К. О бассейнах, порождаемых двумерными необратимыми отображениями // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 2. С. 40.